

Chapitre 1: Géométrie des masses

1.1 Masse d'un système matériel

La masse, notée m (*unité kg*), est une grandeur scalaire positive associée à un système matériel (S) . En mécanique classique, cette masse est représentative de la quantité de matière contenue dans le système matériel.

— Pour un système discret composé de n solides (S_i) de masse m_i :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

— Pour une distribution de masse continue, la masse totale de (S) se calcule simplement en transformant la sommation discrète en intégrale :

$$m = \int_{\text{pes}} dm$$

dm : masse élémentaire d'un élément de matière de (S) :

- $dm = \rho dV$ si la distribution est volumique de masse volumique ρ (*unité kg/m³*),
- $dm = \sigma dS$ si la distribution est surfacique de masse surfacique σ (*unité kg/m²*),
- $dm = \lambda dl$ si la distribution est linéique de masse linéique λ (*unité kg/m*).

Remarque : Pour un solide homogène, la masse volumique, surfacique et linéique sont des constantes :

$$m = \rho V ; m = \sigma S ; m = \lambda L$$

1.2 Centre d'inertie ou centre de masse

1.2.1 Définitions

Le centre d'inertie d'un système matériel (S) de masse m est le point G défini par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_{\text{pes}} \vec{OP} dm$$

Où O est un point quelconque de l'espace

Cette expression est équivalente à :

$$\int_{\text{pes}} \vec{GP} dm = \vec{0}$$

Si le système matériel (S) , de masse m , est composé de n solides (S_i) , $(i = 1 \dots n)$, de masse m_i et de centre d'inertie G_i , le centre d'inertie G de (S) est donné par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{OG}_i$$

Le point G n'est autre que le barycentre des points G_i affectés des masses m_i de chacun des solides (S_i) .

1.2.2 Propriétés

- Si le système matériel (S) est indéformable, le point G est unique et fixe par rapport à tout repère qui lui est attaché. Ce repère est appelé repère du centre d'inertie.
- Si le système matériel (S) admet un élément de symétrie matérielle (centre, axe, plan), son centre d'inertie appartient à cet élément.

N.B : On dit qu'il y a symétrie matérielle s'il y a simultanément symétrie géométrique et symétrie de répartition de la masse volumique (ou surfacique ou linéique).

1.2.3 Applications

a) Centre d'inertie d'un plateau circulaire

Un plateau circulaire homogène (S) de masse m est modélisé par un disque de centre O , de rayon R , d'épaisseur négligeable et percé d'un trou de centre A et de rayon r .

Déterminer la position du centre d'inertie G du plateau.

On décompose le plateau (S)

→ Un disque S_1 de centre d'inertie O

et de masse $m_1 = \sigma S_1$

→ Un disque S_2 de centre d'inertie A et

de masse $m_2 = \sigma S_2$

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} (m_1 \vec{OO} + m_2 \vec{OA}) = \frac{1}{\sigma} (S_1 \vec{OO} + S_2 \vec{OA})$$

$$= - \frac{S_2}{S} \vec{OA} = - \frac{\pi r^2}{\pi R^2 - \pi r^2} d \vec{x}$$

$$\vec{OG} = \frac{-r^2}{R^2 - r^2} \vec{x}$$

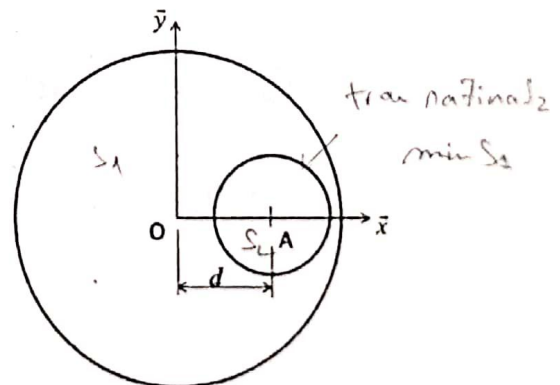


FIGURE 1.1 – Plateau circulaire

b) Centre d'inertie d'un secteur circulaire d'une couronne

Déterminer le centre d'inertie du secteur circulaire d'angle 2α d'une couronne homogène de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e .

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{m} \int_{P \in S} \vec{OP} dm \\ \dots \text{symétrie} \dots \text{par rapport à l'axe } (Ox) \Rightarrow x_G &= \frac{1}{m} \int_{P \in S} x_p dm \\ \dots x_G &= \frac{1}{S} \int_{P \in S} x_p ds \\ \dots S &= \int_{\alpha}^{-\alpha} \int_{R_i}^{R_e} r dr d\theta \dots x_p = r \cos \theta \\ \dots S &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{R_i}^{R_e} r dr d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_e} d\theta = 2\alpha \left(\frac{R_e^2 - R_i^2}{2} \right) \\ \dots &= \alpha (R_e^2 - R_i^2) \\ \dots x_G &= \frac{1}{\alpha (R_e^2 - R_i^2)} \int_{R_i}^{R_e} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha (R_e^2 - R_i^2)} \alpha \sin \alpha \left(\frac{R_e^3 - R_i^3}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\vec{OG} = \frac{2}{3} \frac{(R_e^3 - R_i^3)}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \vec{x}$$

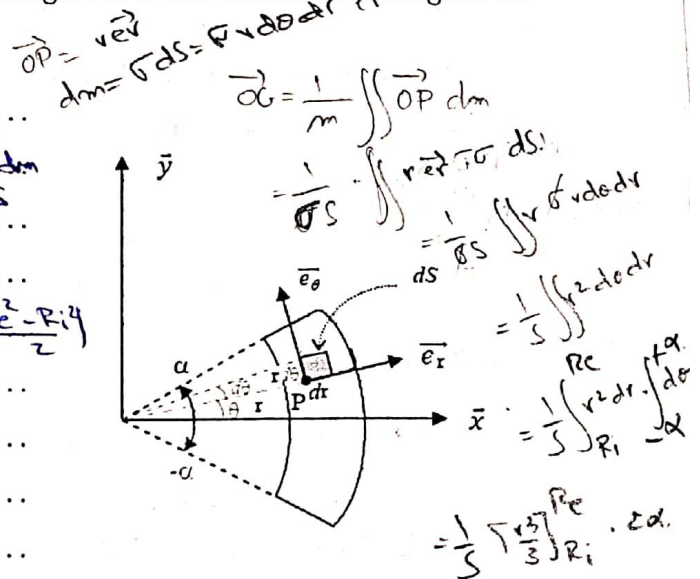


FIGURE 1.2 – Secteur circulaire

1.3 Théorèmes de Guldin

1.3.1 Premier théorème : centre d'inertie d'une courbe matérielle plane (simple)

Considérons une courbe (C) de longueur L contenue dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ qui ne coupe pas l'axe $(O, \vec{z})$.

La position du centre d'inertie G de la courbe C est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \frac{1}{L} \int_{P \in C} \vec{OP} dl \\ \dots \text{En projection sur l'axe } (Ox) \dots \\ \dots \text{on obtient } x_G &= \frac{1}{L} \int_{P \in C} x_p dl \\ \dots 2\pi x_G &= \frac{1}{L} \int_{P \in C} 2\pi x_p dl \end{aligned}$$

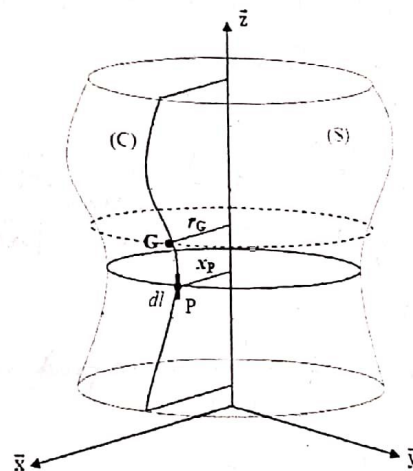


FIGURE 1.3 – 1er théorème de Guldin

$$2\pi x_G = \frac{1}{L} \underbrace{\int_{P \in S} 2\pi x_p dl}_S$$

Avec S correspond à la définition mathématique de l'aire de la surface (S) engendrée par la

rotation de la courbe (C) autour de l'axe (O, $\vec{z}$).

Théorème 1. L'aire de la surface (S) engendrée par la rotation d'une courbe matérielle plane autour d'un axe de son plan et qui ne le coupe pas est égale au produit de la longueur L de la courbe (C) par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie G .

$$S = 2\pi x_G L$$

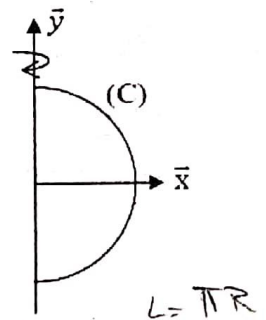
Exemple

— Centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon R

..... $S = 2\pi L \times G$ $G \in (O\vec{x})$ (Ox) axe de symétrie

..... $L = \pi R$, $S = 4\pi R^2$

..... $\Rightarrow x_G = \frac{4\pi R^2}{2\pi \times \pi R} = \frac{2R}{\pi}$



1.3.2 Deuxième théorème : centre d'inertie d'une surface matérielle plane

Considérons une surface (Σ) d'aire S contenue dans le plan ($O, \vec{x}, \vec{z}$) qui ne coupe pas l'axe ($O, \vec{z}$).

La position du centre d'inertie G de la surface (Σ) est donnée par la relation :

..... $\vec{OG} = \frac{1}{S} \iint_{P \in \Sigma} \vec{OP} dS$
..... Projection sur l'axe $(O\vec{x})$ on obtient.

..... $x_G = \frac{1}{S} \iint_{P \in \Sigma} x_P dS$

..... multiplions les deux membres par 2π on obtient :

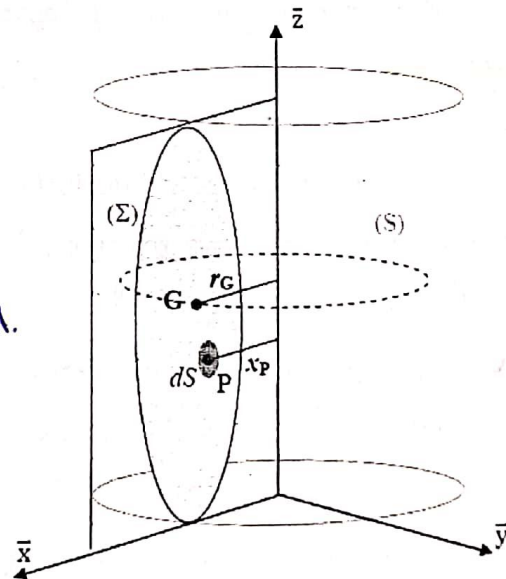


FIGURE 1.4 – 2ème théorème de Guldin

$$2\pi x_G = \frac{1}{S} \underbrace{\iint_{P \in \Sigma} 2\pi x_P dS}_V$$

Avec V correspond à la définition mathématique du volume engendrée par la rotation de la surface (Σ) autour de l'axe ($O, \vec{z}$).

Théorème 2. Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie.

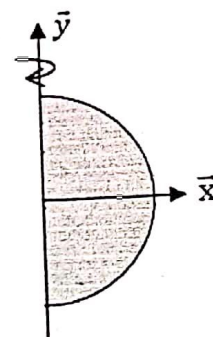
$$V = 2\pi x_G S$$

Exemple

— Centre d'inertie d'un demi-disque de rayon R

..($\vec{x}$).. est un axe de symétrie. $\Rightarrow G \in (\vec{x})$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{V}{2\pi S} \\ S &= \frac{\pi R^2}{2}, \quad V = \frac{1}{2} \pi R^3 \\ \Rightarrow x_G &= \frac{\frac{1}{2} \pi R^3}{2\pi \frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$



1.4 Moment d'inertie - Matrice d'inertie

La difficulté de mettre un solide en mouvement ne dépend pas seulement de la masse m . Dans le cas d'un mouvement de translation la masse suffit, mais pour des mouvements plus complexes, la répartition de cette masse sur le solide doit être retenue.

Deux quantités scalaires : le moment d'inertie et le produit d'inertie, caractérisent cette répartition autour d'un axe. Ces deux quantités s'expriment en $Kg.m^2$ et nous allons détailler leurs propriétés.

1.4.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

Par définition, le moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) d'un point matériel (P) de masse m , situé à une distance r de cet axe est :

$$I(P/\Delta) = r^2 dm$$

Pour un solide qui est constitué d'une infinité de points matériels, le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est obtenu par une intégration :

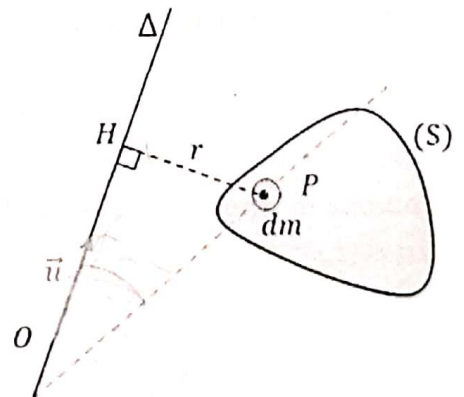
$$I(S/\Delta) = \int_{P \in S} r^2 dm.$$

Soient $\vec{u}$ le vecteur directeur de l'axe (Δ) et O son origine.

Notons P un point quelconque de (S) et H le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur (Δ) tel que : $\|\vec{PH}\| = r$.

On remarque que :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{OP}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{OP}\| \sin(\vec{u}, \vec{OP}) = \|\vec{PH}\|$$



Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (Δ) est égal à :

$$\begin{aligned} I(S/\Delta) &= \int_{(P \in S)} (\vec{u} \wedge \vec{OP})^2 dm = \int_{(P \in S)} (\vec{u} \wedge \vec{OP}) (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm \\ &= \dots \int_{P \in S} \|\vec{PH}\|^2 dm = \dots \int_{P \in S} \vec{u} \cdot (\vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP})) dm \end{aligned}$$

Ce qui fait apparaître l'opérateur d'inertie de solide (S)

$$= \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

1.4.2 Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie d'un solide (S), en un point O, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace vectoriel fait correspondre le vecteur :

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

Cet opérateur est linéaire, en effet $\forall (\mu \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}), \forall (\vec{u}, \vec{v})$ on a :

$$\vec{J}_O(S, \mu \vec{u} + \lambda \vec{v}) = \mu \vec{J}_O(S, \vec{u}) + \lambda \vec{J}_O(S, \vec{v})$$

1.4.3 Matrice d'inertie

L'opérateur d'inertie est linéaire.

En effet $\forall \vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \vec{J}_O(S, \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}) = \alpha \vec{J}_O(S, \vec{x}) + \beta \vec{J}_O(S, \vec{y}) + \gamma \vec{J}_O(S, \vec{z})$$

On peut écrire l'opérateur sous la forme matricielle suivante :

$$\vec{J}_O(S, \vec{u}) = [I_O(S)] \cdot \vec{u}$$

$[I_O(S)]$ s'appelle la matrice d'inertie au point O du solide (S), relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, s'obtient en disposant en colonnes les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de la base par l'opérateur d'inertie.

$$[I_O(S)] = [\vec{J}_O(S, \vec{x}), \vec{J}_O(S, \vec{y}), \vec{J}_O(S, \vec{z})]$$

Déterminons la première colonne de la matrice :

$$\begin{aligned} \vec{J}_O(S, \vec{x}) &= \int_{(P \in S)} \vec{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{OP}) dm = \int_{P \in S} (\vec{x} \times + y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge (x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}) dm \\ &= \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm \vec{x} - \int_{P \in S} xy dm \vec{y} - \int_{P \in S} xz dm \vec{z} \end{aligned}$$

De même :

$$\vec{J}_O(S, \vec{y}) = - \int_{(P \in S)} yx dm \vec{x} + \int_{(P \in S)} (x^2 + z^2) dm \vec{y} - \int_{(P \in S)} yz dm \vec{z}$$

$$\vec{J}_O(S, \vec{z}) = - \int_{(P \in S)} zx dm \vec{x} - \int_{(P \in S)} zy dm \vec{y} + \int_{(P \in S)} (x^2 + y^2) dm \vec{z}$$

La matrice est donc :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \int_{(P \in S)} (y^2 + z^2) dm & - \int_{(P \in S)} xy dm & - \int_{(P \in S)} xz dm \\ - \int_{(P \in S)} xy dm & \int_{(P \in S)} (x^2 + z^2) dm & - \int_{(P \in S)} yz dm \\ - \int_{(P \in S)} xz dm & - \int_{(P \in S)} yz dm & \int_{(P \in S)} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les composantes de la matrice d'inertie sont notées par :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Expression du moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe Δ

L'expression du moment d'inertie du solide (S) par rapport à un axe $\Delta(O, \vec{u})$ est donnée par :

$$I_{S/\Delta} = \vec{u} \cdot \vec{J}_O^\top(S, \vec{u}) = \dots\dots\dots$$

Moments d'inertie d'un solide (S) par rapport aux axes d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

— Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$

$$I_{S/(O, \vec{x})} = A = I_{xx} = \int y^2 + z^2 \dots$$

— Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$

$$I_{S/(O, \vec{y})} = B = I_{yy} = \int x^2 + z^2 \dots$$

— Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe $(O, \vec{z})$

$$I_{S/(O, \vec{z})} = C = I_{zz} = \int x^2 + y^2 \dots$$

Produits d'inertie d'un solide (S) par rapport aux plans d'un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

— Produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$

$$D = I_{yz} = \int_{(P \in S)} yz dm$$

— Produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$

$$E = I_{xz} = \int_{(P \in S)} xz dm$$

— Produit d'inertie du solide (S) par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$

$$F = I_{xy} = \int_{(P \in S)} xy dm$$

1.5 Base principale d'inertie

Une base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est appelée base principale d'inertie lorsque la matrice d'inertie est diagonale.

$$[I_O(S)]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- Les axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$ sont appelés axes principaux d'inertie.
- Les trois moments d'inertie A , B et C sont appelés moments principaux d'inertie.

1.6 Symétrie matérielle d'un solide

Pour avoir la matrice d'inertie la plus simple, on commence par choisir le point et orienter la base en tenant compte des éléments de symétrie matérielle.

1.6.1 Plan de symétrie matérielle

Si un solide possède un plan de symétrie matérielle, alors tout axe perpendiculaire à ce plan est principal d'inertie.

- $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie alors $D = E = 0$.
- $(O, \vec{x}, \vec{z})$ est un plan de symétrie alors $D = F = 0$.
- $(O, \vec{y}, \vec{z})$ est un plan de symétrie alors $E = F = 0$.

Remarque : S'il existe au moins deux plans de symétrie alors $D = E = F = 0$

1.6.2 Axe de symétrie matérielle

Si un solide possède un axe de symétrie matérielle alors cet axe est principal d'inertie.

- $(O, \vec{x})$ est un axe de symétrie alors $E = F = 0$.
- $(O, \vec{y})$ est un axe de symétrie alors $D = F = 0$.
- $(O, \vec{z})$ est un axe de symétrie alors $D = E = 0$.

Remarque : Ayant deux axes principaux d'inertie, le troisième est celui qui permet d'avoir un trièdre orthogonal.

1.6.3 Axe de symétrie de révolution

Si un système admet un axe de symétrie de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant cet axe de révolution est principal d'inertie.

La matrice d'inertie est **diagonale**, il est de forme cylindrique ç-à-d :

— si $(O, \vec{z})$ est un axe de symétrie de révolution alors $A = B$:

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

— si $(O, \vec{x})$ est un axe de symétrie de révolution alors :

$$B = C$$

— si $(O, \vec{y})$ est un axe de symétrie de révolution alors :

$$A = C$$

Remarque : Si un solide (S) admet deux axes de symétrie matérielle de révolution alors la matrice d'inertie est de type sphérique :

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1.7 Théorème de Huygens

L'objectif de ce théorème est de changer le point de la matrice. On considère un solide S de masse m , de centre de masse G et de matrice d'inertie **centrale** :

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On cherche à déterminer la matrice d'inertie au point O tel que $\vec{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$.

$\forall P \in S$ on a $\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ et $\vec{GP} = x_1\vec{x} + y_1\vec{y} + z_1\vec{z}$.

Soit :

$$\vec{OP} = \vec{OG} + \vec{GP}$$

On obtient :

$$\begin{cases} x = x_G + x_1 \\ y = y_G + y_1 \\ z = z_G + z_1 \end{cases}$$

Cherchons le moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, $\vec{x}$) :

$$A_O = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \int_{(S)} ((y_G + y_1)^2 + (z_G + z_1)^2) dm$$

$$= \int_{(S)} (y_1^2 + z_1^2) dm + m(y_G^2 + z_G^2) + 2y_G \int_{(S)} y_1 dm + 2z_G \int_{(S)} z_1 dm$$

Handwritten notes: $\int y_1 dm = \int z_1 dm = 0$ and $\int \vec{GP} = 0$

Par définition :

$$A_O = A_G + m(y_G^2 + z_G^2)$$

Par conséquence :

$$A_O = A_G + m(y_G^2 + z_G^2)$$

De même, nous obtenons :

$$B_O = B_G + m(x_G^2 + z_G^2)$$

$$C_O = C_G + m(x_G^2 + y_G^2)$$

Cherchons ensuite la relation entre les produits d'inerties du solide (S) au point O et G :

$$D_O = \int yz dm = \int (y_1 + y_G)(z_1 + z_G) dm$$

$$= \int y_1 z_1 dm + m y_G z_G + y_G \int y_1 dm + z_G \int z_1 dm$$

Or

$$\int y_1 z_1 dm = D_G \text{ et } \int y_1 dm = \int z_1 dm = 0$$

Par conséquence :

$$D_O = D_G + m y_G z_G$$

De même, nous obtenons :

$$E_O = E_G + m x_G z_G$$

$$F_O = F_G + m x_G y_G$$

Le théorème de Huygens établit la relation entre les matrices d'inertie du solide (S) aux points O et G (centre d'inertie du solide) dans la même base B. Il s'écrit :

$$[I_O(S)]_B = [I_G(S)]_B + [I_O(G)]_B$$

avec :

$$[I_O(G)]_B = m \begin{bmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & (x_G^2 + z_G^2) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & (x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_B$$

1.8 Changement de repère

Soit $[I_O(S)]_{B_1}$ une matrice d'inertie du solide (S) au point O à une base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On souhaite calculer la matrice dans la base $B_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. La relation entre la base B_1 et B_2 est :

$$\begin{cases} \vec{x}_2 = a_1 \vec{x}_1 + b_1 \vec{y}_1 + c_1 \vec{z}_1 \\ \vec{y}_2 = a_2 \vec{x}_1 + b_2 \vec{y}_1 + c_2 \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 = a_3 \vec{x}_1 + b_3 \vec{y}_1 + c_3 \vec{z}_1 \end{cases}$$

On appelle $[P_{B_1 \rightarrow B_2}]$ la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 :

$$[P_{B_1 \rightarrow B_2}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

La matrice d'inertie du solide S au point O dans la base B_2 peut être calculé par :

$$[I_O(S)]_{B_2} = [P_{B_1 \rightarrow B_2}]^{-1} [I_O(S)]_{B_1} [P_{B_1 \rightarrow B_2}]$$

Remarque : Pour les bases orthonormées directes on a :

$$[P_{B_1 \rightarrow B_2}]^{-1} = [P_{B_1 \rightarrow B_2}]^T$$