

Chapitre 2

Cinétique

2.1 Principe de la conservation de la masse

2.1.1 Définition

Un ensemble matériel vérifie le principe de la conservation de la masse si tout sous-ensemble matériel (s) de l'ensemble matériel (S) a une masse constante au cours du temps.

2.1.2 Conséquence du principe de conservation de la masse

Soit (S) un ensemble matériel en mouvement par rapport à un repère R. Soit $\vec{h}(P, t)$ un champ de vecteurs défini, à chaque date t , en tout point P de (S) relativement à la masse dm du point P considéré.

La résultante générale du torseur associé à ce champ de vecteurs est :

$$\int_{P \in S} \vec{h}(P, t) dm$$

Si on suppose la fonction continûment différentiable par rapport à la variable t et compte tenu du principe de conservation de la masse, nous pouvons donc écrire ;

$$\frac{d}{dt} \int_{P \in S} \vec{h}(P, t) dm = \int_{P \in S} \frac{d\vec{h}(P, t)}{dt} dm$$

Dans la suite, nous utiliserons cette relation avec des vecteurs positions, vitesses, etc...

2.2 Torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement

Soit un ensemble matériel (S) de masse m , de centre de masse G , en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

2.2.1 Définition

Le torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement) de l'ensemble matériel (S) dans son mouvement par rapport à R en un point A quelconque de l'espace est le suivant :

$$\{C_{(S/R)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}(S/R) \\ \vec{\sigma}_A(S/R) \end{array} \right\}_A$$

- $\vec{P}(S/R)$ est la résultante cinétique ou la quantité du mouvement de (S) par rapport à R :

$$\vec{P}(S/R) = \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) dm$$

- $\vec{\sigma}_A(S/R)$ est le moment cinétique au point A de (S) par rapport à R :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

Remarque : La relation de changement de point du moment cinétique est : $\forall A$ et $\forall B$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{P}(S/R) \wedge \vec{AB}$$

2.2.2 Expression de la résultante cinétique

La position de centre d'inertie G d'un ensemble matériel (S) est donnée par :

$$m\vec{OG} = \int_{P \in (S)} \vec{OP} dm$$

Dérivons les deux membres de cette égalité par rapport à t , dans la base de R :

$$\frac{d}{dt} [m\vec{OG}]_R = \frac{d}{dt} \left[\int_{P \in (S)} \vec{OP} dm \right]_R$$

Compte tenu du principe de la conservation de la masse et de sa conséquence, on a :

$$m \frac{d\vec{OG}}{dt} \Big|_R = \int_{P \in (S)} \frac{d\vec{OP}}{dt} \Big|_R dm$$

Soit :

$$m \vec{V}(G/R) = \int_{P \in (S)} \vec{V}(P/R) dm$$

La résultante cinétique s'écrit donc :

$$\vec{P}(S/R) = m \vec{V}(G/R)$$

2.2.3 Expression du moment cinétique

Pour tout point A le moment cinétique du mouvement de (S) par rapport à R est défini par :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

a) Cas où A est un point de (S)

$\forall P \in (S)$ on a :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A(S/R) &= \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \left(\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right) dm \\ &= \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{V}(A \in S/R) dm + \int_{P \in (S)} \vec{AP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right) dm \end{aligned}$$

On remarque que la deuxième intégrale représente l'opérateur d'inertie de solide (S) au point A associé au vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$, d'où :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \left(\int_{P \in (S)} \vec{AP} dm \right) \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R))$$

Ce qui fait apparaître la matrice d'inertie dans l'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + [I_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Cas particuliers :

— A est un point fixe par rapport à R :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = [I_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

— (S) animé d'un
mvt de translation / R.

— A est confondu avec le centre d'inertie :

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [I_G(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

$$\vec{G}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)$$

b) Cas où A n'est pas un point de (S)

Premier théorème de Koëning : Soit un ensemble matériel (S) de masse m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $R^*(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère du centre d'inertie tel que $\vec{\Omega}(R^*/R) = \vec{0}$.

Le moment cinétique par rapport au repère de référence R est égal au moment cinétique calculé dans le repère du centre de masse R^* augmenté de la quantité $\vec{P}(S/R) \wedge \vec{GA}$:

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R^*) + \vec{P} \wedge \vec{GA}$$

Démonstration

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

la décomposition du mouvement du vecteur vitesse conduit à :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R^*) dm + \int_{P \in (S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in R^*/R) dm$$

On introduit ensuite G :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A(S/R) &= \overrightarrow{AG} \wedge \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R^*) dm + \overrightarrow{AG} \wedge \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in R^*/R) dm \\ &+ \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{V}(P \in S/R^*) dm + \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{V}(P \in R^*/R) dm \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in S/R^*) dm &= m \vec{V}(G \in S/R^*) = \vec{0} \\ \int_{P \in (S)} \vec{V}(P \in R^*/R) dm &= m \vec{V}(G \in R^*/R) \\ \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{V}(P \in S/R^*) dm &= \vec{\sigma}_G(S/R^*) \\ \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} \wedge \vec{V}(P \in R^*/R) dm &= \int_{P \in (S)} \overrightarrow{GP} dm \wedge \vec{V}(G \in R^*/R) = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R^*) + m \vec{V}(G \in R^*/R) \wedge \vec{GA}$$

2.2.4 Torseur cinétique d'un système composé de n solides

Considérons un système matériel (S) composé de n solides S_i ($i = 1 \dots n$) de masse m_i et de centre d'inertie G_i . Le torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R en un point A quelconque de l'espace est défini par :

$$\{C_{(S/R)}\}_A = \sum_{i=1}^n \{C_{(S_i/R)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(G_i/R) \\ \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_A(S_i/R) \end{array} \right\}_A$$

2.2.5 Application

Une nacelle élévatrice est un engin de chantier servant à faciliter le transport des produits à une zone de travail en hauteur.

Les principaux composants de la nacelle sont :

- Un châssis (S_0) fixe au sol. On lui attache un repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Un bras inférieur (S_1) en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec le châssis (S_0) . On attache au solide (S_1) le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$. On pose $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $\vec{OA} = L\vec{x}_1$.
- Un bras supérieur (S_2) en liaison glissière parfaite d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec le bras (S_1) . On attache au solide (S_2) le repère $R_2(P, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{OP} = \lambda\vec{x}_1$.

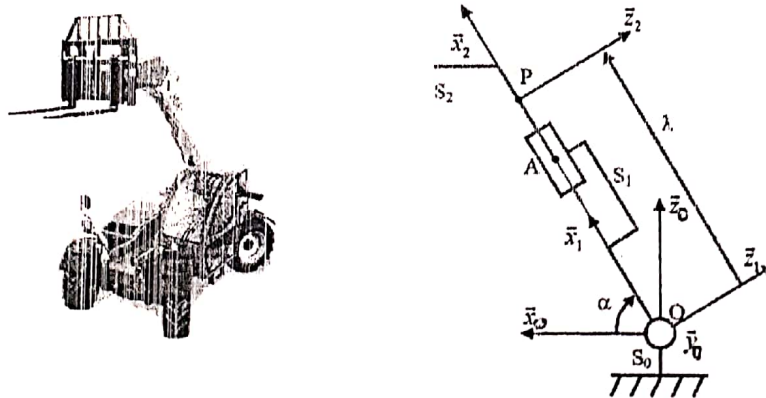


FIGURE 2.1 – Nacelle élévatrice

Les caractéristiques d'inertie du système sont :

- Bras (S_1) : Masse m_1 , centre d'inertie G_1 tel que $\vec{OG}_1 = a\vec{x}_1$ et moment principal d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{y}_0)$.
- Bras (S_2) : Masse m_2 , centre d'inertie G_2 tel que $\vec{PG}_2 = a\vec{x}_1 + b\vec{z}_1$.

Matrice d'inertie :

$$[I_P(S_2)] = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)}$$

Le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ est un plan de symétrie matériel.

Questions :

- 1) Déterminer le torseur cinétique de (S_1) par rapport à (R_0) au point O .
- 2) Déterminer le torseur cinétique de (S_2) par rapport à (R_0) au point P .
- 3) Déterminer le torseur cinétique de l'ensemble $(S) = \{S_1 + S_2\}$ par rapport à (R_0) au point O .

2.3 Torseur dynamique

On considère un ensemble matériel (S) , de masse m et de centre de masse G , en mouvement par rapport à un repère R .

2.3.1 Définition

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel (S) dans son mouvement par rapport à un repère R , en un point A quelconque de l'espace, est le suivant :

$$\{\mathcal{D}_{(S/R)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathcal{A}} \\ \vec{\delta}_A(S/R) \end{array} \right\}_A$$

- $\vec{\mathcal{A}}$ est la résultante dynamique du mouvement de (S) par rapport à R :

$$\vec{\mathcal{A}} = \int_{P \in S} \vec{\gamma}(P \in S/R) dm$$

- $\vec{\delta}_A(S/R)$ est le moment dynamique au point A de (S) par rapport à R :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P \in S/R) dm$$

Remarque : La relation de changement de point du moment dynamique est : $\forall A$ et $\forall B$

$$\vec{\delta}_B(S/R) = \vec{\delta}_A(S/R) + \vec{\mathcal{A}} \wedge \vec{AB}$$

2.3.2 Expression de la résultante dynamique

L'expression de la résultante dynamique est obtenue par dérivation de la résultante cinétique :

$$\frac{d}{dt} [\vec{P}(S/R)]_R = \frac{d}{dt} \left[\int_{P \in S} \vec{V}(P/R) dm \right]_R = \frac{d}{dt} [m \vec{V}(G/R)]_R$$

Compte tenu du principe de la conservation de la masse et de sa conséquence, on a :

$$\int_{P \in S} \frac{d}{dt} [\vec{V}(P/R)]_R dm = m \frac{d}{dt} [\vec{V}(G/R)]_R$$

Soit :

$$\int_{P \in S} \vec{\gamma}(P/R) dm = m \vec{\gamma}(G/R)$$

La résultante dynamique s'écrit donc :

$$\vec{\mathcal{A}} = m \vec{\gamma}(G/R)$$

2.3.3 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

Pour trouver l'expression du moment dynamique on commence par la dérivation du moment cinétique :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \right]_R$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse et de sa conséquence, on a :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R &= \int_{P \in S} \frac{d\vec{AP}}{dt} \Big|_R \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \Big|_R dm \\ &= \int_{P \in S} \left(\vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R) \right) \wedge \vec{V}(P/R) dm + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R) dm \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/R) dm &= \vec{\delta}_A(S/R) \\ \int_{P \in S} \left(\vec{V}(P/R) - \vec{V}(A/R) \right) \wedge \vec{V}(P/R) dm &= -\vec{V}(A/R) \wedge \int_{P \in S} \vec{V}(P/R) dm \end{aligned}$$

et

$$\int_{P \in S} \vec{V}(P/R) dm = m \vec{V}(G/R)$$

D'où la relation entre le moment dynamique et le moment cinétique :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R + m \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

Cas particuliers

— Le point A est fixe dans R :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R$$

— Le point A est confondu avec le centre d'inertie G :

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R) \right]_R$$

— $\vec{V}(A/R)$ et $\vec{V}(G/R)$ sont colinéaires :

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(S/R) \right]_R$$

2.3.4 Torseur dynamique d'un système composé de n solides

Considérons un système matériel (S) composé de n solides S_i ($i = 1 \dots n$) de masse m_i et de centre d'inertie G_i . Le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à R en un point A quelconque de l'espace est défini par :

$$\{\mathcal{D}_{(S/R)}\}_A = \sum_{i=1}^n \{\mathcal{D}_{(S_i/R)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{i=1}^n m_i \vec{\gamma}(G_i/R) \\ \sum_{i=1}^n \vec{\delta}_A(S_i/R) \end{array} \right\}_A$$

2.3.5 Application : Centrifugeuse humaine

On s'intéresse à une centrifugeuse humaine dont on donne une description structurelle ainsi que la modélisation cinématique.

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au bâti (0) de la centrifugeuse, l'axe repère $(O, \vec{z})$ est dirigé suivant la verticale descendante.

Le bras (1) a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (0). Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ un repère lié au bras (1). On pose : $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ avec $\alpha = \omega t$, où ω est une constante positive.

La cabine (2) a une liaison pivot d'axe $(A, \vec{y}_1)$ avec le bras (1), telle que $\vec{OA} = a\vec{x}_1$ (a est une constante positive). Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ un repère lié à la cabine (2). On pose $\beta = (\vec{z}, \vec{z}_2)$.

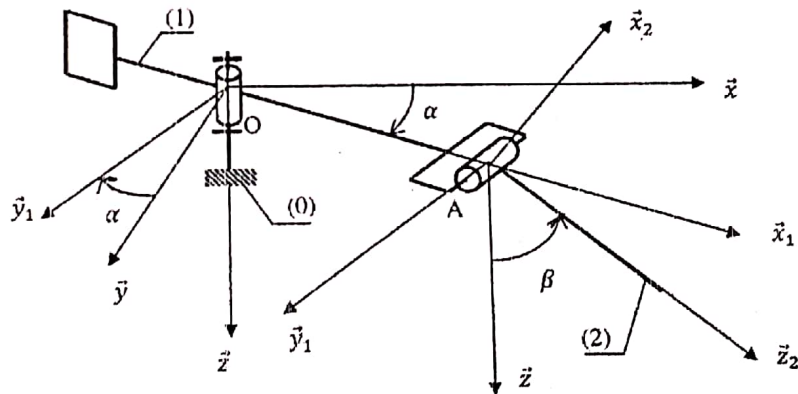
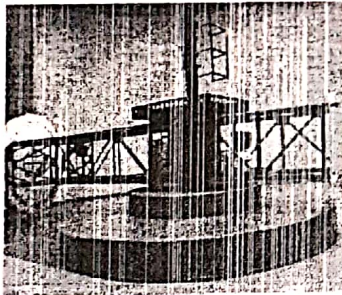


FIGURE 2.2 – Centrifugeuse humaine

Caractéristiques d'inertie :

- Bras (1) : Moment d'inertie I par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$.
- Cabine (2) : Centre d'inertie G , tel que $\vec{AG} = b\vec{z}_2$ (b constante positive),

masse m ,

matrice d'inertie, au point A , dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$

$$[I_A(2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)}$$

Questions :

- 1) Déterminer le moment cinétique, au point A , de la cabine (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- 2) Déterminer la projection sur $\vec{y}_1$ du moment dynamique, au point A , de la cabine (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0).
- 3) Déterminer la projection sur $\vec{z}$ du moment dynamique, au point O , de l'ensemble des deux solides (1) et (2) dans leur mouvement par rapport au bâti (0).



calculer le moment cinétique $\vec{L}_A(2)$

(5.4) calculer le moment cinétique $\vec{L}_A(2)$

calculer le moment cinétique $\vec{L}_O(1,2)$

10-10704 - 21/09/91

PC

2.4 Energie cinétique

2.4.1 Définition

L'énergie cinétique du système matériel (S) dans son mouvement par rapport à un repère R est le scalaire positif suivant :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\vec{V}(P/R) \right)^2 dm$$

2.4.2 Expression de l'énergie cinétique d'un solide

Soit un solide (S) de masse m , de centre d'inertie G , en mouvement par rapport à un repère R . Soit A un point qui appartient au solide (S) , on définit le torseur cinématique de (S) au point A dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\{\vartheta_{(S/R)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}_A$$

CHAPITRE 2. CINÉTIQUE

Soit P un point qui appartient à (S) , on définit le vecteur vitesse de P par rapport au repère R par la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP}$$

L'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère R est par définition :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\vec{V}(P \in S/R) \right)^2 dm = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) \cdot \vec{V}(P \in S/R) dm$$

Remplaçons le premier vecteur vitesse par son expression en fonction du vecteur vitesse de A :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right) \cdot \vec{V}(P \in S/R) dm$$

On obtient deux intégrales :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) dm + \frac{1}{2} \int_{P \in S} \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AP} \right) \cdot \vec{V}(P \in S/R) dm$$

La deuxième intégrale est un produit mixte. La permutation circulaire conduit à l'expression suivante :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) dm + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

Dans cette expression apparaissent les deux éléments de réduction du torseur cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à R au point A , ainsi que les deux éléments de réduction au point A du torseur cinématique du mouvement de (S) par rapport à R .

Par conséquent, l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à R est égale aux $1/2$ du produit de son torseur cinétique par son torseur cinématique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{(S/R)} \}_A \cdot \{ \vartheta_{(S/R)} \}_A$$

Le produit entre deux torseurs est un invariant scalaire qui ne dépend pas du point. On peut choisir un point A qui appartient à (S) , d'où l'expression de l'énergie cinétique :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \left[m \vec{V}(G/R) \cdot \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R) \right]$$

On peut aussi choisir le centre d'inertie I

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \left[m \left(\vec{V}(G/R) \right)^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{J}_G(S/R) \right]$$

Cas particuliers

— Cas d'un solide animé d'un mouvement de translation par rapport au repère R :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}(G/R) \right)^2$$

— Cas d'un solide animé d'un mouvement de rotation par rapport à un axe fixe au repère R :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Avec I est le moment d'inertie de solide (S) par rapport à l'axe de rotation et ω est la vitesse angulaire de solide (S) par rapport à R .

2.4.3 Energie cinétique d'un système composé de n solides

Considérons un système matériel (S) composé de n solides S_i ($i = 1 \dots n$) de masse m_i et de centre d'inertie G_i . L'énergie cinétique du système matériel (S) dans son mouvement par rapport à R est défini par :

$$E_c(S/R) = \sum_{i=1}^n E_c(S_i/R)$$

2.4.4 Application : système bielle manivelle

On s'intéresse à un système bielle manivelle dont on une modélisation cinématique.

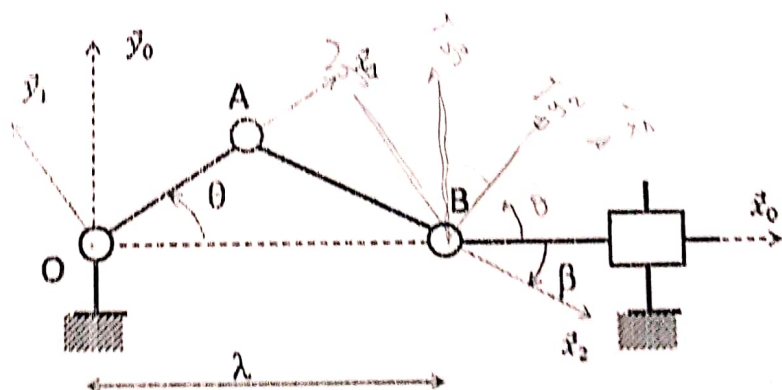
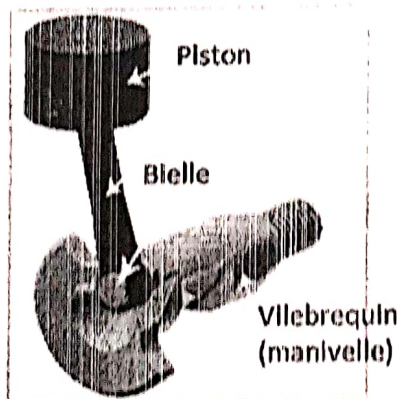


FIGURE 2.3 – Système bielle manivelle

Rappel pour la Statique des solides:

- La statique des corps indéformables consiste à l'étude mécanique des systèmes solides au repos ou en équilibre (c.à.d. ayant un déplacement, une vitesse, et une accélération nuls) indépendamment du temps.

Modélisation des actions mécaniques:

Nous appelons action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos ou de créer un mvt ou de déformer un corps.

On distingue 2 sortes d'action mécanique:

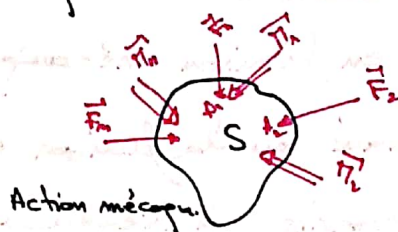
- action mécanique à distance (champ de pesanteur)
- action mécanique de contact



On peut avoir des actions mécaniques dites extérieures et des actions mécaniques dites intérieures à un ensemble de corps.

Premier principe de la statique:

Toute action mécanique est entièrement caractérisée d'un pt de vue mécanique par un torseur.



Action mécanique.

On caractérise d'une façon globale cette action mécanique à l'aide de

deux vecteurs suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ M_P(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i + \sum_{i=1}^n \vec{PA}_i \wedge \vec{F}_i \end{array} \right.$$

→ Torseur d'action mécanique (Torseur statique):

$$\left\{ \mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(1/2) \rightarrow \text{Force} \\ \vec{\Pi}_A(1/2) \rightarrow \text{Moment} \end{array} \right.$$

• $\vec{F}(1/2)$: est la résultante générale du torseur.

• $\vec{\Pi}(1/2)$: est le moment résultant au pt A. du torseur.

→ Relation de changement de pt: $\vec{M}_B(1/2) = \vec{M}_A(1/2) + \vec{r}_{AB} \wedge \vec{F}$

• Modélisation d'une force:

Soit un système matériel soumis à une force $\vec{F}$ appliquée au pt A.

on définit le moment de cette force en un pt q1 B par $\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{r}_{AB} \wedge \vec{F}$

$$\Rightarrow \{T\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{r}_{AB} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{AB} \wedge \vec{F}$$

cas particulier:

$$\{T\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\} : \text{torseur glisseur}$$

• Modélisation d'un couple:

Un couple est une action caractérisée par deux forces //, de même module et de sens $\neq$. On modélise un couple appliqué sur un

système matériel par un torseur suivant:

$$\{T\}_\pi = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{\vec{0}}{C} \end{array} \right\} \forall \pi : \text{torseur couple.}$$

• Modélisation des actions de la liaison:

Soit deux solides S_1 et S_2 en liaison mécanique sans frottement.

Soit $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un R.O.D, placé sur la liaison entre S_1 et S_2 .

On écrit le torseur par ses éléments de réduction au centre de la

liaison de la façon suivante: force $\vec{F}$ moment $\vec{M}$

$$\{T(S_1 \rightarrow S_2)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{array} \right\}$$

Dans le tableau suivant, on donne les torseurs transmissibles. pour des

liaisons normalisées parfaites

• Modélisation plane en statique:

Un problème de statique est plan si:

- tous les efforts sont dans le plan.
- tous les moments sont normaux au plan.

Simplification des torseurs

$$\left\{ \tau_{(S_1|S_2)} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(S_1|S_2) \\ \vec{M}_A(S_1|S_2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} X & \cancel{Z} \\ Y & \cancel{M} \\ \cancel{Z} & N \end{array} \right\}$$

ex: $(A, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie

c'est le cas si la géométrie est symétrique p. à un plan et si le chargement est plan.

• Principe fondamental de la statique:

Pour un système matériel E soit en éq. p. à un repère galiléen il faut que le torseur des actions mécaniques extérieures à E soient nuls. Si on note $\vec{E}$ l'extérieur de E, le PFS s'écrit:

$$\left\{ \tau_{(\vec{E} \rightarrow E)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \forall A.$$

$\Rightarrow$ théorème de la résultante statique $\vec{R}(\vec{E} \rightarrow E) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ théorème du moment statique $\vec{M}_A(\vec{E} \rightarrow E) = \vec{0}$.

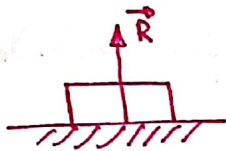
théorème des actions mutuelles:

4 sous ensembles E_1 et E_2 d'un ensemble matériel E en éq. / à un repère, le torseur des actions mécaniques de $(E_1 \rightarrow E_2)$ est opposé au torseur des actions mécaniques de $(E_2 \rightarrow E_1)$

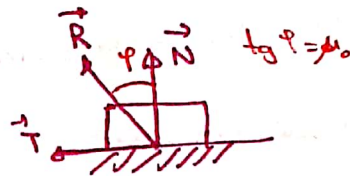
$$E \text{ en éq.} \Rightarrow \left\{ \mathcal{T}(E_1 \rightarrow E_2) \right\} = - \left\{ \mathcal{T}(E_2 \rightarrow E_1) \right\}$$

Liaisons des solides.

① liaison sans frottement



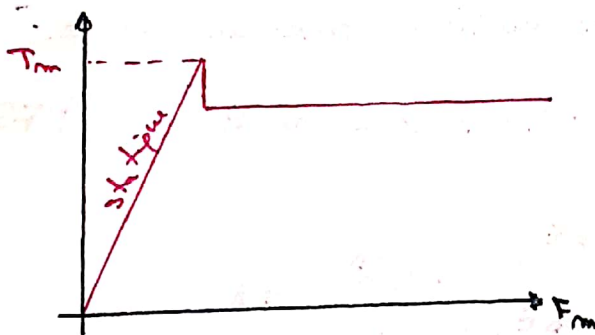
② liaison avec frottement et



$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD} (210) = \overrightarrow{JD} (120) \wedge \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{T} = \vec{R}_T = \vec{f}$$

Coef de frottement statique μ_0

$$\mu = \frac{\|\vec{T}_m\|}{\|\vec{N}\|}$$



$$\vec{T} = \mu_0 \vec{N}$$

Si $F > T_m$

$\Rightarrow$ le solide se met en mouvement de glissement sur le plan $T = T_R$.

et on définit le coef de frottement dynamique $\mu = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = \text{tg } \varphi$.

Dans le tableau suivant, on donne les torseurs transmissibles par des liaisons normalisées parfaites.

Nom de la liaison	Représentations	Torseur cinématique	Torseur transmissible de liaisons statique.
Liaison encastrement de centre B		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & \Pi \\ Z & M \end{Bmatrix}$
Liaison glissière de centre A et d'axe X		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & \Pi \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Liaison pivot de centre A et d'axe X		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & \Pi_{12} \\ Z_{12} & M_{12} \end{Bmatrix}$
Liaison Pivot Glissant de centre C et d'axe X		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & \Pi \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Liaison hélicoïdale de centre B et d'axe Y de pas $p = \frac{p_{00}}{2\pi}$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & -p Y_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$
Liaison Appui Plan de centre D et de normale Z		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & \Pi \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Liaison rotule de centre O		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Liaison linéaire annulaire de centre B et d'axe X		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Liaison linéique rectiligne de centre C, d'axe X et de normale Z		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Liaison ponctuelle de centre O et de normale Z		$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$

- Une action mécanique est transmissible lorsque le degré de liberté est bloqué
- Si on compare le torseur des actions mécaniques d'une liaison sans frottement avec un torseur cinématique on constate que le Π de ces deux torseurs est nul.

La dynamique est l'étude du mouvement des solides avec leur masse et inertie en relation avec les causes de ce mouvement (actions mécaniques extérieures).

3.1 Principe Fondamental de la Dynamique

Il existe un référentiel galiléen noté $\mathcal{R}_g$, tel qu'à tout instant, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur un système matériel Σ est égal au torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$. Cette définition se traduit par l'égalité suivante :

$$\exists \mathcal{R}_g / \forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \right\}_A \iff \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{A}}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/\mathcal{R}_g) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \end{array} \right\}_A$$

- * $\vec{\mathcal{A}}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)}$: résultante dynamique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$;
- * $\vec{\delta}_A(\Sigma/\mathcal{R}_g)$: moment dynamique en A du système matériel Σ dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$;
- * $\vec{\mathcal{R}}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = \int_{P \in \Sigma} d\vec{F}_{(\bar{P} \rightarrow P)}$: résultante des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ où $d\vec{F}_{(\bar{P} \rightarrow P)}$ représente les actions mécaniques élémentaires appliquées sur le point P de Σ ;
- * $\vec{\mathcal{M}}_{A(\Sigma \rightarrow \Sigma)} = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge d\vec{F}_{(\bar{P} \rightarrow P)}$: moment résultant en A des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ .

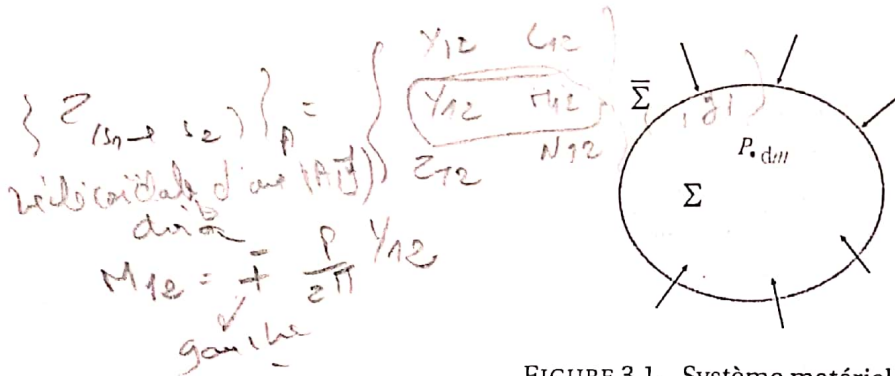


FIGURE 3.1 – Système matériel Σ isolé

3.2 Théorèmes généraux de la Dynamique

Le principe fondamental de la dynamique est une égalité entre deux torseurs $\Rightarrow$ leurs résultantes sont égales et leurs moments en un même point sont égaux. Les deux égalités vectorielles obtenues sont les deux théorèmes généraux de la dynamique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{A}}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathcal{R}}_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/\mathcal{R}_g) = \vec{\mathcal{M}}_{A(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \end{array} \right.$$

Soit un système matériel Σ de masse m_Σ et de centre d'inertie G_Σ en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_g$.

3.4 Cas particulier de la statique

Lorsque le torseur dynamique d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_g$ est nul, le principe fondamental de la dynamique se ramène alors à celui de la statique.

$$\forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \{0\} \Rightarrow \left\{ \tau_{(\Sigma \rightarrow \Sigma)} \right\}_A = \{0\}$$

Ce torseur dynamique est nul en particulier dans les trois cas suivants :

- * la masse du système matériel Σ est supposée nulle ;
- * les effets d'inertie sur le système matériel Σ sont négligés ;
- * le système matériel Σ est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_g$.

3.5 Utilisation du P.F.D ?

L'application du principe fondamental de la dynamique dans l'espace nous donne, pour chaque solide isolé, en maximum six équations scalaires (3 pour les projections du théorème de la résultante et 3 pour les projections du théorème du moment). On retrouve dans ces équations :

- * les paramètres de positions (connus et/ou inconnus) ;
- * les dérivées premières et secondes de ces paramètres ;
- * les composantes d'actions mécaniques (connues et/ou inconnues) ;
- * les données du problèmes (géométriques, inerties).

L'utilisation de ces équations conduit à la résolution de deux types de problèmes :

- * détermination d'une loi de mouvement ;
- * détermination d'actions mécaniques.

Handwritten notes and diagrams:

- A diagram showing a vector $\vec{r}$ from a point to a point on a curve, with a derivative $\frac{d\vec{r}}{dt}$ indicated.
- Equation: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$
- Equation: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$
- Equation: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

3.5.1 Détermination d'une loi de mouvement (équation de mouvement)

Les actions mécaniques extérieures étant connues, il s'agit de déterminer des lois de mouvement pour les différents solides du système sous forme d'équations différentielles. Ceci correspond à l'étude de dimensionnement d'un actionneur (choix d'un moteur ou d'un vérin).

On appelle équation de mouvement, une équation différentielle du second ordre entre les paramètres de mouvement et les actions mécaniques extérieures ne faisant pas intervenir les inconnues liaisons.

Pour établir cette équation de mouvement, il n'est pas forcément nécessaire d'étudier et de résoudre tous les systèmes d'équations. Le plus souvent, on développe une seule équation par isolement.

3.5.2 Détermination d'actions mécaniques

Le mouvement étant imposé par le cahiers des charges, il s'agit donc soit de déterminer les actions mécaniques au niveau des liaisons (dimensionnement des liaisons) ou de dimensionner un élément (étude de résistance des matériaux). Dans ce cas, il faut écrire au minimum toutes les équations correspondants aux liaisons à déterminer.

3.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$, la résultante dynamique est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ .

$$\vec{\mathcal{A}}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathcal{R}}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \iff m_{\Sigma} \cdot \vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathcal{R}}_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}$$

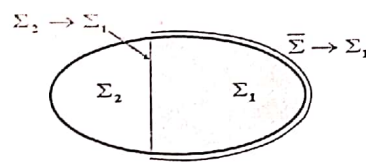
3.2.2 Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}_g$, le moment dynamique en un point A est égale au moment résultant en A des actions mécaniques extérieures appliquées sur Σ .

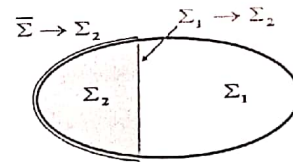
$$\forall A : \vec{\delta}_{A(\Sigma/\mathcal{R}_g)} = \vec{\mathcal{M}}_{A(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}$$

3.3 Théorème des actions réciproques

Soit un système matériel Σ composé en deux parties Σ_1 et Σ_2 quelconques mais disjointes (figure 3.2) $\Rightarrow \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ et $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$.



(a) Description de $\overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1$



(b) Description de $\overline{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2$

FIGURE 3.2 – Système matériel Σ

* on applique le principe fondamental de la dynamique à Σ_1 (figure 3.2a) $\Rightarrow$

$$\forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma_1/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A + \left\{ \tau_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A \quad (1)$$

* on applique le principe fondamental de la dynamique à Σ_2 (figure 3.2b) $\Rightarrow$

$$\forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma_2/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A + \left\{ \tau_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A \quad (2)$$

* on applique le principe fondamental de la dynamique à Σ $\Rightarrow$

$$\forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\}_A = \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A + \left\{ \tau_{(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A \quad (3)$$

Or : $\left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/\mathcal{R}_g)} \right\}_A = \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma_1/\mathcal{R}_g)} \right\}_A + \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma_2/\mathcal{R}_g)} \right\}_A$, donc (1) + (2) - (3) $\Rightarrow$

$$\forall A : \left\{ \tau_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A = - \left\{ \tau_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A$$

D'où l'énoncé du théorème des actions réciproques :

Soient deux systèmes matériels quelconques Σ_1 et Σ_2 disjointes. Le torseur des actions mécaniques exercées par Σ_1 sur Σ_2 est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par Σ_2 sur Σ_1 .

3.5.3 Exemple : Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'une tige homogène (1) de masse m , de longueur l et de centre d'inertie G (figure 3.3).

Soit $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct lié au bâti (0). La tige (1), à la quelle est attaché le repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$, a une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$ avec le bâti (0) tel que $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$.

Question : Ecrire les équations scalaires qui découlent de l'application du principe fondamental de la dynamique à la tige (1) dans son mouvement par rapport à (0). En déduire son équation de mouvement.

Réponse : PFD appliqué à (1) dans son mouvement par rapport à (0) au point O $\Rightarrow$

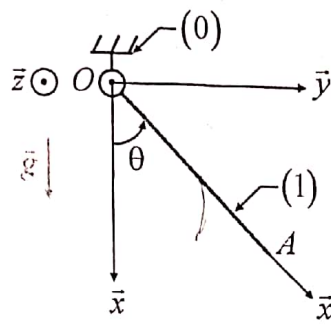


FIGURE 3.3 – Pendule simple

$$\{\mathcal{D}_{(1/0)}\}_O = \{\tau_{(1 \rightarrow 1)}\}_O$$

$$\bar{1} = \{(0), \vec{g}\} :$$

* le torseur associé à la liaison pivot parfaite entre (1) et (0) au point O est :

$$\{\tau_{(0 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad (B_1)$$

* le torseur associé à l'action de la pesanteur est :

$$\{\tau_{(\vec{g} \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} mg & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_0} = \begin{Bmatrix} mg \cos \theta & 0 \\ -mg \sin \theta & 0 \\ 0 & -mg \frac{l}{2} \sin \theta \end{Bmatrix}_{O_1}$$

Handwritten notes:
 $\vec{r} = mg \cos \theta \vec{x}_1 - mg \sin \theta \vec{y}_1$
 $\vec{M}_O = d\vec{L}(G) = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m \vec{v}_G$
 $\vec{M}_O = mgy_G - mgy_G \dot{\theta} \vec{z}$

Or, d'après le chapitre 2 : pendule simple, le torseur dynamique, au point O, de la tige (1) dans son mouvement par rapport à (0) est :

$$\{\mathcal{D}_{(1/0)}\}_O = \begin{Bmatrix} m \frac{l}{2} \cdot (\ddot{\theta} \vec{y}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{x}_1) \\ m \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Par conséquent :

* le théorème de la résultante dynamique conduit aux deux équations suivantes :

$$X_{01} = -m \frac{l}{2} \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta \quad (1)$$

$$Y_{01} = m \frac{l}{2} \ddot{\theta} + mg \sin \theta \quad (2)$$

* le théorème du moment dynamique conduit à l'équation suivante :

$$m \frac{l^2}{3} \ddot{\theta} = -mg \frac{l}{2} \sin \theta \quad (3)$$

L'équation (3) permet d'écrire l'équation de mouvement de la tige par rapport au bâti :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0$$

3.6 Application du P.F.D : Equilibrage d'un solide

L'équilibrage est un problème souvent rencontré lors de la conception de systèmes animés de vitesses de rotation élevées (roue de véhicule, rotor d'hélicoptère, etc.). Un déséquilibre de la répartition de la masse par rapport à l'axe de rotation peut entraîner des vibrations parasites néfastes qui conduisent à la détérioration précoce des paliers et créent une gêne pour l'utilisateur (bruits, etc.) $\Rightarrow$ L'objet de l'équilibrage est de supprimer ces vibrations.

Dans ce qui suit, nous allons mettre en évidence le problème d'équilibrage, définir les notions d'équilibrages statique et dynamique et étudier un exemple classique d'équilibrage.

3.6.1 Mise en évidence du problème d'équilibrage

3.6.1.1 Hypothèses et paramétrage

Soit $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère galiléen lié au bâti (S_0). Soit un solide (S_1) de masse m , auquel est lié le repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0) tel que $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ (figure 3.4).

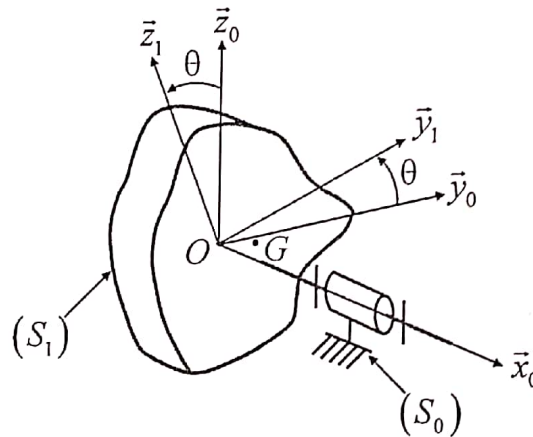


FIGURE 3.4 – Modélisation du problème d'équilibrage

Ce solide ne présente aucun élément de symétrie matérielle, sa matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est de la forme :

$$[I_O(S_1)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Le centre d'inertie G de S_1 est tel que $\vec{OG} = X_G \vec{x}_0 + Y_G \vec{y}_1$.

Le torseur des actions mécaniques exercées par le bâti S_0 sur S_1 par l'intermédiaire de la liaison pivot s'écrit :

$$\{\tau_{(S_0 \rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{array} \right\}_O^{B_1}$$

Le torseur, dont les composantes sont connues, des actions mécaniques exercées par l'extérieur (autre que S_0) sur S_1 (pour une roue de véhicule : action de la route, pesanteur,

arbre de transmission, etc.) s'écrit :

$$\{\tau_{(ext \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O^{B_1}$$

Par conséquence, le torseur de toutes les actions mécaniques extérieures appliquées à S_1 s'écrit :

$$\{\tau_{(\overline{S_1} \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} + X & L \\ Y_{01} + Y & M_{01} + M \\ Z_{01} + Z & N_{01} + N \end{Bmatrix}_O^{B_1}$$

3.6.1.2 Calcul du torseur dynamique de S_1

L'expression de la vitesse du centre d'inertie G de S_1 s'écrit :

$$\vec{V}_{(G/\mathcal{R}_0)} = Y_G \dot{\theta} \vec{z}_1$$

On déduit aisément l'expression de l'accélération du point G :

$$\vec{\Gamma}_{(G/\mathcal{R}_0)} = Y_G \ddot{\theta} \vec{z}_1 - Y_G \dot{\theta}^2 \vec{y}_1$$

La résultante dynamique de S_1 dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ s'écrit donc :

$$\vec{\mathcal{A}}_{(S_1/\mathcal{R}_0)} = m (Y_G \ddot{\theta} \vec{z}_1 - Y_G \dot{\theta}^2 \vec{y}_1)$$

Le point O est fixe dans le repère $\mathcal{R}_0$, l'expression du moment cinétique, au point O , de S_1 dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$ s'écrit donc :

$$\vec{\sigma}_{O(S_1/\mathcal{R}_0)} = [I_O(S_1)] \cdot \vec{\Omega}_{(S_1/\mathcal{R}_0)} = A \dot{\theta} \vec{x}_0 - F \dot{\theta} \vec{y}_1 - E \dot{\theta} \vec{z}_1$$

On peut alors déduire l'expression du moment dynamique, au point O , de S_1 dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\vec{\delta}_{O(S_1/\mathcal{R}_0)} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_{O(S_1/\mathcal{R}_0)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = A \ddot{\theta} \vec{x}_0 - (F \ddot{\theta} - E \dot{\theta}^2) \vec{y}_1 - (E \ddot{\theta} + F \dot{\theta}^2) \vec{z}_1$$

3.6.1.3 Application du P.F.D

L'application du P.F.D au solide S_1 au point O en projection dans la base associée à $\mathcal{R}_1$ permet d'obtenir les six équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} 0 & = & X_{01} + X & (1) \\ -mY_G \dot{\theta}^2 & = & Y_{01} + Y & (2) \\ mY_G \ddot{\theta} & = & Z_{01} + Z & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} A \ddot{\theta} & = & L & (4) \\ -(F \ddot{\theta} - E \dot{\theta}^2) & = & M_{01} + M & (5) \\ -(E \ddot{\theta} + F \dot{\theta}^2) & = & N_{01} + N & (6) \end{cases}$$

La quatrième équation correspond à l'équation du mouvement du solide S_1 . Les cinq autres équations permettent de définir les actions mécaniques (X_{01} , Y_{01} , Z_{01} , M_{01} et N_{01}) transmises par la liaison pivot entre S_1 et S_0 . On s'aperçoit que ces actions mécaniques sont fonction de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$. L'idée de l'équilibre et de rendre ces actions mécaniques aussi constantes que possible. Il faut donc annuler les effets d'inertie dus à la présence des termes en $\ddot{\theta}$ et $\dot{\theta}^2$. Ce principe nous conduit à écrire : $Y_G = 0$ et $E = F = 0$.

3.6.2 Notions d'équilibres statique et dynamique

3.6.2.1 Équilibre statique

On dit qu'un solide en rotation est équilibré statiquement lorsque, une fois mis dans une position quelconque, il reste dans cette position. Ceci est possible uniquement si son centre d'inertie est situé sur l'axe de rotation.

Dans l'exemple précédent :

$$\begin{cases} mY_G\dot{\theta}^2 &= 0 \\ mY_G\ddot{\theta} &= 0 \end{cases} \Rightarrow Y_G = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OG} = X_G \vec{x}_0$$

3.6.2.2 Équilibre dynamique

On dit qu'un solide est équilibré dynamiquement, s'il est équilibré statiquement et présente l'axe de rotation comme axe principal d'inertie.

Dans l'exemple précédent :

$$\begin{cases} F\ddot{\theta} - E\dot{\theta}^2 &= 0 \\ E\ddot{\theta} + F\dot{\theta}^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow E = F = 0$$

3.6.3 Réalisation pratique de l'équilibre

3.6.3.1 Principe

Pour équilibrer statiquement et dynamiquement un solide en rotation, deux stratégies sont envisageables :

- * ajouter des masses au solide afin de modifier ces caractéristiques cinétiques (équilibre des roues de véhicules) ;
- * enlever de la matière du solide (perçage, etc.) afin de modifier la répartition des masses (équilibre d'un vilebrequin).

Du point de vue des calculs à réaliser, les deux méthodes sont analogues, la seconde revient à manipuler des masses négatives.

3.6.3.2 Équilibre à deux masses

On souhaite équilibrer le solide S_1 de l'exemple précédent. Pour cela, on lui ajoute deux masselottes considérées comme ponctuelles de masses respectives m_1 et m_2 aux points respectifs M_1 et M_2 . Le nouvel ensemble matériel ainsi obtenu est noté $\Sigma = \{S_1, m_1, m_2\}$.

L'objectif est de rechercher la masse et la position dans le repère $\mathcal{R}_1$ lié au solide S_1 de chacune des masselottes ponctuelles pour que l'ensemble Σ soit équilibré.

- * on rappelle que le solide S_1 à équilibrer est de masse m , de centre d'inertie G tel que $\overrightarrow{OG} = X_G \vec{x}_0 + Y_G \vec{y}_1$ et de matrice d'inertie de la forme :

$$[I_O(S_1)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

- * la masselotte 1 de masse m_1 est placée au point M_1 tel que $\overrightarrow{OM_1} = x_1 \vec{x}_0 + y_1 \vec{y}_1 + z_1 \vec{z}_1$;
- * la masselotte 2 de masse m_2 est placée au point M_2 tel que $\overrightarrow{OM_2} = x_2 \vec{x}_0 + y_2 \vec{y}_1 + z_2 \vec{z}_1$;

- * on note G' le centre d'inertie de l'ensemble Σ tel que $\overrightarrow{OG'} = X_{G'} \overrightarrow{x_0} + Y_{G'} \overrightarrow{y_1} + Z_{G'} \overrightarrow{z_1}$;
- * la matrice d'inertie de l'ensemble Σ exprimée au point O dans la base de $\mathcal{R}_1$ est de la forme :

$$[I_O(\Sigma)] = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$$

Équilibrage statique

Pour que l'ensemble Σ soit équilibré statiquement, il faut que son centre d'inertie G' soit situé sur l'axe de rotation $(O, \overrightarrow{x_0}) \Rightarrow Y_{G'} = Z_{G'} = 0$.

On rappelle que :

$$\overrightarrow{OG'} = \frac{m \cdot \overrightarrow{OG} + m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2}}{m + m_1 + m_2}$$

On déduit alors les deux premières équations à respecter :

$$\begin{cases} Y_{G'} = \overrightarrow{OG'} \cdot \overrightarrow{y_1} = 0 \Rightarrow m \cdot Y_G + m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 = 0 & (1) \\ Z_{G'} = \overrightarrow{OG'} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0 \Rightarrow m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Équilibrage dynamique

L'axe de rotation $(O, \overrightarrow{x_0})$ doit être un axe principal d'inertie pour l'ensemble $\Sigma \Rightarrow E' = F' = 0$.

On rappelle que la matrice d'inertie d'une masselotte ponctuelle en son centre d'inertie est nulle (le volume est nul) $\Rightarrow$

$$[I_{M_1}(M_1)] = [I_{M_2}(M_2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_3}$$

En appliquant le théorème de Huygens, on obtient les matrices d'inerties en O des masselottes M_1 et M_2 :

- * pour la masselotte M_1 :

$$[I_O(M_1)] = m_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1^2 + z_1^2 & -x_1 \cdot y_1 & -x_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot y_1 & x_1^2 + z_1^2 & -y_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot z_1 & -y_1 \cdot z_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$$

- * pour la masselotte M_2 :

$$[I_O(M_2)] = m_2 \cdot \begin{pmatrix} y_2^2 + z_2^2 & -x_2 \cdot y_2 & -x_2 \cdot z_2 \\ -x_2 \cdot y_2 & x_2^2 + z_2^2 & -y_2 \cdot z_2 \\ -x_2 \cdot z_2 & -y_2 \cdot z_2 & x_2^2 + y_2^2 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}$$

Par conséquent, on déduit les deux équations à respecter :

$$\begin{cases} E' = 0 \Rightarrow E + m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 & (3) \\ F' = 0 \Rightarrow F + m_1 \cdot x_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Handwritten notes and calculations:

$$\vec{OG'} = x_1 \vec{m_1} + y_1 \vec{y_1} + z_1 \vec{z_1}$$

$$G = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

Finalement, nous nous retrouvons avec un système de 4 équations à 8 inconnues ($m_1, m_2, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2$ et z_2). Ce problème admet donc à priori une infinité de solutions et pour le résoudre il suffit d'imposer 4 inconnues.

Le choix des inconnues à fixer ne se fait pas de façon arbitraire et est principalement limité par les contraintes pratiques de réalisation. Pour cela, nous allons se référer à un exemple classique d'équilibrage.

Roue de voiture

Pour la roue (figure 3.5) de voiture, les deux masselottes d'équilibrage ne peuvent être fixées que sur le pourtour de la jante, de rayon R et de largeur l , de chaque côté du pneu.

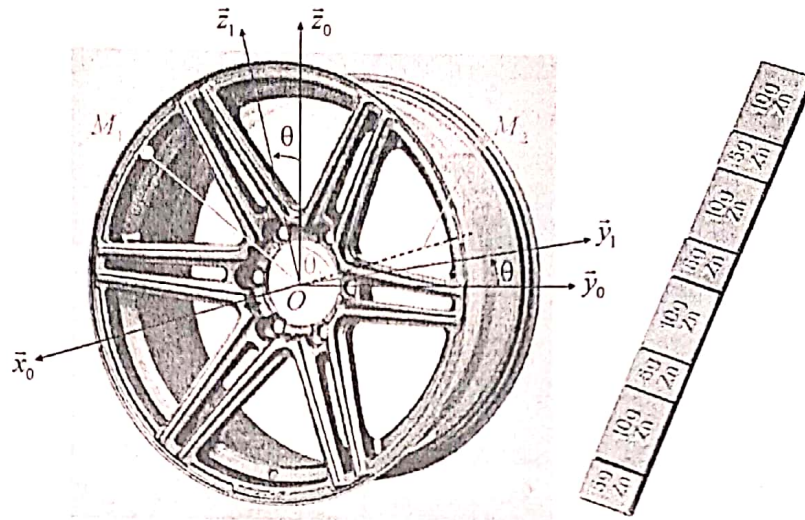


FIGURE 3.5 – Jante de voiture et masselottes d'équilibrage

Nous pouvons donc imposer que :

- * pour la première masselotte : $\sqrt{y_1^2 + z_1^2} = R$ et $x_1 = 0$
- * pour la seconde masselotte : $\sqrt{y_2^2 + z_2^2} = R$ et $x_2 = -l$

Pour résoudre le problème précédent, réécrivons le système d'équations en coordonnées cylindriques, en posant :

$$\begin{cases} y_1 = R \cdot \cos \theta_1 \\ z_1 = R \cdot \sin \theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = R \cdot \cos \theta_2 \\ z_2 = R \cdot \sin \theta_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -l \end{cases}$$

Le système d'équations devient donc :

$$\begin{cases} m \cdot Y_G + m_1 \cdot R \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \cos \theta_2 = 0 & (1) \\ m_1 \cdot R \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \sin \theta_2 = 0 & (2) \\ E - l \cdot R \cdot m_2 \cdot \sin \theta_2 = 0 & (3) \\ F - l \cdot R \cdot m_2 \cdot \cos \theta_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Finalement, nous déduisons la position et la masse de chacune des masselottes en fonction des caractéristiques cinétiques de la roue de voiture à équilibrer.

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{E}{F + m \cdot l \cdot Y_G} \\ m_1 = -\frac{E}{l \cdot R \cdot \sin \theta_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \theta_2 = \frac{E}{F} \\ m_2 = \frac{\sqrt{E^2 + F^2}}{l \cdot R} \end{cases}$$

Remarques

- ✓ * si $m_2 = 0$, alors d'après l'équation (3) : $E = 0 \Rightarrow$ une seule masse ne suffit pas pour faire l'équilibrage si $E \neq 0$
- ✗ * si $x_1 = x_2$, alors d'après les équations (2) et (3) : $E = 0 \Rightarrow$ les deux masselottes doivent être fixées dans deux plans différents pour faire l'équilibrage si $E \neq 0$

Machine d'équilibrage

Les machines d'équilibrage de roues (figure 3.6) intègrent des capteurs d'efforts qui permettent de mesurer les efforts au niveau des liaisons. La connaissance de ces efforts permet de déduire les composantes de la matrice d'inertie de la roue à équilibrer par résolution du P.F.D. Par la suite, le système est résolu et la position et la masse de chacune des masselottes est affiché avec précision.

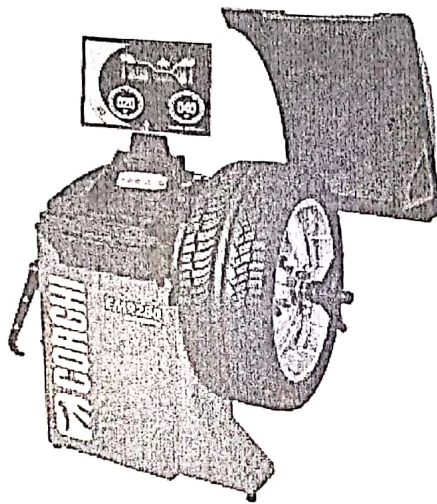


FIGURE 3.6 – Machine d'équilibrage de roues

Chapitre 4: Energétique

4.1 Puissance d'une action mécanique extérieure

La puissance, à l'instant t , d'une action mécanique extérieure sur le solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère R est le produit entre le torseur de l'action mécanique et le torseur cinématique du solide :

$$P(ext \rightarrow S/R) = \{\tau(ext \rightarrow S)\}_A \{\mathcal{V}(S/R)\}_A$$

Cas particuliers :

— Cas d'une force extérieure $\vec{F}_{ext}$ appliquée en un point A :

$$P(\vec{F}_{ext} \rightarrow S/R) = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{V}(A \in S/R)$$

Exemple : puissance d'une action de la pesanteur $P(\vec{g} \rightarrow S/R) = m \vec{g} \cdot \vec{V}(G/R)$

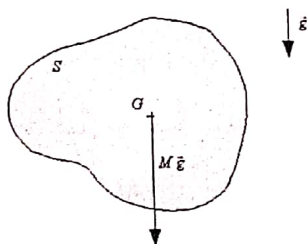


FIGURE 4.1 – Action de la pesanteur

— Cas d'un couple extérieur $\vec{C}_{ext}$ appliqué sur un solide (S) :

$$P(\vec{C}_{ext} \rightarrow S/R) = \vec{C}_{ext} \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Exemple : puissance d'un moteur électrique : $P(ME \rightarrow S/S_0) = C_M \dot{\theta}$

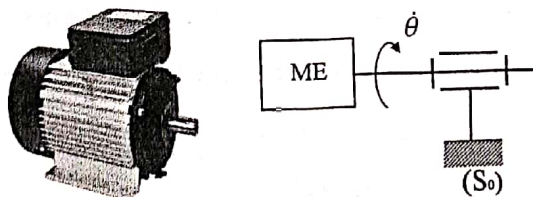


FIGURE 4.2 – Moteur électrique

Remarque :

- La puissance dépend de référentielle R .
- La puissance d'une action mécanique extérieure sur (S) est nulle dans tout repère lié à (S) .
- La puissance est un scalaire. Si $P(ext \rightarrow S/R) > 0$, l'action mécanique est motrice. Si $P(ext \rightarrow S/R) < 0$, l'action mécanique est réceptrice.
- L'unité de la puissance est le Watt [W] où le Cheval-vapeur ($1CV = 746W$).

4.2 Puissance des actions intérieures

4.2.1 Puissance des actions mutuelles entre deux solides

Soient deux solides (S_i) et (S_j) en mouvement par rapport à un repère R . La puissance des actions mutuelles, entre les deux solides est définie par :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = P(S_i \rightarrow S_j/R) + P(S_j \rightarrow S_i/R)$$

Remarques :

- La puissance des actions mutuelles ne dépend pas de repère R .
- La puissance des actions mutuelles s'écrit par définition :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = P(S_i \rightarrow S_j/S_i) = \{\tau_{S_i \rightarrow S_j}\} \{\vartheta_{S_j/S_i}\}$$

- Dans le cas d'une **liaison parfaite**, la puissance des actions mutuelles est nulle :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$$

4.2.2 Puissance des efforts intérieurs

Soit un ensemble matériel (S) composé de n solides S_i (avec $i = 1, \dots, n$) en mouvement par rapport à un repère R . La puissance des efforts intérieurs à l'ensemble matériel (S) est définie par la somme des puissances mutuelles entre les solides qui sont en liaison :

$$P_{int} = \sum_{i,j=1 \text{ et } i < j}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

4.3 Rendement

Dans la plupart des problèmes, une partie de la puissance fournie au système est perdue dans le mécanisme. Cette puissance perdue est appelée puissance dissipée.

$$P_e = P_s + P_{diss.}$$

Le rendement du mécanisme, noté η , est donné par :

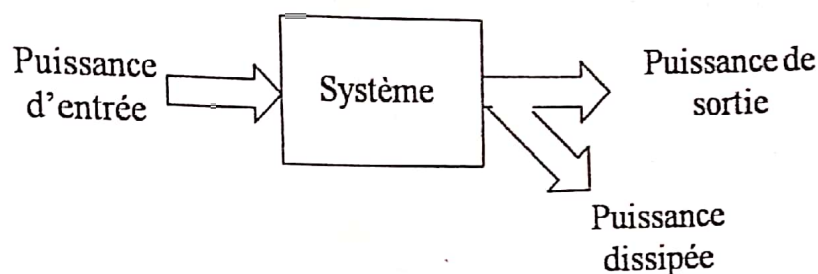


FIGURE 4.3 – Bilan énergétique

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \Rightarrow P_{diss} = P_e (1 - \eta)$$

Remarque : La puissance des efforts intérieurs est une puissance dissipée.

4.4 Travail d'une force

Le travail d'une force est l'énergie fournie à un système pour le déplacer d'un état initial à un état final. Le travail effectué par une force extérieure sur un solide est défini par :

$$W(ext \rightarrow S/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(ext \rightarrow S/R) dt$$

Exemple : Travail d'un ressort

Le Travail d' un ressort de compression de raideur k est donné par :

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

4.5 Energie potentielle

La variation de l'énergie potentielle d'un solide (S) associé à une action mécanique extérieure est égale à l'opposé du travail fourni par cette action :

$$dE_p_{(ext \rightarrow S/R_g)} = -dW_{(ext \rightarrow S/R_g)}$$

Exemple 1 : Energie potentielle associée à l'action d'un ressort

Exemple : Energie potentielle associée à l'action d'un ressort :

$$E_{P_{(ressort \rightarrow S/R)}} = \frac{1}{2} k x^2 + cte$$

Exemple 2 : Energie potentielle associée à l'action de pesanteur

L'énergie accumulée par une charge de poids P soulevée d'une hauteur h est exprimée par :

$$E_P = P.h$$

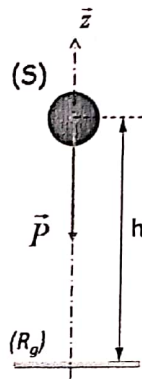


FIGURE 4.4 – Action de pesanteur

l'énergie potentielle d'un l'hélico de 10 tonnes situé à une altitude de 100 m est égal à 10 MJ

$$E_p = 100000N . 100m = 10MJ$$



4.6 Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide (ou à un ensemble matériel), en mouvement par rapport à un repère galiléen, permet d'aboutir à une relation scalaire entre les actions mécaniques appliquées au solide (ou à l'ensemble matériel) et les paramètres cinématiques. Le théorème de l'énergie cinétique, noté TEC, peut, dans certains cas, conduire seul et de manière plus rapide que le PFD à l'équation du mouvement. Dans d'autres cas, l'utilisation du PFD reste nécessaire.

4.6.1 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Théorème 3. La dérivée, par rapport à l'instant t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S) .

$$\frac{d}{dt} [E_C(S/R_g)] = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Ce théorème est la traduction énergétique du PFD.

4.6.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit (Σ) un ensemble composé de n solides (S_i) avec $(i = 1, n)$ en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Théorème 4. La dérivée, par rapport à l'instant t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un système de solide (Σ) est égale à la somme entre la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures et la puissance des efforts mécaniques intérieures au système (Σ) .

$$\frac{d}{dt} [E_C(\Sigma/R_g)] = P_{ext} + P_{int}$$

Avec :

— P_{ext} est la puissance des actions mécaniques extérieurs

$$P_{ext} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g)$$

— P_{int} la puissance des efforts intérieurs

4.7 Energie mécanique

L'énergie mécanique s'exprime comme la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles du système :

$$E_m(S/R) = E_C(S/R) + E_p(\bar{S} \rightarrow S/R)$$

L'énergie mécanique est conservée en absence d'action non conservative (frottement) :

$$E_m(S/R) = Cte$$

Cette relation s'appelle Intégrale Première de l'énergie cinétique.

— L'unité de l'énergie est le kilowatt-heure où le Joule ($1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$)