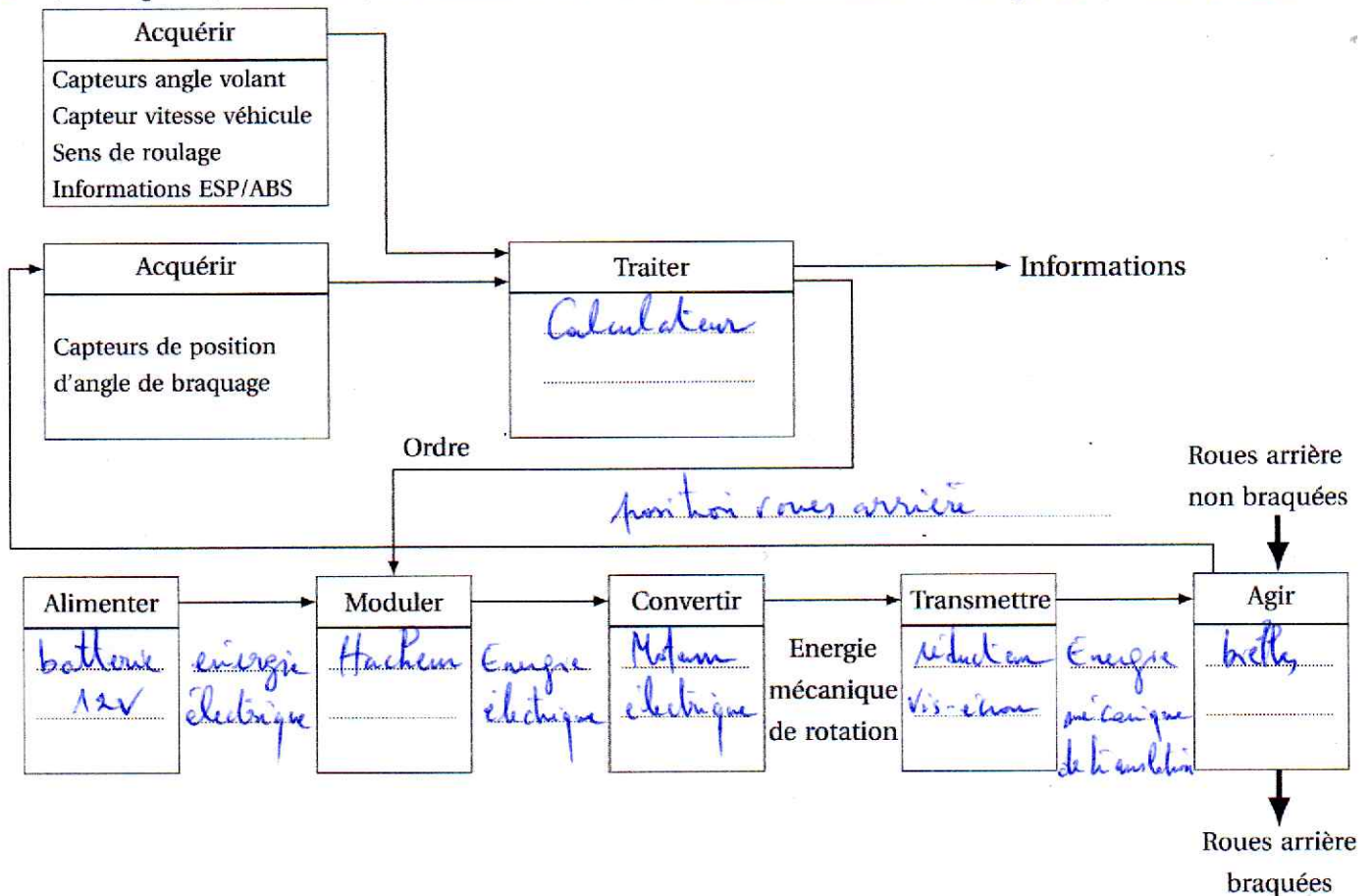


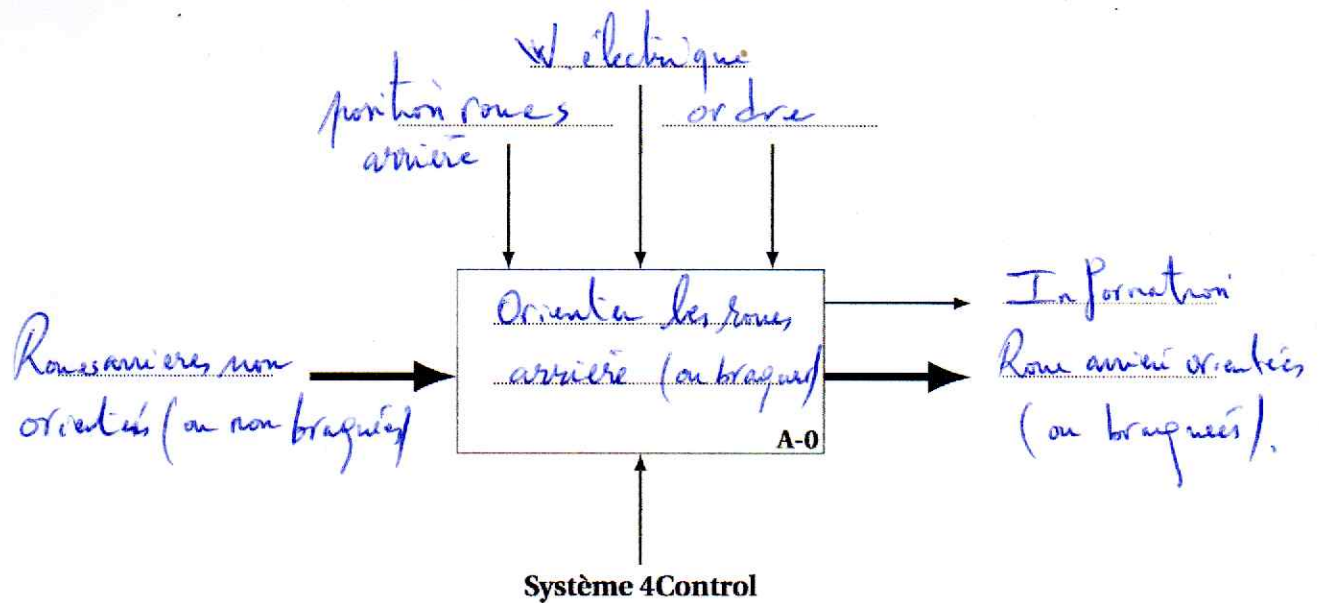
PARTIE A. CONCEPTION MÉCANIQUE (Voir les pages 1, 2 et 5 du document énoncé)

A.1. ANALYSE FONCTIONNELLE ET STRUCTURELLE

A.1.1) Compléter, ci-dessous, les chaînes fonctionnelles d'informations et d'énergie du système 4Control.



A.1.2) Compléter le diagramme SADT A-0 du système 4Control.



A.2. CARACTÉRISATION DU VÉRIN ÉLECTRIQUE

A.2.1) Sachant que le moteur électrique du vérin tourne à une vitesse de rotation $N_1 = 3000 \text{ tr/min}$, calculer la vitesse de rotation N_3 de la Roue (3).

$$N_3 = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_3} N_1 = \frac{20 \cdot 10}{40 \cdot 50} \cdot 3000 = 300 \text{ tr/min}$$

$$N_3 = 300 \text{ tr/min}$$

A.2.2) En déduire la vitesse de translation V de la tige (4) du vérin. Le résultat sera exprimé en mètres par seconde (m/s).

$$V = \frac{P}{2\pi} \frac{\pi \cdot N_3}{30} = \frac{P \cdot N_3}{60} = \frac{2 \cdot 10^{-3} \times 300}{60} = 0,01 \text{ m/s}$$

$$V = 0,01 \text{ m/s}$$

A.2.3) Sachant que le couple moteur est $C_1 = 0,5 \text{ N.m}$ et que le rendement du réducteur est $\eta = 0,45$, calculer la force de poussée F développée par le vérin électrique.

$$P_s = \eta \cdot P_e = \eta \cdot C_1 \cdot \frac{\pi N_1}{30} \quad \text{avec } P_s = F \cdot V$$

$$\Rightarrow F = \frac{\eta \cdot C_1 \cdot \pi N_1}{30 \cdot V} = \frac{0,45 \times 0,5 \times \pi \cdot 3000}{30 \times 0,01} = 7068,58 \text{ N}$$

$$F = 7068,58 \text{ N}$$

PARTIE B. MÉCANIQUE DES SOLIDES INDÉFORMABLES

PARTIE B.1. CHOIX DE L'ACTIONNEUR (Voir les pages 2, 3 et 5 du document énoncé)

L'objectif de cette partie est de dimensionner le vérin électrique en déterminant l'expression de l'effort F .

B.1.1) Déterminer, au point A, le torseur cinématique de la biellette (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\vec{\omega}_{(2/0)} = \dot{\alpha} \vec{z}_0; \quad \vec{V}(A \in 2/0) = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_0 = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \dot{\alpha} \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

B.1.2) En déduire le vecteur vitesse du point G_2 de la biellette (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\begin{aligned} \vec{V}(G_2 \in 2/0) &= \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\omega}_{(2/0)} \wedge \vec{AG}_2 \\ &= \dot{\alpha} \vec{x}_0 + \dot{\alpha} \vec{z}_0 \wedge \frac{a}{2} \vec{y}_2 = \dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2$$

B.1.3) Déterminer le torseur cinétique au point G_2 de la biellette (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\begin{aligned} \vec{P}_{(2/0)} &= m_2 \vec{V}(G_2/0) = m_2 \left(\dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2 \right) \\ \vec{J}_{G_2(2/0)} &= [I_{G_2(2)}] \vec{\omega}_{(2/0)} = \begin{bmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = J_2 \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

$(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{C}_{(2/0)}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2 \left(\dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2 \right) \\ J_2 \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

B.1.4) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la biellette (2) dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\begin{aligned} E_c(2/0) &= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{C}_{(2/0)} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(2/0)} \right\}_{G_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(m_2 \left(\dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2 \right) \cdot \left(\dot{\alpha} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{y}_2 \right) + J_2 \dot{\alpha}^2 \right) \end{aligned}$$

$$E_c(2/0) = \frac{1}{2} \left(m_2 (\dot{\lambda}^2 - \frac{a}{2} \dot{\lambda} \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{a}{2} \dot{\lambda} \dot{\alpha} \sin \alpha + \frac{a^2}{4} \dot{\alpha}^2) + J_2 \dot{\alpha}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(m_2 (\dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda} \dot{\alpha} a \sin \alpha + \frac{a^2}{4} \dot{\alpha}^2) + J_2 \dot{\alpha}^2 \right)$$

$$E_c(2/0) = \frac{1}{2} m_2 \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \dot{\alpha}^2 - m_2 \dot{\lambda} \dot{\alpha} \frac{a}{2} \sin \alpha$$

1.5) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$E_c(E/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0)$$

$$\otimes E_c(1/0) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\lambda}^2 \quad (\text{translation par rapport } \vec{x}_0)$$

$$\otimes E_c(3/0) = \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2 \quad (\text{rotation autour de l'axe fixe } (C, \vec{z}_0))$$

$$E_c(E/0) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2} \left(J_2 + m_2 \frac{a^2}{4} \right) \dot{\alpha}^2 - m_2 \dot{\lambda} \dot{\alpha} \frac{a}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} J_3 \dot{\beta}^2$$

Dans la suite, on admet que l'énergie cinétique de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0) s'écrit :

$$E_c(E/0) = \frac{1}{2} M_{eq}(t) \dot{\lambda}^2 \quad ; \quad \text{où } M_{eq}(t) \text{ désigne la masse équivalente du système ramenée à la tige du vérin.}$$

1.6) Déterminer l'expression de la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au châssis (0).

$$\vec{E} = \left(\begin{array}{c} \vec{0}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \text{remont} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \vec{g} \\ \vec{g} \\ \vec{g} \end{array} \right) \quad \otimes P_{(0 \rightarrow 1/0)} = P_{(0 \rightarrow 3/0)} = 0 \quad \text{car liaisons parfaites et Robin (0).}$$

$$\otimes P_{(v_2 \rightarrow 1/0)} = F \dot{\lambda}$$

$$\otimes P_{(\text{remont} \rightarrow 3/0)} = k \beta \dot{\beta}$$

$$\otimes P_{(\vec{g} \rightarrow 1/0)} = -m_1 g \vec{g}_0 \cdot \dot{\lambda} \vec{x}_0 = 0 \quad ; \quad \otimes P_{(\vec{g} \rightarrow 2/0)} = -m_2 g \vec{g}_0 \cdot \left(\dot{\lambda} \vec{x}_0 + \frac{a}{2} \dot{\alpha} \vec{j}_2 \right) = 0$$

$$\otimes P_{(\vec{g} \rightarrow 3/0)} = -m_3 g \vec{g}_0 \cdot \underbrace{\vec{V}(C/0)}_{=0} = 0$$

$$P_{(\vec{E} \rightarrow E/0)} = F \dot{\lambda} + k \beta \dot{\beta}$$

B.1.7) Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.

$$P_{\text{int}}(E) = P(1 \leftrightarrow 2) + P(2 \leftrightarrow 3) = 0 \text{ liaisons parfaites}$$

$$P_{\text{int}}(E) = 0$$

B.1.8) Déterminer l'expression de l'effort F du vérin en fonction de M_{eq} , $\ddot{\lambda}$, $\dot{\lambda}$, k , β et $\dot{\beta}$.

$$\begin{aligned} \text{T.E.C appliqué à } (E) &\Rightarrow \frac{dE_C(E/0)}{dt} = P_{(E \rightarrow E/0)} + P_{\text{int}}(E) \\ \Rightarrow M_{\text{eq}} \ddot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{M}_{\text{eq}} \dot{\lambda} &= F \dot{\lambda} + k \beta \dot{\beta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{\dot{\lambda}} \left(M_{\text{eq}} \ddot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{M}_{\text{eq}} \dot{\lambda} - k \beta \dot{\beta} \right)$$

$$F = M_{\text{eq}} \ddot{\lambda} + \frac{1}{2} \dot{M}_{\text{eq}} \dot{\lambda} - k \beta \frac{\dot{\beta}}{\dot{\lambda}}$$

PARTIE B.2. INFLUENCE DU MOUVEMENT DES ROUES (Voir les pages 3, 4 et 5 du document énoncé)

B.2.1) Déterminer l'expression du vecteur vitesse du point D (centre de masse de (3)) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\begin{aligned} \vec{V}(D/0) &= \frac{d\vec{OD}}{dt} \Big|_0 = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_0 + \frac{d\vec{AD}}{dt} \Big|_0 = d(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{OA}) + b(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{AD}) \\ &= d(\dot{\psi} \vec{y}_0 \wedge \vec{x}_1) + b((\dot{\beta} + \dot{\psi}) \vec{y}_0 \wedge \vec{x}_2) = d\dot{\psi} \vec{y}_1 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{V}(D/0) = d\dot{\psi} \vec{y}_1 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{y}_2$$

B.2.2) En déduire l'expression de vecteur accélération du point D dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\vec{\Gamma}(D/0) = \frac{d\vec{V}(D/0)}{dt} \Big|_0 = d(\ddot{\psi} \vec{y}_1 - \dot{\psi}^2 \vec{x}_1) + b[(\ddot{\psi} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - (\dot{\psi} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2]$$

$$\vec{\Gamma}(D/0) = d(\ddot{\psi} \vec{y}_1 - \dot{\psi}^2 \vec{x}_1) + b[(\ddot{\psi} + \ddot{\beta}) \vec{y}_2 - (\dot{\psi} + \dot{\beta})^2 \vec{x}_2]$$

2.3) Déterminer l'expression du moment cinétique au point A de la roue (3) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_{A(3/0)} &= m_3 \vec{AD} \wedge \vec{V}(D/0) + [\vec{I}_D(3)] \vec{\omega}'(3/0) ; \vec{\omega}'(3/0) = \dot{\theta} \vec{x}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\
 &= m_3 b \vec{x}_2 \wedge (d\dot{\psi} \vec{y}_1 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{y}_2) + \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\beta} \end{pmatrix} \\
 &= m_3 b (d\dot{\psi} \cos \beta \vec{z}_0 + b(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{z}_0) + A_3 \dot{\theta} \vec{x}_2 + C_3 (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\
 &= A_3 \dot{\theta} \vec{x}_2 + \left[(C_3 + m_3 b^2) (\dot{\psi} + \dot{\beta}) + m_3 b d\dot{\psi} \cos \beta \right] \vec{z}_0
 \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_{A(3/0)} = A_3 \dot{\theta} \vec{x}_2 + \left[(C_3 + m_3 b^2) (\dot{\psi} + \dot{\beta}) + m_3 b d\dot{\psi} \cos \beta \right] \vec{z}_0$$

2.4) Montrer que le moment dynamique au point A de l'ensemble $\Sigma = \{2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0) en projection sur l'axe $\vec{y}_2$ s'écrit : $\vec{\sigma}_A(\Sigma/0) \cdot \vec{y}_2 = A_3 \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\beta})$.

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/0) = \vec{\sigma}_A(2/0) + \vec{\sigma}_A(3/0) \quad \text{avec } \vec{\sigma}_A(2/0) = \vec{0} \text{ car moment cinétique nul}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(\Sigma/0) \cdot \vec{y}_2 = \frac{d}{dt} \left(\vec{\sigma}_A(3/0) \cdot \vec{y}_2 \right) - \vec{\sigma}_A(3/0) \cdot \frac{d\vec{y}_2}{dt} + m_3 \left(\vec{V}(A/0) \wedge \vec{V}(D/0) \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{V}(A/0) = \frac{d}{dt} \left(\vec{OA} \right) = d\dot{\psi} \vec{y}_1 ; \quad \frac{d\vec{y}_2}{dt} = \vec{\omega}(2/0) \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 = -(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{x}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_A(\Sigma/0) \cdot \vec{y}_2 = + A_3 \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\beta}) + m_3 \left(d\dot{\psi} \vec{y}_1 \wedge b(\dot{\psi} + \dot{\beta}) \vec{y}_2 \right) \cdot \vec{y}_2$$

$$\text{d'où } \vec{\sigma}_A(\Sigma/0) \cdot \vec{y}_2 = A_3 \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\beta})$$

B.2.5) Isoler l'ensemble $\Sigma = \{2, 3\}$ et écrire l'équation issue du théorème du moment dynamique au point A en projection sur l'axe $\vec{y}_2$. En déduire l'expression de la composante M_{12} du moment de l'action mécanique de la liaison entre (1) et (2).

$$\Sigma = \left\{ \underset{(1)}{1}, \underset{(2)}{2}, \underset{(3)}{3} ; \text{remont}, \underset{(2)}{2}, \underset{(3)}{3} \right\}, \quad \vec{S}_A(\Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y}_2 = \vec{T}_A(\Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y}_2$$

$$\textcircled{*} \vec{T}_A(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = M_{12} \quad (\text{prod. l'axe } (A, \vec{y}_2))$$

$$\textcircled{*} \vec{T}_A(2 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = \vec{T}_A(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = 0$$

$$\textcircled{*} \vec{T}_A(\text{remont} \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = 0$$

$$\textcircled{*} \vec{T}_A(2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = (\vec{R}_{(2 \rightarrow 3)} \wedge D\vec{A}) \cdot \vec{y}_2 = (-m_3 g \vec{z}_0 \wedge (-b \vec{a}_2)) \cdot \vec{y}_2 = m_3 b g$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}_A(\Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y}_2 = M_{12} + m_3 b g \\ = \vec{T}_A(\Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{y}_2 \end{array} \right.$$

$$M_{12} = A_3 \ddot{\theta} (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) - m_3 b g$$

B.2.6) Sachant que la composante M_{12} du moment de l'action mécanique de la liaison entre (1) et (2) tend à faire basculer la roue (3) autour de l'axe $\vec{y}_2$, engendrant ainsi des vibrations au niveau de cette liaison, déterminer l'expression de $\dot{\beta}$ (vitesse de braquage) permettant d'annuler le moment M_{12} .

$$M_{12} = 0 \Rightarrow A_3 \ddot{\theta} (\dot{\varphi} + \dot{\beta}) - m_3 b g = 0$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{A_3 \ddot{\theta}} (m_3 b g - A_3 \ddot{\theta} \dot{\varphi})$$

$$\dot{\beta} = \frac{m_3 b g}{A_3 \ddot{\theta}} - \dot{\varphi}$$