

Exercice 2 : Effet Tunnel

1- La résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les trois régions donne :

- Région I : $\varphi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx}$, A_I et $B_I \in \mathbb{C}$
- Région II : $\varphi_{II}(x) = A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx}$, A_{II} et $B_{II} \in \mathbb{C}$
- Région III : $\varphi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx}$, $A_{III} \in \mathbb{C}$

2- Les fonctions d'onde ainsi que leurs dérivées premières par rapport à x sont continues en $x = 0$ et $x = a \Rightarrow$

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} \\ ik(A_I - B_I) = q(A_{II} - B_{II}) \\ A_{II} e^{qa} + B_{II} e^{-qa} = A_{III} e^{ika} \\ q(A_{II} e^{qa} - B_{II} e^{-qa}) = ikA_{III} e^{-ika} \end{cases}$$

La condition supplémentaire qui permet d'établir une cinquième condition est la condition de normalisation de la fonction d'onde.

3- $\vec{j}(x, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi(x, t)|^2 \Rightarrow \vec{j}_I(x, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |A_I|^2, \vec{j}_R(x, t) = -\frac{\hbar \vec{k}}{m} |B_I|^2, \vec{j}_t(x, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |A_{III}|^2$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{\|\vec{j}_R(x, t)\|}{\|\vec{j}_I(x, t)\|} = \left| \frac{B_I}{A_I} \right|^2} ; \boxed{T = \frac{\|\vec{j}_t(x, t)\|}{\|\vec{j}_I(x, t)\|} = \left| \frac{A_{III}}{A_I} \right|^2}$$

- R : représente la probabilité de réflexion de la particule sur la barrière.
- T : représente la probabilité de transmission de la particule à travers la barrière de potentiel ou probabilité pour que la particule franchisse la barrière.
- On doit avoir $R + T = 1$, puisque la particule doit être quelque part dans l'espace (soit réfléchi soit transmise) et la somme des probabilités = 1.

4- On a $T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}a}{\hbar}\right)}$

Avec $V_0 = 2 \text{ eV}$, $a = 0.1 \text{ nm}$

- Pour un électron, $E = 1 \text{ eV}$, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{T = 0,78}$
- Pour un proton, $E = 1 \text{ eV}$, $m_p = 2000 m_e \Rightarrow \boxed{T \simeq 10^{-19}}$

Commentaire : Pour l'électron la probabilité de franchir la barrière atomique est de $\sim 80\%$. Donc l'électron est délocalisé dans l'atome et peut franchir la barrière de potentiel atomique alors que dans les mêmes conditions, un proton a une probabilité $T \simeq 10^{-19}$. Cette probabilité est très faible à cause de l'effet de masse. Autrement dit, un proton ou un noyau occupent un site bien déterminé (figé) dans un atome ou une molécule.

5-

a- Une barrière est dite épaisse si $a \gg \delta$ or $\delta = \frac{1}{q} \Rightarrow qa \gg 1 \Rightarrow \sinh^2(qa) = \left(\frac{e^{qa} - e^{-qa}}{2}\right)^2 \simeq \frac{e^{2qa}}{4} \gg 1$

D'autre part $(V_0 - E) > 0$ et $(V_0 - 2E)^2 \geq 0 \Rightarrow V_0^2 + 4E^2 - 4EV_0 \geq 0$

$$\Rightarrow V_0^2 \geq 4E(V_0 - E) \Rightarrow \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \geq 1$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)} \simeq \frac{1}{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \times \frac{e^{2qa}}{4}}$$

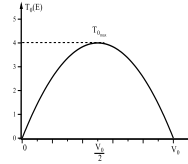
$$T \simeq \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2qa} = T_0 \cdot e^{-2qa}$$

b- $T_0(E) = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} = \frac{16(EV_0 - E^2)}{V_0^2}$

$$\frac{dT_0}{dE} = \frac{16}{V_0^2} (V_0 - 2E) = 0 \Rightarrow E = \frac{V_0}{2}$$

$$T_0\left(E = \frac{V_0}{2}\right) = \frac{16\left(\frac{V_0}{2}V_0 - \left(\frac{V_0}{2}\right)^2\right)}{V_0^2} = 4$$

$$T_0(E = 0) = 0 \text{ et } T_0(E = V_0) = 0$$



• Discussion des cas limites :

Pour $E = 0$ on a $T_0 = 0$ donc $T = 0$: la particule ne franchit pas la barrière puisqu'elle est immobile ($E = E_c$ puisque $E_p = 0$).

Pour $E = V_0$ on obtient $T_0 = 0$ ceci paraît paradoxal ! (on s'attend à ce que $T \nearrow$ quand E se rapproche de V_0). En effet l'approximation de la barrière épaisse n'est plus valable car $q = 0 \Rightarrow qa = 0$ et on n'a plus $qa \gg 1$, mais en revenant à l'expression initiale de T , on trouve $T \rightarrow 1$ et c'est normal la particule passe avec une probabilité proche de 1.

• $\langle T_0 \rangle = \frac{1}{V_0} \int_0^{V_0} T_0(E) dE = \frac{1}{V_0} \int_0^{V_0} \left(\frac{16E}{V_0} - \frac{16E^2}{V_0^2} \right) dE = \frac{1}{V_0} \left[\frac{16E^2}{2V_0} - \frac{16E^3}{3V_0^2} \right]_0^{V_0} = \frac{8}{3}$

c- on a $T = T_0 \cdot e^{-2qa} \rightarrow \ln T = \ln T_0 - 2qa \approx \ln \langle T_0 \rangle - 2qa$

or $\ln \langle T_0 \rangle = \ln \left(\frac{8}{3} \right) = 0,98 \approx 1$

$\ln T \approx 1 - 2qa$ or $qa \gg 1 \rightarrow \boxed{\ln T \approx -2qa}$

Radioactivité α

6-

a- $\varphi(r)$ vérifie l'équation $\frac{d^2\varphi(r)}{dr^2} + \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \varphi(r) = 0 \rightarrow \varphi(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$ (ou bien $\varphi(r) = D\sin(kr) + D'\cos(kr)$)

avec $k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$

or $\varphi(0) = 0 = A + B \Rightarrow B = -A \rightarrow \varphi(r) = Ae^{ikr} - Ae^{-ikr} \rightarrow \varphi(r) = D\sin(kr)$

(ou bien $\varphi(0) = 0 = D' \rightarrow \varphi(r) = D\sin(kr)$)

Pour chercher D on utilise la condition de normalisation :

$$\int_0^{r_0} |\varphi(r)|^2 dr = 1 \rightarrow D^2 \int_0^{r_0} \sin^2(kr) dr = 1 \Rightarrow \frac{D^2 r_0}{2} = 1 \rightarrow D = \sqrt{\frac{2}{r_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \sqrt{\frac{2}{r_0}} \sin(kr)}$$

b- $\varphi(r_0) = 0 \Rightarrow \sin(kr_0) = 0 \Rightarrow kr_0 = n\pi \Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n\pi}{r_0}}; n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Or } k_n^2 = \frac{2m(E_n + V_0)}{\hbar^2} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mr_0^2} - V_0$$

Commentaire: L'énergie de la particule est quantifiée, la résultat est prévisible puisque la particule est confinée dans le puits.

7-

a- La particule α , d'énergie $E > 0$ peut franchir la barrière entre A et B par effet tunnel.

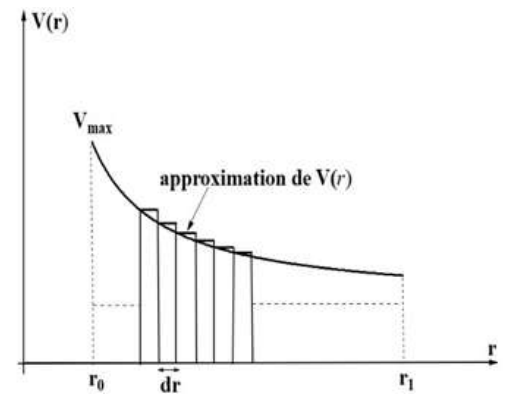
b- Au point A, $V(r_0) = V_{\max} = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{(2e)(Z-2)e}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$

$$V_{\max} = \frac{2(92-2)(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi\epsilon_0 \times 3,5 \cdot 10^{-15}} = 74,25 \text{ MeV} \text{ (Pour trouver le résultat en Mev on divise par } (1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^6))$$

c- Au point B, $V(r_1) = E \Rightarrow r_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 E} = 6,5 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

8-

a- Entre r et $+dr$, le potentiel peut être approximé par une barrière de potentiel rectangulaire d'épaisseur dr et de hauteur $V(r)$. La probabilité pour que la particule traverse cette barrière correspond à la probabilité $T(r)$ d'être arrivée en r multipliée par la probabilité de franchir la barrière rectangulaire d'épaisseur $dr \Rightarrow T(r + dr) = T(r) \cdot e^{-2qdr}$ (Par analogie avec $T = T_0 \cdot e^{-2qa}$)



$$\Rightarrow \ln T(r + dr) = \ln T(r) - 2qdr$$

b- $\ln T(r + dr) - \ln T(r) = -2qdr \Rightarrow \frac{d \ln T}{dr} = -2q$

$$\text{Or } q = \sqrt{\frac{2m_\alpha(V(r) - E)}{\hbar^2}} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln T}{dr} = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)}$$

En intégrant sur toute la barrière (de r_0 à r_1)

$$\ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 r} - E \right)} dr$$

c- On a $r_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 E} \Rightarrow \ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_\alpha E \left(\frac{K}{4\pi\epsilon_0 r E} - 1 \right)} dr = -\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_\alpha E \left(\frac{r_1}{r} - 1 \right)} dr$

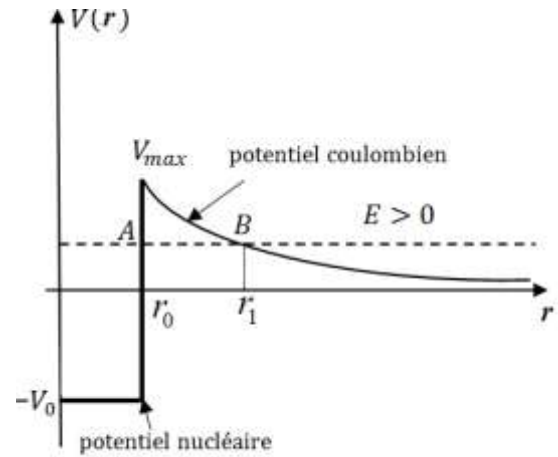
$$= -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha E} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\left(\frac{r_1}{r} - 1 \right)} dr = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha E} r_1 \left(\frac{\pi}{2} - 2 \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \right)$$

$$\text{Or } r_1 = \frac{K}{4\pi\epsilon_0 E} \Rightarrow$$

$$\ln T = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{2m_\alpha K r_0}{\pi\epsilon_0} \right)} - \frac{K\sqrt{2m_\alpha}}{4\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{\sqrt{E}} = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

loi de Gamow

$$\text{Avec } a = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{2m_\alpha K r_0}{\pi\epsilon_0} \right)} \text{ et } b = \frac{K\sqrt{2m_\alpha}}{4\epsilon_0 \hbar}$$



9-

$$\text{a- } E = E_c + E_p \simeq E_c = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}$$

$$\text{A.N } v = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^6}{6,64 \times 10^{-27}}} = 1,38 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} \approx 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{b- la distance séparant deux rebonds successifs est } 2r_0 \Rightarrow t_m = \frac{2r_0}{v}$$

$$\Rightarrow t_m = \frac{2r_0}{\sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}} = r_0 \sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}$$

$$\text{Le nombre de rebonds par unité de temps est } n = \frac{1}{t_m}$$

$$n = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}} \quad \text{A.N : } n \simeq 2 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$$

c- Pendant une seconde la particule effectue n rebonds sur la barrière de potentiel, à chaque rebond elle a une probabilité T de quitter le noyau. Donc pendant une seconde elle a une probabilité nT (car elle effectue n rebonds par seconde), d'où la probabilité par unité de temps d'émettre une particule α est $\beta = nT$.

10-

a- Le nombre de désintégration par seconde pour un noyau est β . Donc le nombre de noyaux $N(t)$ diminue de $\beta N(t) dt$ pendant une durée dt ce qui donne :

$$N(t + dt) - N(t) = -\beta N(t) dt \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\beta N(t)$$

$$\text{b- } \beta = nT = (2 \cdot 10^{21}) \times (2 \cdot 10^{-39}) = 4 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

Cette valeur est du même **ordre de grandeur** que la valeur expérimentale, ce qui valide le modèle de Gamow.

$$\text{c- On a } \frac{dN}{dt} = -\beta N(t) \Rightarrow N(t) = N_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$$\Rightarrow N(t_{1/2}) = N_0 \cdot e^{-\beta t_{1/2}} = \frac{N_0}{2}$$

$$\Rightarrow -\beta t_{1/2} = -\ln 2 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

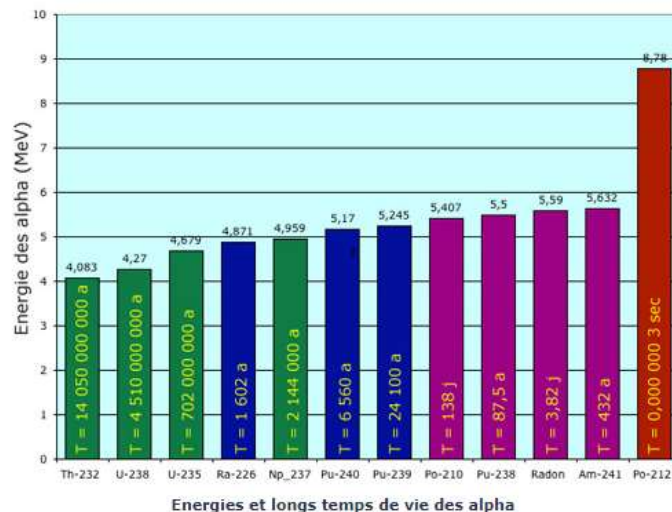
$$\text{d- On a } n = \frac{1}{t_m} \text{ et } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta} \text{ et } \beta = nT$$

$$\frac{t_{1/2}}{t_m} = n \times t_{1/2} = \frac{n \ln 2}{\beta} = \frac{n \ln 2}{nT} = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\ln\left(\frac{t_{1/2}}{t_m}\right) = \ln(\ln 2) - \ln T \text{ or } \ln T = a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

$$\ln\left(\frac{t_{1/2}}{t_m}\right) = \ln(\ln 2) - a + \frac{b}{\sqrt{E}}$$

La loi de demi vie obtenue précédemment indique qu'elle est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{E}}$, ce qui est prouvé expérimentalement, les isotopes à vie courte émettent des particules alpha plus énergétiques que les isotopes à vie longue.



Loi Geiger-Nuttall

La loi de Geiger-Nuttall est une loi semi-empirique qui exprime la durée de vie (demi-vie) de l'émetteur alpha en termes d'énergie de la particule alpha libérée. En d'autres termes, il déclare que les isotopes à courte durée de vie émettent des particules alpha plus énergétiques que celles à longue durée de vie. Cette règle a été formulée par Hans Geiger et John Mitchell Nuttall en 1911 avant le développement de la formulation théorique.