

Devoir de Contrôle du deuxième semestre de Systèmes Techniques Automatisés
Mécanique des Solides Indéformables
Sections : M.P.2 & P.C.2 & T.2
Date : 25 Février 2025

- *aucun document n'est autorisé ;*
- *durée de l'épreuve : 1 Heure ;*
- *le document énoncé comporte 4 pages ;*
- *le document réponses comporte 4 pages ;*

Dans l'industrie mécanique, l'usinage constitue une technique de mise en forme des pièces par enlèvement de matière. Afin de répondre à l'exigence en terme de réduction des coûts de production grâce à une meilleure productivité, de nouvelles techniques de production comme l'Usinage à Grande Vitesse (UGV) ont été développées.

La Figure 1 présente un centre UGV qui est constitué principalement des éléments suivants :

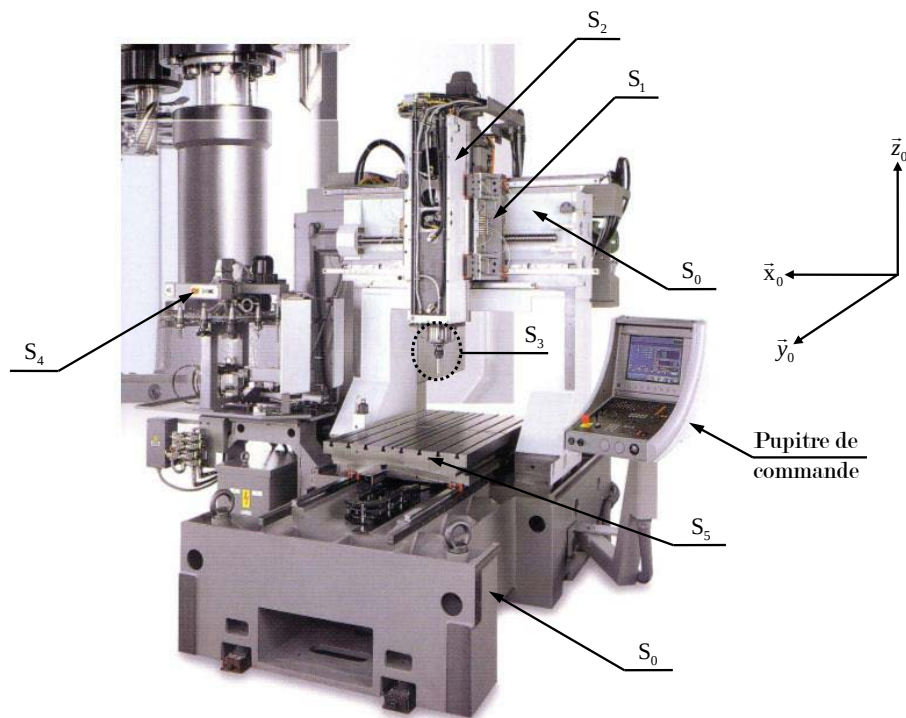


FIGURE 1 – Centre UGV à structure transversale

- un bâti S_0 en béton renforcé de fibres et de matériaux spéciaux ;
- un chariot S_1 en translation par rapport à S_0 de direction $\vec{x}_0$;
- un charriot S_2 porte broche en translation par rapport à S_1 de direction $\vec{z}_0$;
- un ensemble $S_3 = \{\text{outil} + \text{broche}\}$ en rotation par rapport à S_2 autour de $\vec{z}_0$;
- un changeur d'outils S_4 contenant plusieurs outils ;
- une table S_5 dont l'étude des mouvements est exclu du cadre de ce sujet.

L'objectif de cette étude est de déterminer les actions mécaniques générées par les différents actionneurs du mécanisme.

Le sujet comporte deux parties :

- I. Etude cinétique et dynamique d'une partie du centre UGV.
- II. Etude énergétique du mécanisme actionneur de S_1 .

Remarque : Ces deux parties peuvent être traitées indépendamment.

I. Énoncé relative à l'étude cinétique et dynamique

La Figure 2 représente le schéma cinématique d'une partie du centre UGV.

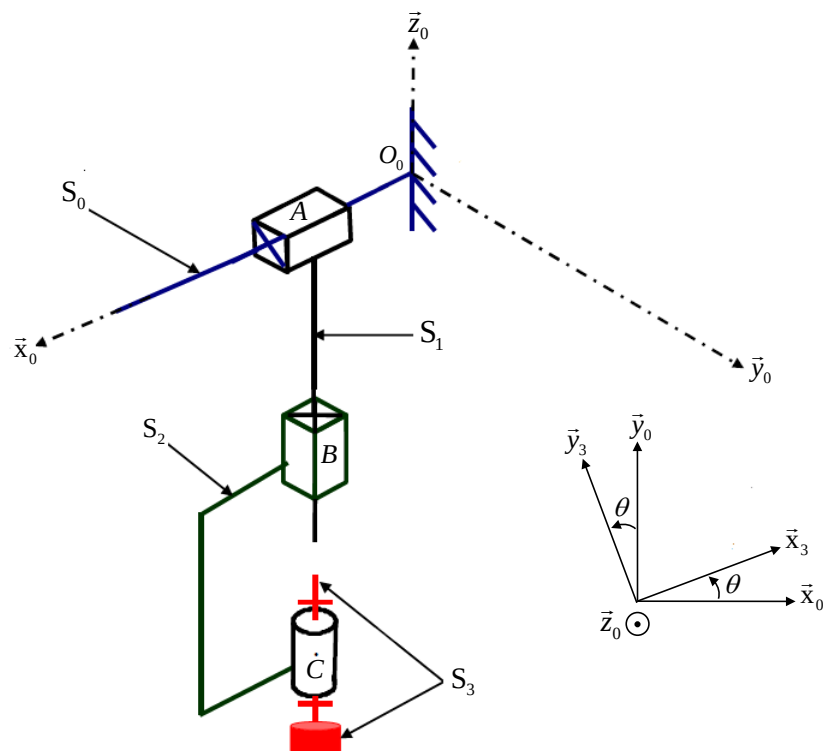


FIGURE 2 – Schéma cinématique d'une partie du centre UGV

Le modèle géométrique de l'ensemble S_3 , supposé homogène, est illustré par la Figure 3.

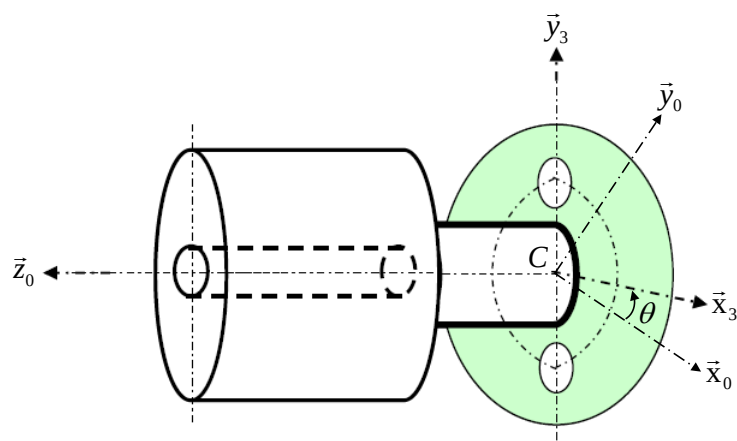


FIGURE 3 – Modèle géométrique du solide S_3

Repères et paramétrage :

- Le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, supposé galiléen, est lié au bâti fixe S_0 .
- Le repère $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au chariot S_1 .
- Le repère $R_2(B, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au chariot S_2 .
- Le repère $R_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié à l'ensemble S_3 tel que $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

On donne :

$$\overrightarrow{O_0A} = \lambda \vec{x}_0 \quad ; \quad \overrightarrow{AB} = \mu \vec{z}_0 \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = L \vec{z}_0$$

où L est une caractéristique dimensionnelle (constante). θ , λ et μ sont des paramètres de position du système, dépendants du temps (variables de configuration).

Données et hypothèses :

- On note par m_1 , m_2 les masses respectives des solides S_1 et S_2 .
- L'ensemble S_3 est de masse m_3 , de centre de masse G_3 tel que $\overrightarrow{CG_3} = L_3 \vec{z}_0$.
Sa matrice d'inertie au point C et dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$:

$$[I_C(S_3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

- Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$.
- Un actionneur A_{12} , de masse négligeable, est placé au niveau de la liaison entre S_1 et S_2 . Il exerce sur le solide S_2 une action mécanique représentée par le torseur glisseur :

$$\{\tau_{(A_{12} \rightarrow S_2)}\}_B = \begin{Bmatrix} F_{12} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Un actionneur A_{23} , de masse négligeable, est placé au niveau de la liaison entre S_2 et S_3 . Il exerce sur le solide S_3 une action mécanique représentée par le torseur couple :

$$\{\tau_{(A_{23} \rightarrow S_3)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{23} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

- Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre les solides i et j au point Q , centre géométrique de la liaison, et dans une base $\mathcal{B}$ est noté :

$$\{\tau_{(i \rightarrow j)}\}_Q = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_Q^{\mathcal{B}}$$

- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

II. Énoncé relative à l'étude énergétique

La Figure 4 montre le schéma cinématique du mécanisme qui permet de générer la translation de S_1 par rapport à S_0 suivant $\vec{x}_0$. Ce mouvement est obtenu grâce à un moto-réducteur et d'un système vis S_6 - écrou S_1 .

- L'ensemble rotor-réducteur est de moment d'inertie équivalent J_R ramené sur l'axe du rotor.
- La vis S_6 est de moment d'inertie J par rapport à son axe $(A, \vec{x}_0)$.
- Le chariot S_1 est de masse m_1 et de centre de masse G_1 . Son mouvement par rapport à S_0 est représenté par le torseur cinématique suivant :

$$\{\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

- La liaison pivot entre S_0 et S_6 est supposée parfaite.
- La liaison glissière entre S_0 et S_1 est avec frottement de glissement de coefficient f .
- L'action du stator sur le rotor du moteur est modélisée par le torseur couple :

$$\{\tau_{(\text{stator} \rightarrow \text{rotor})}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

- La liaison hélicoïdale à gauche d'axe $(A, \vec{x}_0)$ entre S_1 et S_6 est de pas réduit p (exprimé en m/rad). Le torseur de l'action mécanique transmissible par cette liaison hélicoïdale supposée parfaite a la forme simplifiée suivante :

$$\{\tau_{(S_6 \rightarrow S_1)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{61} \vec{x}_0 \\ L_{61} \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

- La vitesse de rotation du rotor par rapport au bâti S_0 est : $\vec{\Omega}_{(\text{rotor}/S_0)} = \omega_m \vec{x}_0$
- Le rapport de réduction du réducteur est k et son rendement est η .
- La vitesse de rotation de la vis S_6 par rapport au chariot S_1 est : $\vec{\Omega}_{(S_6/S_1)} = \omega_{61} \vec{x}_0$ tel que $\omega_{61} = k\omega_m$.
- Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{z}_0$.
- Tous les solides en rotation sont équilibrés dynamiquement.

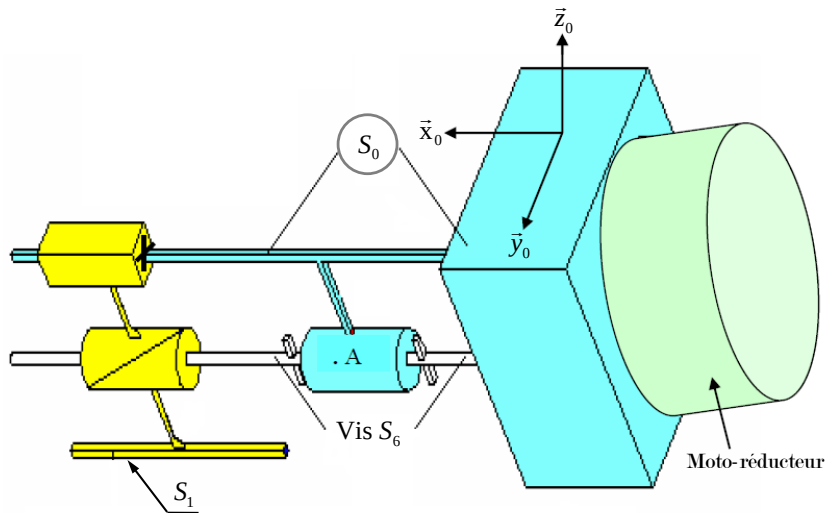


FIGURE 4 – Mécanisme actionneur de S_1

Correction du devoir de contrôle du deuxième semestre de Mécanique des Solides Indéformables

I. Étude cinétique et dynamique

- I.1)** En se basant sur la Figure 3 du document énoncé, justifier la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble S_3 au point C et dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.

Les plans $(C, \vec{x}_3, \vec{z}_0)$ et $(C, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ sont deux plans de symétrie matérielle pour l'ensemble $S_3 \Rightarrow (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est une base principale d'inertie $\Rightarrow D_3 = E_3 = F_3 = 0$; d'où la forme de matrice d'inertie de l'ensemble S_3 .

- I.2)** Cette matrice conservera-t-elle sa forme dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$? Justifier votre réponse.

Non, car dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, l'ensemble S_3 présente uniquement l'axe $(C, \vec{z}_0)$ comme axe de symétrie matérielle $\Rightarrow F_3 \neq 0$.

- I.3)** Est-ce que le solide S_3 est équilibré dynamiquement autour de son axe de rotation? Justifier votre réponse.

Oui, l'ensemble S_3 est équilibré dynamiquement autour de son axe de rotation $(C, \vec{z}_0)$.

En effet :

- Son centre de masse G_3 est situé sur $(C, \vec{z}_0)$;
- $(C, \vec{z}_0)$ est un axe de symétrie matérielle de $S_3 \Rightarrow (C, \vec{z}_0)$ est un axe principal d'inertie.

- I.4)** Déterminer, au point C et dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur cinétique de l'ensemble S_3 dans son mouvement par rapport au bâti S_0 .

$$\vec{P}(S_3/S_0) = m_3 \vec{V}(G_3/S_0) = m_3 \left. \frac{d\vec{O_0G_3}}{dt} \right|_{S_0} = m_3 \left(\left. \frac{d\vec{O_0A}}{dt} \right|_{S_0} + \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{S_0} + \left. \frac{d\vec{BC}}{dt} \right|_{S_0} + \left. \frac{d\vec{CG_3}}{dt} \right|_{S_0} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{P}(S_3/S_0) = m_3 (\dot{\lambda} \vec{x}_0 + \dot{\mu} \vec{z}_0)$$

$$\vec{\sigma}_C(S_3/S_0) = m_3 \vec{CG_3} \wedge \vec{V}(C \in S_3/S_0) + [I_C(S_3)] \vec{\Omega}(S_3/S_0)$$

$$\text{avec : } \vec{\Omega}(S_3/S_0) = \dot{\theta} \vec{z}_0 ; \vec{V}(C \in S_3/S_0) = \vec{V}(G_3 \in S_3/S_0)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_C(S_3/S_0) = m_3 L_3 \vec{z}_0 \wedge (\dot{\lambda} \vec{x}_0 + \dot{\mu} \vec{z}_0) + C_3 \dot{\theta} \vec{z}_0 = m_3 L_3 \dot{\lambda} \vec{y}_0 + C_3 \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\boxed{\{\mathcal{C}_{(S_3/S_0)}\}_C = \begin{Bmatrix} m_3 (\dot{\lambda} \vec{x}_0 + \dot{\mu} \vec{z}_0) \\ m_3 L_3 \dot{\lambda} \vec{y}_0 + C_3 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

- I.5)** Déterminer la projection sur $\vec{z}_0$ du moment dynamique au point C de l'ensemble S_3 dans son mouvement par rapport au bâti S_0 .

$$\vec{\delta}_C(S_3/S_0) \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}_C(S_3/S_0)}{dt} \right|_{S_0} \cdot \vec{z}_0 \quad \text{car} \quad \vec{V}(C/S_0) = \vec{V}(G_3/S_0) \Rightarrow \vec{\delta}_C(S_3/S_0) \cdot \vec{z}_0 = C_3 \ddot{\theta}$$

$$\boxed{\vec{\delta}_C(S_3/S_0) \cdot \vec{z}_0 = C_3 \ddot{\theta}}$$

- I.6)** Appliquer, au point C et en projection sur $\vec{z}_0$, le Théorème du Moment Dynamique à l'ensemble S_3 dans son mouvement par rapport au bâti S_0 . Déduire l'expression du couple C_{23} .

$$\begin{aligned} \text{TMD appliqué à } S_3/S_0 \text{ en projection sur } \vec{z}_0 &\implies \vec{\delta}_C(S_3/S_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\mathcal{M}}_{C(\vec{S}_3 \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{\mathcal{M}}_{C(\vec{S}_3 \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0 &= \vec{\mathcal{M}}_{C(A_{23} \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{C(S_2 \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{C(\vec{g} \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0}_{=0} = C_{23} \\ \boxed{C_{23} = C_3 \ddot{\theta}} \end{aligned}$$

- I.7)** Appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique en projection sur $\vec{z}_0$ à $\Sigma = \{S_2, S_3\}$ dans son mouvement par rapport au bâti S_0 . Déduire l'expression

$$\begin{aligned} \text{TRD appliqué à } \Sigma/S_0 \text{ en projection sur } \vec{z}_0 &\implies \vec{\mathcal{A}}(\Sigma/S_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{\mathcal{A}}(\Sigma/S_0) \cdot \vec{z}_0 &= \left(m_2 \vec{\Gamma}(G_2/S_0) + m_3 \vec{\Gamma}(G_3/S_0) \right) \cdot \vec{z}_0 = (m_2 + m_3) \ddot{\mu} \quad ; \quad (\vec{\Gamma}(G_2/S_0) = \vec{\Gamma}(G_3/S_0)) \\ \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \cdot \vec{z}_0 &= \vec{\mathcal{R}}_{(A_{12} \rightarrow S_2)} \cdot \vec{z}_0 + \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{g} \rightarrow S_2)} \cdot \vec{z}_0 + \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{g} \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\vec{\mathcal{R}}_{(A_{23} \rightarrow S_3)} \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \underbrace{\vec{\mathcal{R}}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \vec{z}_0}_{=0} \\ \implies \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \cdot \vec{z}_0 &= F_{12} - (m_2 + m_3)g \\ \boxed{F_{12} = (m_2 + m_3)(\ddot{\mu} + g)} \end{aligned}$$

II. Étude énergétique

- II.1)** Établir l'expression de $\dot{\lambda}$ en fonction de p , k et ω_m .

$$\begin{aligned} \vec{V}(A \in S_1/S_0) &= \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) + \underbrace{\vec{\Omega}(S_1/S_0)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{G}_1 \vec{A} \\ \implies \vec{V}(A \in S_1/S_6) + \underbrace{\vec{V}(A \in S_6/S_0)}_{=\vec{0}} &= \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) \implies -p\vec{\Omega}(S_1/S_6) = \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) \\ \implies p\vec{\Omega}(S_6/S_1) &= \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) \implies p\omega_{61}\vec{x}_0 = \dot{\lambda}\vec{x}_0 \implies pk\omega_m\vec{x}_0 = \dot{\lambda}\vec{x}_0 \\ \boxed{\dot{\lambda} = pk\omega_m} \end{aligned}$$

- II.2)** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble $E = \{\text{rotor-réducteur}, S_6, S_1\}$ dans son mouvement par rapport au bâti S_0 .

$$\begin{aligned} E_c(E/S_0) &= E_c(\text{rotor-réducteur}/S_0) + E_c(S_6/S_0) + E_c(S_1/S_0) \\ E_c(\text{rotor-réducteur}/S_0) &= \frac{1}{2} J_R \omega_m^2 \quad (\text{rotation autour de l'axe fixe du rotor}) ; \\ E_c(S_6/S_0) &= \frac{1}{2} J \omega_{61}^2 \quad (\text{rotation autour de l'axe fixe de la vis } (A, \vec{x}_0)) ; \\ E_c(S_1/S_0) &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\lambda}^2 \quad (\text{translation d'axe } (A, \vec{x}_0)). \end{aligned}$$

$$\boxed{E_c(E/S_0) = \frac{1}{2} (J_R \omega_m^2 + J \omega_{61}^2 + m_1 \dot{\lambda}^2)}$$

- II.3)** En déduire le moment d'inertie équivalent J_E de l'ensemble E , ramené sur l'axe du rotor.

$$\text{On a } \omega_{61} = k\omega_m \text{ et } \dot{\lambda} = pk\omega_m \implies E_c(E/S_0) = \frac{1}{2} (J_R + Jk^2 + m_1 p^2 k^2) \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_E \omega_m^2$$

$$\boxed{J_E = J_R + (J + m_1 p^2) k^2}$$

II.4) Sachant que la résultante des actions mécaniques transmissibles par la liaison glissière entre S_0 et S_1 est $\vec{R}_{(S_0 \rightarrow S_1)} = X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0$ et en utilisant les lois de Coulomb (dans le cas du glissement et $\dot{\lambda} > 0$), établir l'expression de X_{01} en fonction de Y_{01} , Z_{01} et f .

$$\vec{R}_{(S_0 \rightarrow S_1)} = \underbrace{X_{01} \vec{x}_0}_{\vec{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)}} + \underbrace{Y_{01} \vec{y}_0 + Z_{01} \vec{z}_0}_{\vec{N}_{(S_0 \rightarrow S_1)}} \quad ; \text{ D'après les lois de Coulomb, on a : } X_{01} < 0 \text{ car } \dot{\lambda} > 0$$

$$\left\| \vec{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)} \right\| = f \left\| \vec{N}_{(S_0 \rightarrow S_1)} \right\| \Rightarrow -X_{01} = f \sqrt{Y_{01}^2 + Z_{01}^2}$$

$$X_{01} = -f \sqrt{Y_{01}^2 + Z_{01}^2}$$

II.5) En appliquant le Théorème de la Résultante Dynamique au chariot S_1 dans son mouvement par rapport au bâti S_0 , déterminer l'expression de X_{01} en fonction f , m_1 et g .

TRD appliqué à S_1 dans son mouvement par rapport à $S_0 \Rightarrow \vec{\mathcal{A}}(S_1/S_0) = \vec{\mathcal{R}}_{(\overline{S_1} \rightarrow S_1)}$

$$\vec{\mathcal{A}}(S_1/S_0) = m_1 \vec{\Gamma}(G_1/S_0) = m_1 \ddot{\lambda} \vec{x}_0$$

$$\vec{\mathcal{R}}_{(\overline{S_1} \rightarrow S_1)} = \vec{\mathcal{R}}_{(S_0 \rightarrow S_1)} + \vec{\mathcal{R}}_{(S_6 \rightarrow S_1)} + \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{g} \rightarrow S_1)} = (X_{01} + X_{61}) \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 + (Z_{01} - m_1 g) \vec{z}_0$$

en projection sur $\vec{y}_0 \Rightarrow Y_{01} = 0$; en projection sur $\vec{z}_0 \Rightarrow Z_{01} = m_1 g$

$$X_{01} = -f m_1 g$$

II.6) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à E dans son mouvement par rapport à S_0 , déterminer l'expression du couple moteur C_m en fonction de $\dot{\omega}_m$, J_E , X_{01} , η , p et k .

TEC appliqué à E dans son mouvement par rapport à $S_0 \Rightarrow \frac{dEc(E/S_0)}{dt} = \mathcal{P}_{(\vec{E} \rightarrow E/S_0)} + \mathcal{P}_{\text{int}}(E)$

$$\Rightarrow \frac{dEc(E/S_0)}{dt} = \mathcal{P}_{(\text{stator} \rightarrow E/S_0)} + \mathcal{P}_{(S_0 \rightarrow S_1/S_0)} + \mathcal{P}_{(S_0 \rightarrow S_6/S_0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow E/S_0)}$$

où $\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow E/S_0)} = \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow S_1/S_0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow S_6/S_0)} + \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow \text{rotor-réducteur}/S_0)}$

- $\mathcal{P}_{(\text{stator} \rightarrow E/S_0)} = \eta C_m \omega_m$
- $\mathcal{P}_{(S_0 \rightarrow S_1/S_0)} = \vec{\mathcal{R}}_{(S_0 \rightarrow S_1)} \cdot \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) = \dot{\lambda} X_{01}$
- $\mathcal{P}_{(S_0 \rightarrow S_6/S_0)} = 0$ car la liaison est parfaite et S_0 lié à $\mathcal{R}_0$.
- $\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow S_1/S_0)} = \vec{\mathcal{R}}_{(\vec{g} \rightarrow S_1)} \cdot \vec{V}(G_1 \in S_1/S_0) = -m_1 g \vec{z}_0 \cdot \dot{\lambda} \vec{x}_0 = 0$
- $\mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow S_6/S_0)} = \mathcal{P}_{(\vec{g} \rightarrow \text{rotor-réducteur}/S_0)} = 0$ car ces solides sont équilibrés dynamiquement $\Rightarrow$ la vitesse de leur centre de masse respective est nulle vue qu'il est situé sur l'axe de rotation fixe par rapport à S_0 .

$$\Rightarrow J_E \dot{\omega}_m \omega_m = \eta C_m \omega_m + \dot{\lambda} X_{01} = \eta C_m \omega_m + p k \omega_m X_{01} \Rightarrow J_E \dot{\omega}_m = \eta C_m + p k X_{01}$$

$$C_m = \frac{J_E \dot{\omega}_m - p k X_{01}}{\eta}$$

II.7) Dédurre l'expression du couple C_m en régime permanent du moteur ($\omega_m = \text{Cte}$) en fonction de p , k , m_1 , g , η et f .

En régime permanent $\omega_m = \text{Cte} \Rightarrow \dot{\omega}_m = 0$; $X_{01} = -f m_1 g$

$$C_m = \frac{p k f m_1 g}{\eta}$$