

Chapitre 3: Dynamique des systèmes de solides

3.1 Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère noté R_g , appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble matériel (s) d'un ensemble matériel (S) , le torseur dynamique de (s) dans son mouvement par rapport à R_g soit égal au torseur des actions mécaniques extérieures à (s) .

$$\{\mathcal{D}_{(s/R_g)}\}_A = \{\tau_{(\bar{s} \rightarrow s)}\}_A$$

Notons $(\bar{s})$ l'extérieure de (s) .

Remarque : Pour la plupart des mécanismes étudiés, un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen.

Le P.F.D est une égalité entre 2 torseurs : leurs résultantes sont égales et leurs moments en un mpt sont égaux.

3.2 Théorèmes généraux de la dynamique

Soit (s) un ensemble matériel de masse m et de centre de masse G en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g . On définit au point A le torseur dynamique et le torseur d'actions mécaniques suivants :

$$\{\mathcal{D}_{(s/R_g)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{\gamma}(G/R_g) \\ \vec{\delta}_A(s/R_g) \end{array} \right\}_A ; \{\tau_{(\bar{s} \rightarrow s)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(\bar{s} \rightarrow s) \\ \vec{M}_A(\bar{s} \rightarrow s) \end{array} \right\}_A$$

3.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (s) d'un ensemble matériel (S) , en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g , la résultante dynamique de (s) dans son mouvement par rapport à R_g est égal à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à (s) .

$$m\vec{\gamma}(G/R_g) = \vec{R}(\bar{s} \rightarrow s)$$

3.2.2 Théorème du moment dynamique

Pour tout sous-ensemble matériel (s) d'un ensemble matériel (S) , en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g , le moment dynamique de (s) dans son mouvement par rapport à R_g ,

en tout point A , est égal au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à (s) calculé au point A .

$$\vec{\delta}_A(s/R_g) = \vec{M}_A(\vec{s} \rightarrow s)$$

3.3 Théorème des actions mutuelles

On considère un ensemble matériel (S) composé de deux sous-ensembles matériels (S_1) et (S_2) en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (S_1) dans son mouvement par rapport à R_g est donné par :

$$\{\mathcal{D}_{(S_1/R_g)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s}_1 \rightarrow S_1)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s} \rightarrow S_1)}\}_A + \{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\}_A$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (S_2) dans son mouvement par rapport à R_g est donné par :

$$\{\mathcal{D}_{(S_2/R_g)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s}_2 \rightarrow S_2)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s} \rightarrow S_2)}\}_A + \{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à (S) dans son mouvement par rapport à R_g est défini par :

$$\{\mathcal{D}_{(S/R_g)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s} \rightarrow S)}\}_A = \{\tau_{(\vec{s} \rightarrow S_1)}\}_A + \{\tau_{(\vec{s} \rightarrow S_2)}\}_A$$

Comme :

$$\{\mathcal{D}_{(S/R_g)}\}_A = \{\mathcal{D}_{(S_1/R_g)}\}_A + \{\mathcal{D}_{(S_2/R_g)}\}_A$$

On obtient alors :

$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A + \{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\}_A = \{0\}$$

Théorème : l'action mécanique d'un sous-ensemble matériel (S_1) sur un sous-ensemble matériel (S_2) est opposée à l'action mécanique de (S_2) sur (S_1) :

$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = -\{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\}_A$$

3.4 Equation du mouvement

Soit un ensemble matériel (S) dont la position par rapport à un repère galiléen dépend des paramètres de mouvement noté $q_i(t)$ avec $(i = 1, \dots, n)$.

L'application du principe fondamental de la dynamique à (S) conduit à écrire deux équations

vectorielles dont leur projection sur une base orthonormée directe donne, au maximum, six équations scalaires indépendantes.

Ces équations scalaires sont des équations différentielles du second ordre, non linéaire en général.

Dans ces équations peuvent figurer :

- des paramètres $q_i(t)$,
- des dérivées premières et secondes de ces paramètres par rapport au temps $t : \dot{q}_i(t)$ et $\ddot{q}_i(t)$,
- des données géométriques et des caractéristiques d'inertie du système matériel,
- des composantes connues et inconnues d'actions mécaniques.

3.4.1 Définition

des inconnues

On appelle équation de mouvement une équation différentielle du second ordre dont laquelle ne figure aucune composante inconnue d'actions mécaniques.

Remarque : une équation de mouvement peut être obtenue en éliminant, entre plusieurs équations, des composantes inconnues d'actions mécaniques.

3.4.2 Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle de premier ordre de la forme : $f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = cte$. Elle est obtenue par intégration d'une équation de mouvement.

3.4.3 Exemple du problème dynamique

On distingue deux grands types de problèmes dynamiques :

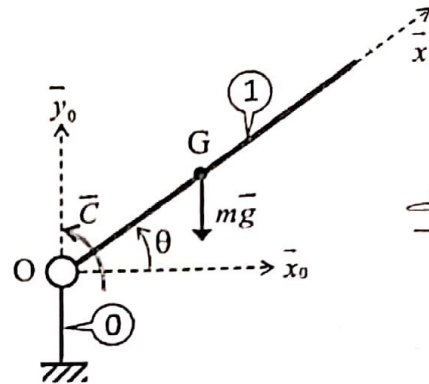
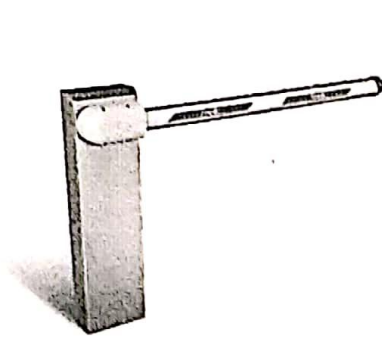
- Problème de type 1 : Recherche des lois du mouvement.
- Problème de type 2 : Caractérisation des actionneurs.

Pour le premier type, on connaît les actions mécaniques extérieures appliquées sur le système et on cherche à déterminer les équations du mouvement. On peut aussi déterminer les actions mécaniques des liaisons.

Pour le deuxième type, on connaît les lois du mouvement et on cherche à déterminer les caractéristiques des actionneurs et les actions mécaniques des liaisons.

Exemple d'un problème du type 1 : Barrière de parking

Une barrière de parking est modélisée par une barre (1) de masse m et de longueur L en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ par rapport au bâti (0). Elle est entraînée en rotation par un couple $\vec{C}$, elle est aussi soumise à l'action de la pesanteur.



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial t} /_{R_0} = \frac{d}{dt} \vec{\omega} (1/0) \vec{z}_1$$

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la barre (1) dans son mouvement par rapport au bâti (0). Dédurre l'équation du mouvement et les actions mécaniques de liaison au point O.

$$\vec{v}_G = \sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

Réponse :

Torseur cinématique au p. O :

$$\{C(1/0)\}_O = \left\{ \begin{matrix} m_1 \vec{v}_G(1/0) \\ \vec{\omega}(1/0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial t} /_{R_0} \\ \dot{\theta} \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m_1 \frac{d}{dt} \left(\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 \right) \\ \dot{\theta} \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_O$$

Torseur dynamique :

$$\{D(1/0)\}_O = \left\{ \begin{matrix} m_1 \vec{\gamma}_G(1/0) \\ \vec{\delta}_O(1/0) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} m_1 \frac{d^2}{dt^2} \left(\sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1 \right) \\ m_1 \frac{L}{3} \ddot{\theta} \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_O$$

Le torseur des actions mécaniques appliquées à (1) :

$$\vec{A} = \{ \vec{O}, \vec{C}, \vec{g} \}$$

$$\{T(\vec{A} \rightarrow 1)\}_O = \{T(\vec{O} \rightarrow 1)\}_O + \{T(\vec{g} \rightarrow 1)\}_O + \{T(\vec{C} \rightarrow 1)\}_O$$

$$* \{T(\vec{O} \rightarrow 1)\}_O = \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O \quad \text{liaison pivot}$$

$$* \{T(\vec{C} \rightarrow 1)\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ C \end{matrix} \right\}_O$$

$$* \{T(\vec{g} \rightarrow 1)\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{matrix} \right\}_O$$

$$\{T(\vec{A} \rightarrow 1)\}_O = \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ C \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ C \end{matrix} \right\}_O$$

P.F.D $\Rightarrow$

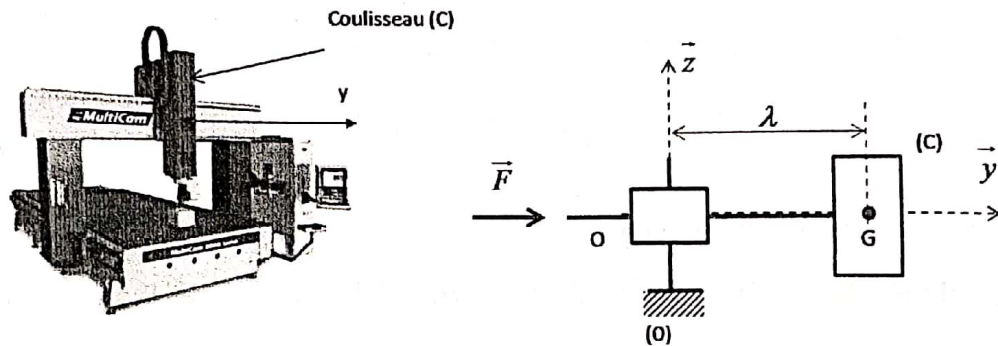
$$\begin{cases} X - mg \sin \theta = -m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta} \\ Y - mg \cos \theta = m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta} \\ m_1 \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} = C - \frac{L}{2} mg \cos \theta \end{cases}$$

la 3^{ème} est l'éq. de mouvement

sys

Exemple d'un problème du type 2 : L'axe Y d'une machine outil

Le coulisseau de masse m est entraîné en translation suivant l'axe $\vec{y}$ sous l'action d'une force $\vec{F}$ fournie par l'actionneur pour obtenir l'accélération souhaitée.



Appliquer le principe fondamental de la dynamique au coulisseau dans son mouvement par rapport au repère R . Dédurre l'expression de la force $\vec{F}$.

Application numérique : Déterminer la valeur de la force fournie par le moteur linéaire pour une masse de coulisseau de 50 Kg et une accélération de 10 m/s^2 .

Réponse :

$$\text{D. } \{C|O\} = \left\{ m \ddot{x} \vec{y}_O \right\}, \vec{c} = \{0, F, 0\}$$

$$\{Z(O \rightarrow C)\} = \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{symétrie}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{Z(\vec{g} \rightarrow C)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{Z(\vec{F} \rightarrow C)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{Z(\vec{c} \rightarrow C)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ Z - mg \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\lambda mg + L \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

P.F.D. $\begin{cases} m \ddot{x} = F \\ Z - mg = 0 \\ -\lambda mg + L = 0 \end{cases}$

3.5 Cas particulier de la statique

L'application du principe fondamental de la dynamique se ramène à celle du principe fondamental de la statique, lorsque le torseur dynamique de l'ensemble matériel (S), dans son mouvement par rapport au repère galiléen, est nul.

$$\left\{ \tau_{(\vec{s} \rightarrow s)} \right\}_A = \{0\}$$

Ce torseur est nul dans les cas suivants :

- l'ensemble matériel (S) est en équilibre statique (au repos) par rapport à R_g ,
- la masse et les effets d'inertie de l'ensemble matériel (S) sont supposés négligeables,
- l'ensemble matériel (S) est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère galiléen R_g . En effet

$$\vec{V}(P \in S/R_g) = \vec{cte} \Rightarrow \vec{\gamma}(P \in S/R_g) = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \mathcal{D}_{(S/R_g)} \right\} = \{0\}$$

- l'ensemble matériel (S) est un solide dynamiquement équilibré (équilibrage dynamique), animé d'un mouvement de rotation uniforme par rapport au repère galiléen R_g .

3.6 Equilibrage dynamique

La rotation d'un solide (S) appelé rotor (roue de véhicule, vilebrequin de moteur, rotor d'hélicoptère, ...) par rapport à un bâti (S_0) appelé stator, à une vitesse angulaire très élevée et accélération angulaire variable, provoque des vibrations. Ces dernières peuvent entraîner une détérioration rapide des paliers et avoir des conséquences graves sur le comportement des mécanismes.

Afin de minimiser ou d'éviter ces vibrations, on équilibre dynamiquement (S) par rapport à (S_0) c'est-à-dire rendre les composantes mécaniques au niveau de la liaison pivot aussi constantes que possible.

3.6.1 Modélisation

Soit un bâti (S_0) auquel est lié le repère galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G , a une liaison pivot sans frottement d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti (S_0). Soit un repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ lié au solide (S), tel que le centre d'inertie G se trouve dans le plan $R(O, \vec{x}_0, \vec{y})$.

On pose :

$$\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_0 + b\vec{y} ; \theta = (\vec{y}_0, \vec{y}) = (\vec{z}_0, \vec{z})$$

la matrice d'inertie du solide (S) au point O , dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ est donnée par la forme générale suivante :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}$$

L'action mécanique dans la liaison pivot, du bâti (S_0) sur le solide (S), est représentée au point O , dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$, par le torseur :

$$\{\tau(S_0 \rightarrow S)\}_O =$$

En plus, le solide (S) est soumis à d'autres actions mécaniques provenant de divers systèmes matériels réunis dans l'ensemble (Σ) . Ces actions sont définies au point O , dans la base du

repère R , par le torseur d'action mécanique :

$$\{\tau(\Sigma \rightarrow S)\}_O =$$

Remarque : Dans le cas d'une roue de véhicule, le système matériel est constitué de la route, de la pesanteur, de l'arbre de transmission, ...

Appliquant le principe fondamental de la dynamique au solide (S) , dans son mouvement par rapport au bâti (S_0) :

$$\{\mathcal{D}_{(S/S_0)}\}_O = \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}_O$$

On obtient les deux relations vectorielles suivantes :

— Théorème de la résultante dynamique :

$$m \vec{\gamma}(G/S_0) = \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{R}(S_0 \rightarrow S) + \vec{R}(\Sigma \rightarrow S)$$

— Théorème du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_O(S/S_0) = \vec{M}_O(\bar{S} \rightarrow S) = \vec{M}_O(S_0 \rightarrow S) + \vec{M}_O(\Sigma \rightarrow S)$$

Calculons le vecteur accélération et le moment dynamique :

$$\vec{\gamma}(G/O) = \left. \frac{d\vec{V}(G/S_0)}{dt} \right|_{S_0} =$$

$$\vec{\delta}_O(S/S_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(S/S_0)}{dt} \right]_{S_0}$$

Avec :

$$\vec{\sigma}_O(S/S_0) = [I_O(S)] \vec{\Omega}(S/S_0) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}$$

On obtient :

$$\vec{\sigma}_O(S/S_0) =$$

D'où :

$$\vec{\delta}_O(S/S_0) =$$

D'où les six équations scalaires déduites du principe fondamental :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (1) \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (2) \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (3) \end{cases} \quad \begin{cases} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (4) \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (5) \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots & (6) \end{cases}$$

On remarque que les actions mécaniques au niveau de la liaison pivot dépendent de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$.

3.6.2 Conditions d'équilibrage dynamique

Pour éviter les vibrations engendrées par le mouvement de rotation du solide (S) par rapport au bâti (S_0), il faut rendre l'action mécanique dans la liaison pivot aussi constante que possible, en particulier, indépendante de la position, de la vitesse et de l'accélération angulaire du solide (S) par rapport au bâti (S_0).

Pour cela, il suffit d'annuler les effets d'inertie représentés (au signe près) par le comportement du torseur dynamique du mouvement du solide (S) par rapport au bâti (S_0).

D'où les conditions d'équilibrage dynamique :

- Equilibrage statique : le centre d'inertie G du solide (S) se trouve sur l'axe de rotation, ($b = 0$ dans l'exemple).
- L'axe de rotation est un axe principal d'inertie, ($E = F = 0$ dans l'exemple)

3.6.3 Réalisation pratique de l'équilibrage

Pour réaliser l'équilibrage dynamique d'un solide, il faut ramener le centre d'inertie sur l'axe de rotation et rendre cet axe principal d'inertie. Pour la réalisation pratique de ces deux conditions, il suffit de fixer deux masselottes au solide (par exemple roue de véhicule) ou à enlever de la matière du solide en deux endroits (roue de train, vilebrequin de moteur). Dans ce dernier cas, l'étude est faite avec des masselottes de masses négatives.

On obtient un système matériel (S') constitué du solide (S) et de deux masselottes (1) et (2), assimilables à des points matériels :

- masselotte m_1 placer au point $P_1(x_1, y_1, z_1)$,
- masselotte m_2 placer au point $P_2(x_2, y_2, z_2)$,

Le système matériel (S') est de masse ($M = m + m_1 + m_2$), de centre de masse G' et de produit d'inertie E' et F' relatifs à l'axe $(O, \vec{x}_0)$. Pour que (S') soit dynamiquement équilibré il faut assurer ces deux conditions :

- Equilibrage statique : $G' \in (O, \vec{x}_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- Equilibrage dynamique : il faut en plus que l'axe de rotation est un axe principal d'inertie :

$$E' = F' = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E' = \dots\dots\dots \\ F' = \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

On dispose quatre relations avec 8 inconnus (m_1, x_1, y_1, z_1) pour la masselotte (1) et (m_2, x_2, y_2, z_2) pour la masselotte (2).

Pour résoudre le problème, il faut fixer quatre paramètres.

3.6.4 Application : Roue de véhicule

L'équilibrage des roues de véhicule est une opération bien connue dans le monde de l'automobile. En effet les pneus n'ont jamais une répartition des masses parfaite (un côté du pneu est toujours plus lourd que l'autre), malgré le degré de précision très important des fabricants. L'opération d'équilibrage consiste à placer des contrepoids dans les jantes. Les masselottes sont fixées sur le bord de la jante, une de chaque côté de la roue.

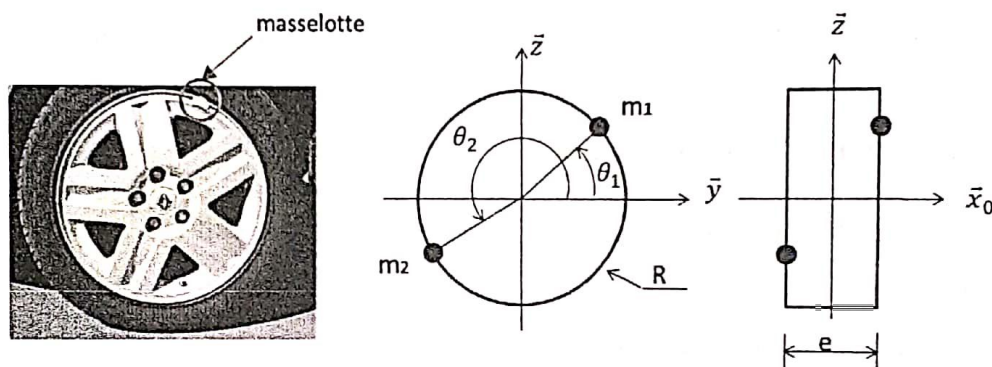


FIGURE 3.1 – Equilibrage d'une roue

En coordonnées polaires, on a $P_1(r_1, \theta_1, x_1)$ et $P_2(r_2, \theta_2, x_2)$. Avec :

$$y_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad z_1 = r_1 \sin \theta_1$$

$$y_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad z_2 = r_2 \sin \theta_2$$

On impose alors les valeurs de x_1, x_2 et r_1, r_2

— ,
 — ,

La condition d'équilibrage dynamique conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots = 0 \\ & \dots\dots\dots = 0 \\ & \dots\dots\dots = 0 \\ & \dots\dots\dots = 0 \end{aligned}$$

Reste à déterminer les quatre inconnues m_2, m_1, θ_1 et θ_2 .

Chapitre 4: Energétique

4.1 Puissance d'une action mécanique extérieure

La puissance, à l'instant t , d'une action mécanique extérieure sur le solide (S) dans son mouvement par rapport à un repère R est le produit entre le torseur de l'action mécanique et le torseur cinématique du solide :

$$P(\text{ext} \rightarrow S/R) = \{\tau(\text{ext} \rightarrow S)\}_A \cdot \{\vartheta(S/R)\}_A$$

Cas particuliers :

— Cas d'une force extérieure $\vec{F}_{\text{ext}}$ appliquée en un point A :

$$P(\vec{F}_{\text{ext}} \rightarrow S/R) = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{V}(A \in S/R)$$

Exemple : puissance d'une action de la pesanteur $P(\vec{g} \rightarrow S/R) = m\vec{g} \cdot \vec{V}(G/R)$

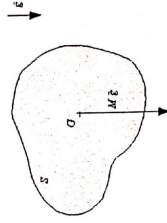


FIGURE 4.1 – Action de la pesanteur

— Cas d'un couple extérieur $\vec{C}_{\text{ext}}$ appliqué sur un solide (S) :

$$P(\vec{C}_{\text{ext}} \rightarrow S/R) = \vec{C}_{\text{ext}} \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Exemple : puissance d'un moteur électrique : $P(ME \rightarrow S/S_0) = C_M \dot{\theta}$

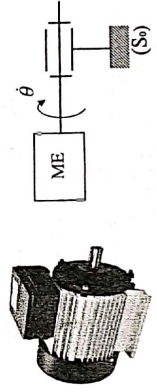


FIGURE 4.2 – Moteur électrique

Remarque :

- La puissance dépend de référentielle R .
- La puissance d'une action mécanique extérieure sur (S) est nulle dans tout repère lié à (S) .
- La puissance est un scalaire. Si $P(ext \rightarrow S/R) > 0$, l'action mécanique est motrice. Si $P(ext \rightarrow S/R) < 0$, l'action mécanique est réceptrice.
- L'unité de la puissance est le Watt [W] où le Cheval-vapeur ($1CV = 746W$).

4.2 Puissance des actions intérieures

4.2.1 Puissance des actions mutuelles entre deux solides

Soient deux solides (S_i) et (S_j) en mouvement par rapport à un repère R . La puissance des actions mutuelles, entre les deux solides est définie par :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = P(S_i \rightarrow S_j/R) + P(S_j \rightarrow S_i/R)$$

Remarques :

- La puissance des actions mutuelles ne dépend pas de repère R .
- La puissance des actions mutuelles s'écrit par définition :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = P(S_i \rightarrow S_j/S_i) = \{ \tau_{S_i \rightarrow S_j} \} \{ v_{S_j/S_i} \}$$
- Dans le cas d'une **liaison parfaite**, la puissance des actions mutuelles est nulle :

$$P(S_i \leftrightarrow S_j) = 0$$

4.2.2 Puissance des efforts intérieurs

Soit un ensemble matériel (S) composé de n solides S_i (avec $i = 1, ..n$) en mouvement par rapport à un repère R . La puissance des efforts intérieurs à l'ensemble matériel (S) est définie par la somme des puissances mutuelles entre les solides qui sont en liaison :

$$P_{int} = \sum_{i,j=1 \text{ et } i < j}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

4.3 Rendement

Dans la plupart des problèmes, une partie de la puissance fournie au système est perdue dans le mécanisme. Cette puissance perdue est appelée puissance dissipée.

$$P_e = P_s + P_{diss.}$$

Le rendement du mécanisme, noté η , est donné par :

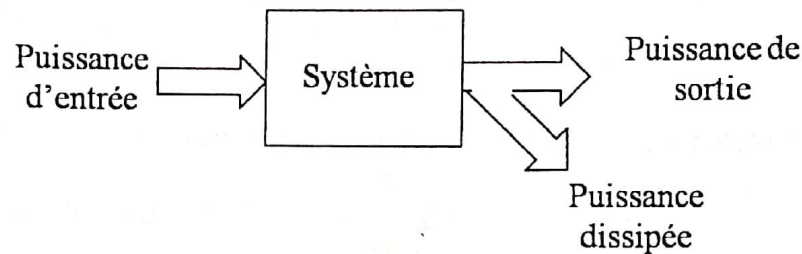


FIGURE 4.3 – Bilan énergétique

$$\eta = \frac{P_s}{P_e} \Rightarrow P_{diss} = P_e (1 - \eta)$$

Remarque : La puissance des efforts intérieurs est une puissance dissipée.

4.4 Travail d'une force

Le travail d'une force est l'énergie fournie à un système pour le déplacer d'un état initial à un état final. Le travail effectué par une force extérieure sur un solide est défini par :

$$W(ext \rightarrow S/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(ext \rightarrow S/R) dt$$

Exemple : Travail d'un ressort

Le Travail d' un ressort de compression de raideur k est donné par :

$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

4.5 Energie potentielle

La variation de l'énergie potentielle d'un solide (S) associé à une action mécanique extérieure est égale à l'opposé du travail fourni par cette action :

$$dE_{p(ext \rightarrow S/R_g)} = -dW_{(ext \rightarrow S/R_g)}$$

Exemple 1 : Energie potentielle associée à l'action d'un ressort

Exemple : Energie potentielle associée à l'action d'un ressort :

$$E_{P_{(\text{ressort} \rightarrow S/R)}} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$$

Exemple 2 : Energie potentielle associée à l'action de pesanteur

L'énergie accumulée par une charge de poids P soulevée d'une hauteur h est exprimée par

$$E_P = P.h$$

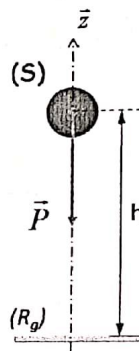
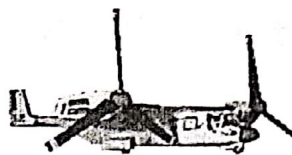


FIGURE 4.4 – Action de pesanteur

l'énergie potentielle d'un l'hélico de 10 tonnes situé à une altitude de 100 m est égal à 10 MJ

$$E_P = 100000N \cdot 100m = 10MJ$$

**4.6 Théorème de l'énergie cinétique**

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un solide (ou à un ensemble matériel), en mouvement par rapport à un repère galiléen, permet d'aboutir à une relation scalaire entre les actions mécaniques appliquées au solide (ou à l'ensemble matériel) et les paramètres cinématiques. Le théorème de l'énergie cinétique, noté TEC, peut, dans certains cas, conduire seul et de manière plus rapide que le PFD à l'équation du mouvement. Dans d'autres cas, l'utilisation du PFD reste nécessaire.

4.6.1 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

Soit (S) un solide en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Théorème 3. La dérivée, par rapport à l'instant t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S) .

$$\frac{d}{dt} [E_C(S/R_g)] = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Ce théorème est la traduction énergétique du PFD.

4.6.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

Soit (Σ) un ensemble composé de n solides (S_i) avec $(i = 1, n)$ en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Théorème 4. La dérivée, par rapport à l'instant t , de l'énergie cinétique galiléenne d'un système de solide (Σ) est égale à la somme entre la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures et la puissance des efforts mécaniques intérieures au système (Σ) .

$$\frac{d}{dt} [E_C(\Sigma/R_g)] = P_{ext} + P_{int}$$

Avec :

— P_{ext} est la puissance des actions mécaniques extérieurs

$$P_{ext} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g)$$

— P_{int} la puissance des efforts intérieurs

4.7 Energie mécanique

L'énergie mécanique s'exprime comme la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles du système :

$$E_m(S/R) = E_C(S/R) + E_p(\bar{S} \rightarrow S/R)$$

L'énergie mécanique est conservée en absence d'action non conservative (frottement) :

$$E_m(S/R) = Cte$$

Cette relation s'appelle Intégrale Première de l'énergie cinétique.

— L'unité de l'énergie est le kilowatt-heure où le Joule ($1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$)