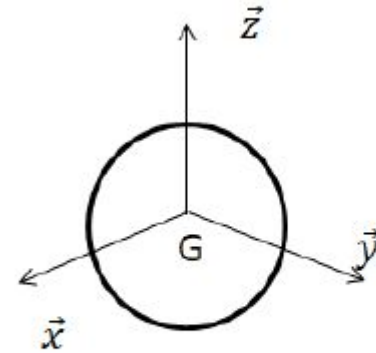


Centre d'inertie d'une sphère pleine

Forme de la matrice

$$[I_G(\text{Sphère})] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$A = B = C$$



Sphère pleine

$$A = \int_{P \in (S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$B = \int_{P \in (S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$C = \int_{P \in (S)} (x^2 + y^2) dm$$

$$\Rightarrow A + B + C = 3A = 2 \int_{P \in (S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$3A = 2 \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3} \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{3} \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$A = \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\begin{cases} \theta : 0 \rightarrow \pi \\ \varphi : 0 \rightarrow 2\pi \\ r : 0 \rightarrow R \end{cases}$$

$$A = \frac{2}{3} \rho \quad \frac{1}{5} R^5 \quad 2 \quad 2\pi$$

$$\Rightarrow A = \frac{8}{15} \rho R^5 \pi$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{5} m R^2$$

$$[I_G(\text{Sphère})] = \frac{2}{5} m R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Exercice 2

Une poulie à gorge circulaire a pour axe de révolution $(O, \vec{y})$. La figure représente une coupe dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$. Calculer le volume de cette poulie en fonction des données géométriques.

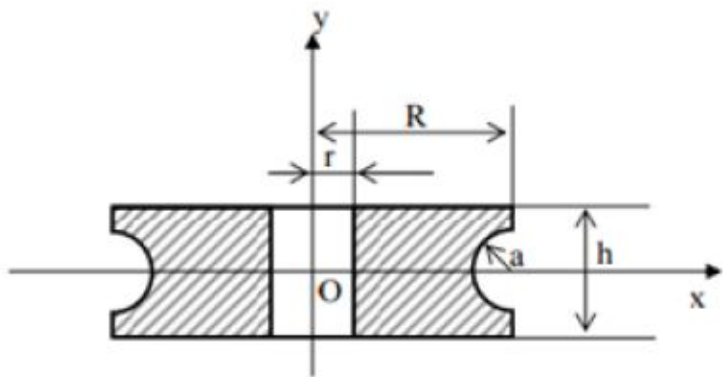
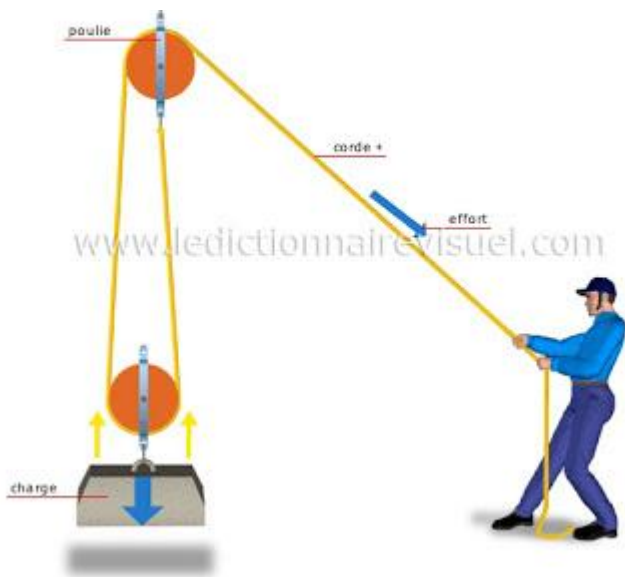
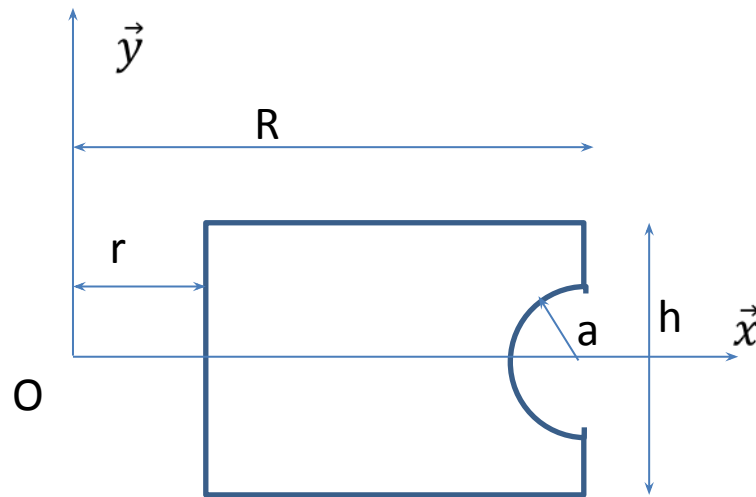
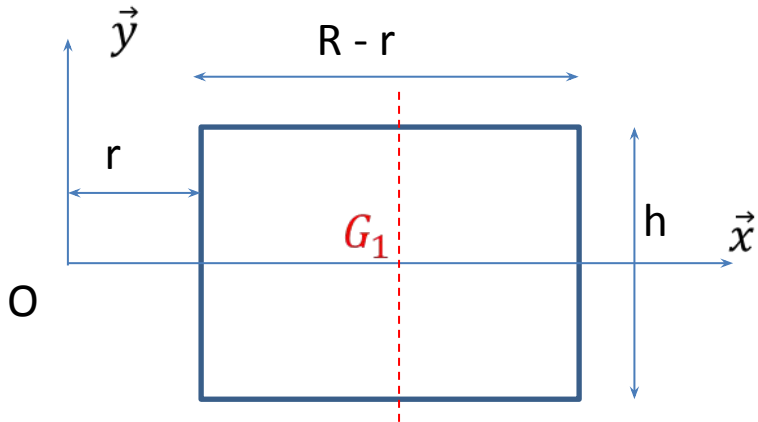


FIGURE 2 – Poulie à gorge





(S1) : plaque de masse m_1 de centre de masse G_1



$$m_1 = \sigma S_1 \quad S_1 = (R - r)h$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \left(r + \frac{R - r}{2} \right) \vec{x} = \frac{R + r}{2} \vec{x}$$

Théorème de Guldin

$$V = 2\pi S x_G$$

$$\overrightarrow{OG} = ?$$

$$S = S_1 - S_2 = ?$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OG_1} - m_2 \overrightarrow{OG_2}}{m_1 - m_2}$$

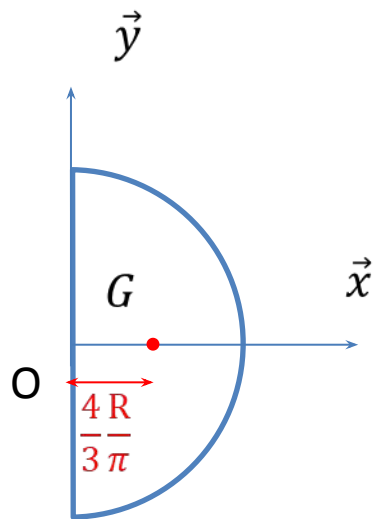
(S2) : disque de masse m_2 de centre de masse G_2



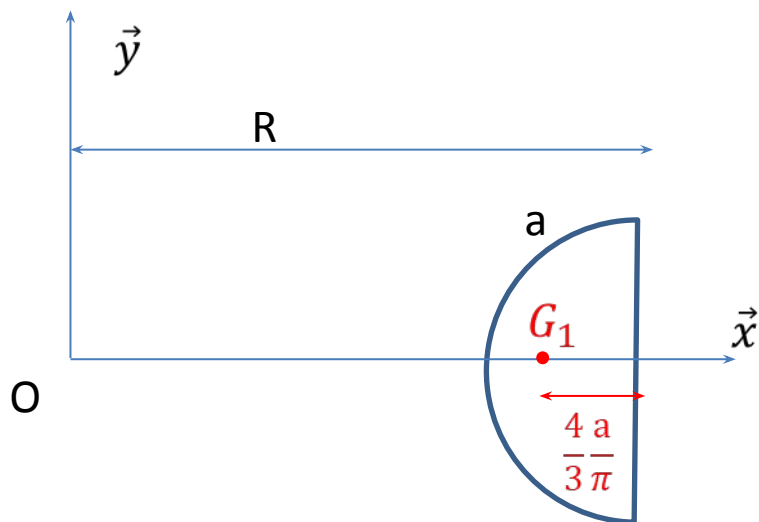
$$m_2 = \sigma S_2$$

$$S_2 = \frac{\pi a^2}{2}$$

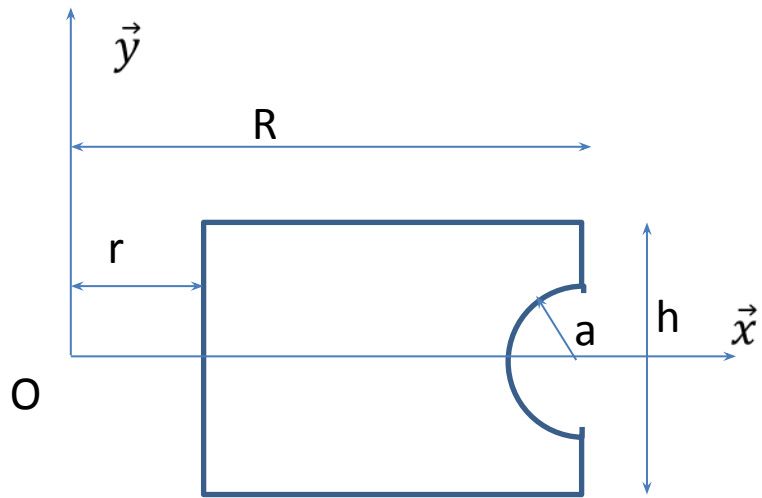
Centre d'inertie d'un demi disque de rayon R



$$x_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2\pi\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$



$$\overrightarrow{OG_2} = \left(R - \frac{4a}{3\pi}\right)\vec{x}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{m_1 \overrightarrow{OG_1} - m_2 \overrightarrow{OG_2}}{m_1 - m_2} \\ &= \frac{S_1 \overrightarrow{OG_1} - S_2 \overrightarrow{OG_2}}{S_1 - S_2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OG} = \left[\frac{(R - r)h\left(\frac{R + r}{2}\right) - \frac{\pi a^2}{2} \left(R - \frac{4a}{3\pi}\right)}{S_1 - S_2} \right] \vec{x}$$

$$V = 2\pi S x_G$$



$$V = \pi(R^2 - r^2)h - \pi^2 a^2 \left(R - \frac{4a}{3\pi}\right)$$

Exercice 3 (Volant d'inertie)

Un volant d'inertie est un système rotatif permettant le stockage et la restitution d'énergie cinétique. Il est constitué d'une masse (disque, anneau, cylindre, ...) fixée sur un arbre et entraînée en rotation par l'action d'un couple. Une fois lancée, la masse continue à tourner, même s'il n'y a plus d'action. L'énergie est alors stockée dans le volant d'inertie sous forme d'énergie cinétique elle pourra ensuite être restituée.

On représente dans la figure 3 un volant d'inertie en acier de masse volumique ρ . Il est constitué :

- d'une couronne circulaire à base carrée (coté $2c$) et de rayon extérieur $R_e = 10.c$, de hauteur $h = 2c$,
- d'un moyeu central de rayon $R_m = c$ de hauteur $h = 2c$,
- de trois bras à 120° de section carrée (coté c).

Le plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symétrie matérielle pour le volant.

Les bras sont modélisés par des parallélépipèdes tangents à la couronne et au moyeu.

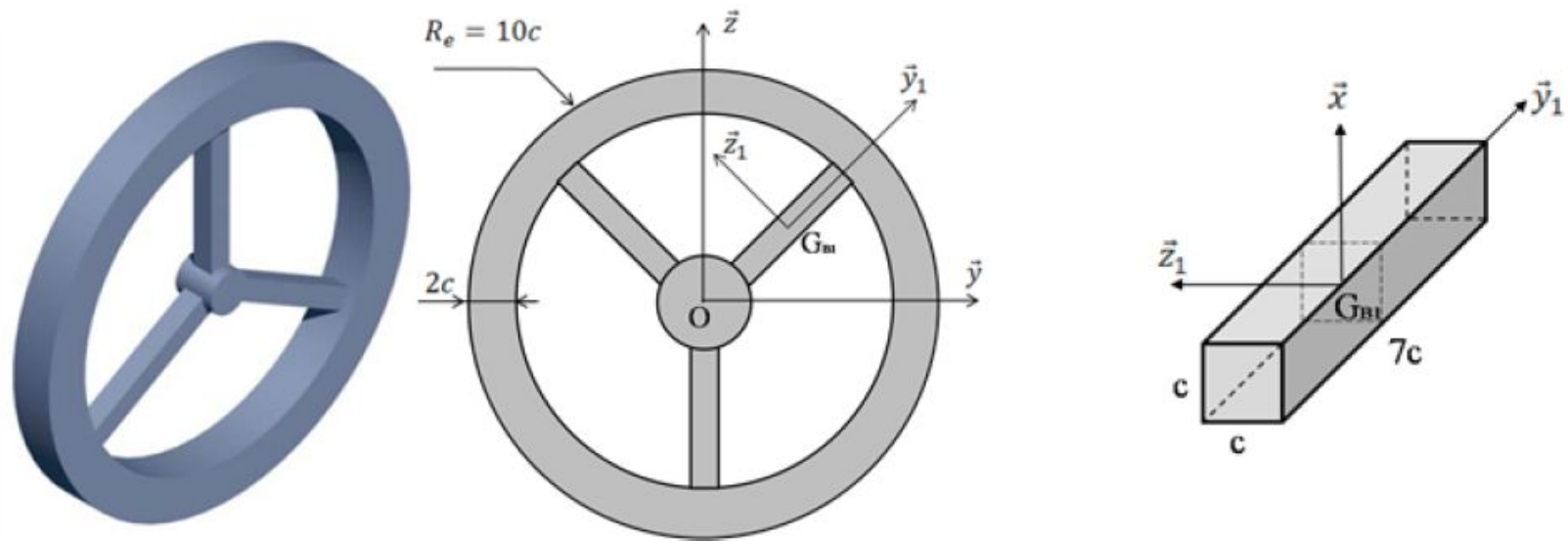


FIGURE 3 – Volant d'inertie

FIGURE 4 – Bras B1

- 1) Déterminer en fonction de ρ et c l'expression du moment d'inertie I_M du moyeu autour de l'axe de rotation $(O, \vec{x})$.

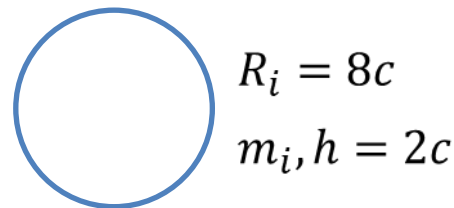
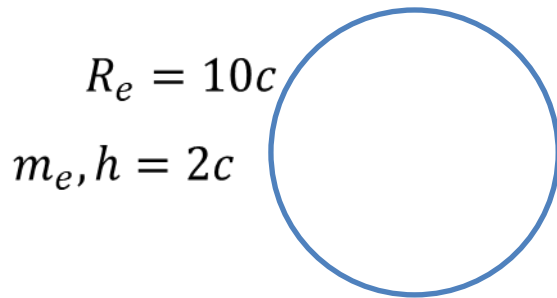
$$I_M = \frac{m_M R_m^2}{2}$$

$$R_m = c$$

$$m_M = \rho \pi R_m^2 h = \rho \pi 2c^3$$

$$I_M = \rho \pi c^5$$

- 2) Déterminer en fonction de ρ et c l'expression du moment d'inertie I_C de la couronne autour de l'axe de rotation $(O, \vec{x})$.



$$I_C = \frac{m_e R_e^2}{2} - \frac{m_i R_i^2}{2} = \rho \pi c^5 (10^4 - 8^4)$$

$$I_C = 5904 \rho \pi c^5$$

2^{ème} méthode

$$I_C = \int_{P \in (S)} (z^2 + y^2) dm = \int_{P \in (S)} r^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dx$$

$$I_C = \rho \int_{8c}^{10c} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-c}^c dx = \rho \frac{1}{4} R^4 2\pi H$$

$$I_C = 5904 \rho \pi c^5$$

3) Chaque bras est modélisé par un parallélépipède (on néglige les raccords entre le moyeu et le bras et la couronne) de dimension $(c, 7c, c)$, à chaque bras, on associe un repère local, $(O, \vec{x}, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, $\vec{y}_1, \vec{z}_1$ pour le bras (B1).

Déterminer en fonction de ρ et c l'expression du moment d'inertie I_{B1} du bras $B1$ par rapport à l'axe $(G_{B1}, \vec{x})$. G_{B1} est le centre d'inertie du bras $B1$.

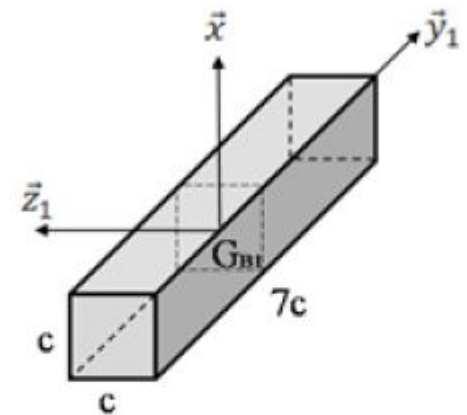
$$I_{B1} = \int_{P \in (S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$= \int_{P \in (S)} y^2 dm + \int_{P \in (S)} z^2 dm$$

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$I_{B1} = \int_{-c/2}^{c/2} dx \int_{-7c/2}^{7c/2} y^2 dy \int_{-c/2}^{c/2} dz + \int_{-c/2}^{c/2} dx \int_{-7c/2}^{7c/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz$$

$$I_{B1} = \rho \frac{350}{12} c^5$$



- 4) Déterminer en fonction de ρ et c l'expression du moment d'inertie I du volant autour de l'axe de rotation $(O, \vec{x})$.

$$I = I_M + I_C + 3I_B$$

$$I_B = I_{(bras1/(O,\vec{x}))}$$

$$I_{B1} = I_{(bras1/(G_{B1},\vec{x}))} = \frac{350}{12} \rho c^5$$

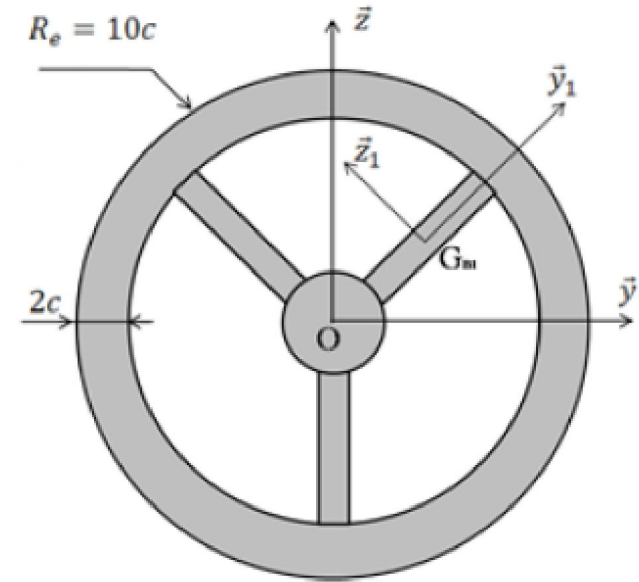
$$\overrightarrow{OG_{B1}} = \left(c + \frac{7}{2}c\right) \vec{y}_1 = \frac{9}{2}c \vec{y}_1$$

$$I_B = I_{B1} + m_{B1} \left(\frac{9}{2}c\right)^2$$

$$m_{B1} = \rho 7c^3$$

$$I_B = \frac{2051}{12} \rho c^5$$

$$I = 18722 \rho c^5$$



5) A.N. $c = 5\text{cm}$, $\rho = 7800\text{kg/m}^3$.

$$I = 45,63 \text{ kg m}^2$$

6) Déterminer la masse M du volant d'inertie .

$$M = M_m + M_c + 3M_B$$

$$M_m = 2\rho\pi c^3 = 6,13 \text{ Kg}$$

$$M_c = 2\rho\pi c^3(10^2 - 8^2) = 220,54 \text{ Kg}$$

$$M = 247 \text{ Kg}$$

$$M_B = 7\rho c^3 = 7,83 \text{ Kg}$$

7) Déterminer la masse du disque d'épaisseur $2c$ ayant le même moment d'inertie. Conclure.

Moment d'inertie d'un disque $I = \frac{mR^2}{2} = 45,63 \text{ kg m}^2$

$$m = \rho\pi 2cR^2 \quad I = 45,63 = \rho\pi cR^4 \quad \Rightarrow R = 0,44 \text{ m}$$

La masse de disque est :

$$m = 473 \text{ Kg}$$

Conclusion : On constate que pour un encombrement quasi-identique ($R=0,44 \text{ m}$ et $R_e = 0,5 \text{ m}$) la masse est presque doublée

Le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus important que la masse est éloignée de l'axe

Rappel Cinématique

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère R.

$\vec{\Omega}_{(S/R)}$ est le vecteur rotation du solide (S) par rapport au repère R.

Pour calculer la vitesse et l'accélération d'un point M du solide (S) par rapport à un repère R on peut utiliser trois méthodes:

Dérivation:

$$\vec{V}_{(M/R)} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R$$

$$\vec{\gamma}_{(M/R)} = \left. \frac{d\vec{V}_{(M/R)}}{dt} \right|_R$$

Cinématique:

$$\vec{V}_{(N/R)} = \vec{V}_{(M/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{MN}$$

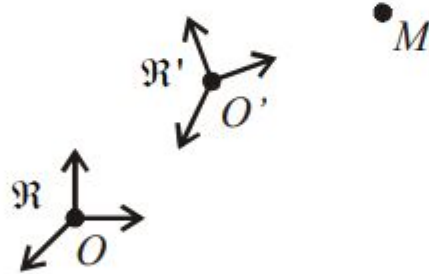
$$\forall M \text{ et } N \in (S)$$

$$\vec{\gamma}_{(N/R)} = \vec{\gamma}_{(M/R)} + \left. \frac{d\vec{\Omega}_{(S/R)}}{dt} \right|_R \wedge \overrightarrow{MN} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{MN})$$

Décomposition du mouvement:

On considère deux référentiels : $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel absolu et $\mathcal{R}' = (O', \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ référentiel relatif.

On est dans le cas le plus général.



- Le point M a pour coordonnées (x, y, z) dans le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

$$\underbrace{\vec{V}_{(M/R)}}_{\mathbf{Va}} = \underbrace{\vec{V}_{(M/R')}}_{\mathbf{Vr}} + \underbrace{\vec{V}_{(O'/R)} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\mathbf{Ve}}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$\vec{a}_a(M) = \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) + \vec{a}_r(M)$$

$$\underbrace{\vec{\gamma}_{(M/R)}}_{\mathbf{\gamma a}} = \underbrace{\vec{\gamma}_{(M/R')}}_{\mathbf{\gamma r}} + \underbrace{\vec{\gamma}_{(O'/R)} + \frac{d\vec{\Omega}_{(R'/R)}}{dt} \Big|_R \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge (\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{\mathbf{\gamma e}} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{(R'/R)} \wedge \vec{V}_{(M/R')}}_{\mathbf{\gamma c}}$$

Exercice :

Soient $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $R_1(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{k})$ le référentiel relatif dont l'origine O_1 est en mouvement rectiligne sur l'axe (Oz) . On donne

$\overrightarrow{OO_1} = at\vec{k}$ où a est une constante positive t est le temps.

En plus R_1 tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω_1 telle que

$\vec{\omega}_1(R_1/R) = \omega_1 \vec{k}$ ($\omega_1 = \dot{\theta}$). Dans le plan horizontal $(O_1, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$; une tige (T) tourne autour de

l'axe (O_1z) avec une vitesse angulaire constante ω_2 tel que $\varphi = \omega_2 t = (\vec{u}_1, \vec{e}_\rho)$

où $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par la tige (T) .

Un point M est assujéti à se déplacer sur la tige (T) . Il est repéré par $\overrightarrow{O_1M} = \rho \vec{e}_\rho$ où $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base mobile dans R_1

NB : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

1°- Déterminer $\vec{v}_r(M)$ le vecteur vitesse relative de M

2°- Déterminer $\vec{v}_e(M)$ le vecteur vitesse d'entraînement de M

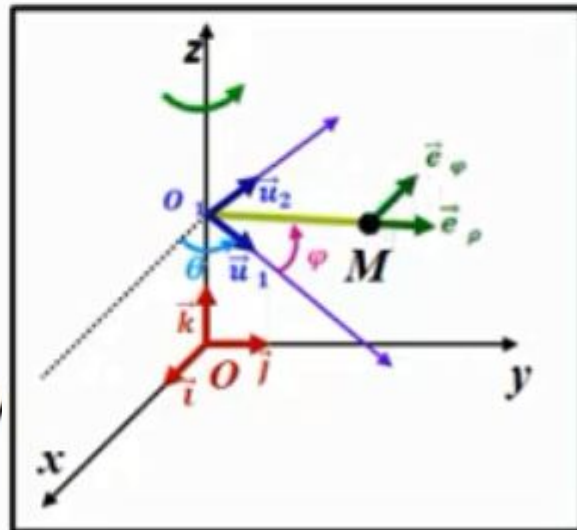
3°- Déduire $\vec{v}_a(M)$ le vecteur vitesse absolue de M

4°- Déterminer $\vec{a}_r(M)$ le vecteur accélération relative de M

5°- Déterminer $\vec{a}_e(M)$ le vecteur accélération d'entraînement de M

6°- Déterminer $\vec{a}_c(M)$ le vecteur accélération de Coriolis de M

7°- Déduire $\vec{a}_a(M)$ le vecteur accélération absolue de M

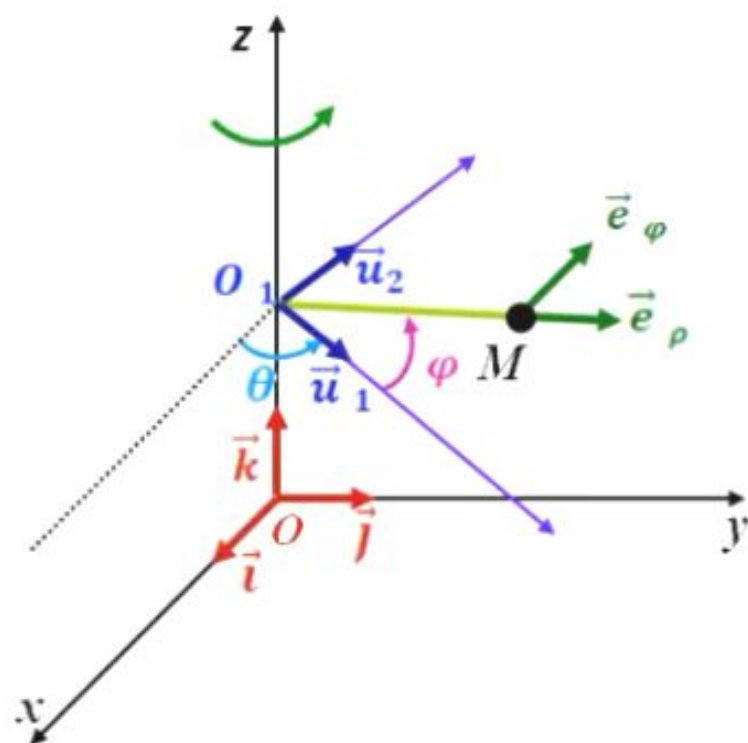


Le vecteur vitesse relative de M s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_r(M) &= \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\rho \vec{e}_\rho}{dt} \right|_{R_1} \\
 &= \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} \\
 &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\
 &= \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_2$$

$$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega_2 \vec{e}_\varphi$$

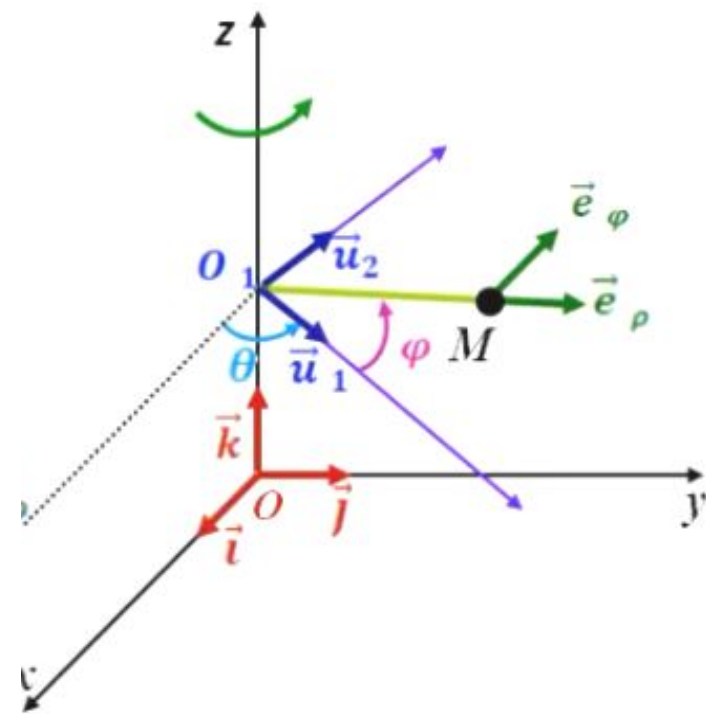
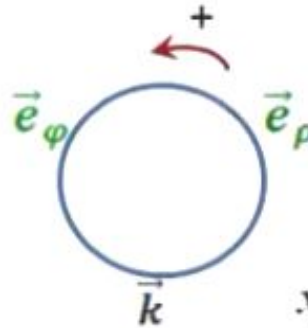


Le vecteur vitesse d'entraînement de M s'écrit:

$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{/R}(O_1) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M) &= \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} + \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \frac{da\vec{k}}{dt} + \omega_1 \vec{k} \wedge \rho \vec{e}_\rho\end{aligned}$$

$$\vec{V}_e(M) = a\vec{k} + \omega_1 \rho \vec{e}_\varphi$$



$$\vec{V}_r(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega_2 \vec{e}_\varphi$$

Le vecteur vitesse absolue de M est donc :

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega_2 \vec{e}_\varphi + a\vec{k} + \omega_1 \rho \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V}_a(M) := \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho(\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi + a\vec{k}$$

Le vecteur accélération relative de M s'écrit:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_r(M) &= \frac{d\vec{V}_r(M)}{dt} \Big|_{R_1} = \frac{d(\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)}{dt} \Big|_{R_1} \\
 &= \frac{d\dot{\rho}}{dt} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\
 &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho \\
 &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi
 \end{aligned}$$

$$\ddot{\varphi} = 0 = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} = cte$$

$$\vec{a}_r(M) = (\ddot{\rho} - \rho \omega_2^2) \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} \omega_2 \vec{e}_\varphi$$

Le vecteur accélération d'entraînement de M s'écrit:

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} \Big|_R + \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$= \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2} \Big|_R + \frac{d\omega_1 \vec{k}}{dt} \wedge \rho \vec{e}_\rho + \omega_1 \vec{k} \wedge (\omega_1 \vec{k} \wedge \rho \vec{e}_\rho)$$

$$= \frac{d\omega_1 \vec{k}}{dt} + \rho \omega_1^2 \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho) = \rho \omega_1^2 \vec{k} \wedge \vec{e}_\varphi = -\rho \omega_1^2 \vec{e}_\rho$$

$$\boxed{\vec{a}_e(M) = -\rho \omega_1^2 \vec{e}_\rho}$$

Le vecteur accélération de Coriolis de M s'écrit:

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{V}_r = 2\omega_1 \vec{k} \wedge (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \omega_2 \vec{e}_\varphi)$$

$$\vec{a}_c(M) = 2\omega_1 \dot{\rho} \vec{e}_\varphi - 2\rho \omega_1 \omega_2 \vec{e}_\rho$$

Le vecteur accélération absolue de M est donc :

$$\begin{aligned}\vec{a}_a(M) &= \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M) \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \omega_2^2) \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho} \omega_2 \vec{e}_\varphi - \rho \omega_1^2 \vec{e}_\rho + 2\omega_1 \dot{\rho} \vec{e}_\varphi - 2\rho \omega_1 \omega_2 \vec{e}_\rho \\ &= [\ddot{\rho} - \rho(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2)] \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\vec{a}_a(M) = [\ddot{\rho} - \rho(\omega_1 + \omega_2)^2] \vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}(\omega_1 + \omega_2) \vec{e}_\varphi$$