

Correction du devoir de contrôle du deuxième semestre de Mécanique des Solides Indéformables

- 1) Déterminer, au point C et dans la base $\mathcal{B}_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$, le torseur cinématique de l'échelle (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0) en fonction de $b, \alpha, \dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$.

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(2/0) &= \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{y}_0 \quad ; \quad \vec{y}_0 = -\sin \alpha \vec{x}_2 + \cos \alpha \vec{y}_2 \\ \vec{V}(C \in 2/0) &= \vec{V}(C \in 1/0) = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{OC} \quad \text{avec : } \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = b \vec{x}_1 + (a+c) \vec{y}_0 \\ \Rightarrow \vec{V}(C \in 2/0) &= \dot{\theta} \vec{y}_0 \wedge (b \vec{x}_1 + (a+c) \vec{y}_0) = -b\dot{\theta} \vec{z}_1\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_C = \begin{Bmatrix} -\dot{\theta} \sin \alpha & 0 \\ \dot{\theta} \cos \alpha & 0 \\ -\dot{\alpha} & -b\dot{\theta} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

- 2) En déduire le vecteur vitesse du point G_2 de l'échelle (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \vec{V}(C \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{CG}_2$$

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = h\dot{\alpha} \vec{x}_2 + L\dot{\alpha} \vec{y}_2 - (b - L\cos \alpha + h\sin \alpha) \dot{\theta} \vec{z}_1$$

- 3) Déterminer, dans la base $\mathcal{B}_2$, le torseur cinétique au point C de l'échelle (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\vec{P}(2/0) = m_2 \vec{V}(G_2/0)$$

$$\vec{\sigma}_C(2/0) = m_2 \vec{CG}_2 \wedge \vec{V}(C \in 2/0) + [I_C(2)] \vec{\Omega}(2/0)$$

$$\{\mathcal{C}_{(2/0)}\}_C = \begin{Bmatrix} m_2 h \dot{\alpha} & -(m_2 b h + A_2 \sin \alpha) \dot{\theta} \\ m_2 L \dot{\alpha} & -(m_2 b L + B_2 \cos \alpha) \dot{\theta} \\ -m_2 (b - L \cos \alpha + h \sin \alpha) & -C_2 \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

■ Dimensionnement du vérin hydraulique

Dans cette partie, on se place dans le cas où le moteur est à l'arrêt : $\theta = \text{cste}$, tandis que α est variable.

- 4) Déterminer le moment dynamique au point C de l'échelle (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0) en projection sur $\vec{z}_1$.

$$\theta = \text{cste} \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}_C(2/0) = -C_2 \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_C(2/0) \cdot \vec{z}_1 = \frac{d\vec{\sigma}_C(2/0) \cdot \vec{z}_1}{dt} - \underbrace{\vec{\sigma}_C(2/0) \cdot \frac{d\vec{z}_1}{dt}}_{=0} + m_2 \underbrace{\left(\vec{V}(C/0) \wedge \vec{V}(G_2/0) \right) \cdot \vec{z}_1}_{=0 \text{ car } \vec{V}(C/0) \text{ est porté par } \vec{z}_1} = -C_2 \ddot{\alpha}$$

$$\vec{\delta}_C(2/0) \cdot \vec{z}_1 = -C_2 \ddot{\alpha}$$

- 5) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la tige du vérin (4) dans son mouvement par rapport au châssis (0) en projection sur $\vec{x}_3$ et en déduire la relation entre X_{42} et l'effort F .

$$\text{Théorème de la résultante dynamique} \Rightarrow \vec{A}(4/0) \cdot \vec{x}_3 = \vec{R}(\bar{4} \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{A}(4/0) = \vec{0} \text{ (masse négligeable)}$$

$$\vec{R}(\bar{4} \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = \vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 + \vec{R}(2 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 + \vec{R}(\text{fluide} \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_3 = -X_{42} + F$$

$$X_{42} = F$$

- 6) Déterminer le moment au point C des actions mécaniques extérieures exercées sur l'échelle (2) en projection sur $\vec{z}_1$.

$$\vec{M}_C(\bar{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = \vec{M}_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_C(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 + \vec{M}_C(\vec{g} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1$$

$$\vec{M}_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = 0$$

$$\vec{M}_C(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = \vec{M}_B(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 + (\vec{R}(4 \rightarrow 2) \wedge \vec{BC}) \cdot \vec{z}_1 = (X_{42} \vec{x}_3 \wedge d\vec{x}_2) \cdot \vec{z}_1 = -dX_{42} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\vec{M}_C(\vec{g} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = (\vec{R}(\vec{g} \rightarrow 2) \wedge \vec{G_2C}) \cdot \vec{z}_1 = -m_2 g \vec{y}_0 \wedge (L\vec{x}_2 - h\vec{y}_2) \cdot \vec{z}_1 = -m_2 g(-L\cos\alpha + h\sin\alpha)$$

$$\vec{M}_C(\bar{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 = -dX_{42} \sin(\alpha + \beta) - m_2 g(-L\cos\alpha + h\sin\alpha)$$

- 7) Appliquer le théorème du moment dynamique au point C à l'échelle (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0) en projection sur $\vec{z}_1$ et en déduire l'expression de l'effort F du vérin en fonction de α , $\ddot{\alpha}$, β et les données du problème.

$$\text{Théorème du moment dynamique} \Rightarrow \vec{\delta}_C(2/0) \cdot \vec{z}_1 = \vec{M}_C(\bar{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 ; X_{42} = F$$

$$F = \frac{C_2 \ddot{\alpha} - m_2 g(-L\cos\alpha + h\sin\alpha)}{d \sin(\alpha + \beta)}$$

■ Dimensionnement du moteur

On se place dans le cas où le vérin est bloqué : $\alpha = \text{cste}$, $\beta = \text{cste}$ et $\lambda = \text{cste}$, tandis que θ est variable.

- 8) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0) + E_c(4/0)$$

$$E_c(3/0) = E_c(4/0) = 0 \text{ (masse et inertie négligeables)}$$

$$E_c(1/0) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 \text{ (rotation autour de l'axe fixe (A, } \vec{y}_0))$$

$$E_c(2/0) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}(2/0) \}_C \otimes \{ \mathcal{V}(2/0) \}_C \text{ avec } \underline{\alpha} = \text{cste} \Rightarrow \dot{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow E_c(2/0) = \frac{1}{2} (m_2 b^2 - 2m_2 b(L\cos\alpha - h\sin\alpha) + A_2 \sin^2\alpha + B_2 \cos^2\alpha) \dot{\theta}^2$$

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} (I_1 + m_2 b^2 - 2m_2 b(L\cos\alpha - h\sin\alpha) + A_2 \sin^2\alpha + B_2 \cos^2\alpha) \dot{\theta}^2$$

- 9) Déterminer l'expression de la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$P_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} = P_{(0 \rightarrow 1/0)} + P_{(\text{Moteur} \rightarrow 1/0)} + P_{(\text{fluide} \rightarrow 4/0)} + P_{(\vec{g} \rightarrow 1/0)} + P_{(\vec{g} \rightarrow 2/0)}$$

$$P_{(0 \rightarrow 1/0)} = 0 \quad (\text{liaison parfaite et } \mathcal{R}_0 \text{ lié à } (0))$$

$$P_{(\text{Moteur} \rightarrow 1/0)} = C_m \dot{\theta}$$

$$P_{(\text{fluide} \rightarrow 4/0)} = \vec{R}(\text{fluide} \rightarrow 4) \cdot \vec{V}(B \in 4/0)$$

$$\vec{V}(B \in 4/0) = \vec{V}(B \in 4/3) + \vec{V}(B \in 3/0) = \dot{\lambda} \vec{x}_3 + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{AB} = -\lambda \dot{\theta} \cos \beta \vec{z}_1 \quad (\text{car } \underline{\dot{\lambda} = \dot{\beta} = 0})$$

$$\Rightarrow P_{(\text{fluide} \rightarrow 4/0)} = F \vec{x}_3 \cdot (-\lambda \dot{\theta} \cos \beta \vec{z}_1) = 0$$

$$P_{(\vec{g} \rightarrow 1/0)} = \vec{R}(\vec{g} \rightarrow 1) \cdot \vec{V}(G_1/0) = -m_1 g \vec{y}_0 \cdot (\vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{OG}_1) = 0 \quad (\text{car } \vec{\Omega}(1/0) \text{ est porté par } \vec{y}_0)$$

$$P_{(\vec{g} \rightarrow 2/0)} = \vec{R}(\vec{g} \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(G_2/0) = -m_2 g \vec{y}_0 \cdot (-b + L \cos \alpha - h \sin \alpha) \dot{\theta} \vec{z}_1 = 0 \quad (\underline{\dot{\alpha} = 0})$$

$$P_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} = C_m \dot{\theta}$$

- 10) Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$P_{\text{int}}(\Sigma) = P_{(1 \leftrightarrow 2)} + P_{(2 \leftrightarrow 4)} + P_{(4 \leftrightarrow 3)} + P_{(3 \leftrightarrow 1)} = 0 \quad (\text{toutes ces liaisons sont parfaites})$$

$$P_{\text{int}}(\Sigma) = 0$$

- 11) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0) et en déduire l'expression du couple moteur C_m .

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique} \Rightarrow \frac{dE_c(\Sigma/0)}{dt} = P_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/0)} + P_{\text{int}}(\Sigma)$$

$$(I_1 + m_2 b^2 - 2m_2 b(L \cos \alpha - h \sin \alpha) + A_2 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \ddot{\theta} = C_m \dot{\theta} \quad (\underline{\dot{\alpha} = 0})$$

$$C_m = (I_1 + m_2 b^2 - 2m_2 b(L \cos \alpha - h \sin \alpha) + A_2 \sin^2 \alpha + B_2 \cos^2 \alpha) \ddot{\theta}$$