

TD1 : Géométrie des masses

Exercice 1

Déterminer, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la matrice d'inertie centrale des solides élémentaires suivants (Figure 1) :

- Un cylindre homogène plein, de masse m_c , de rayon R et de hauteur H . En déduire la matrice d'inertie centrale :
 - d'une tige homogène de section négligeable de masse m_t et de longueur L ;
 - d'un disque homogène d'épaisseur négligeable, de masse m_d et de rayon R .
- Une sphère homogène pleine de masse m_s et de rayon R .

$$c = \int r^2 dm$$

$$A = \frac{c}{2T} \int \rho^2 dm$$

unité $Rg \cdot m^2$

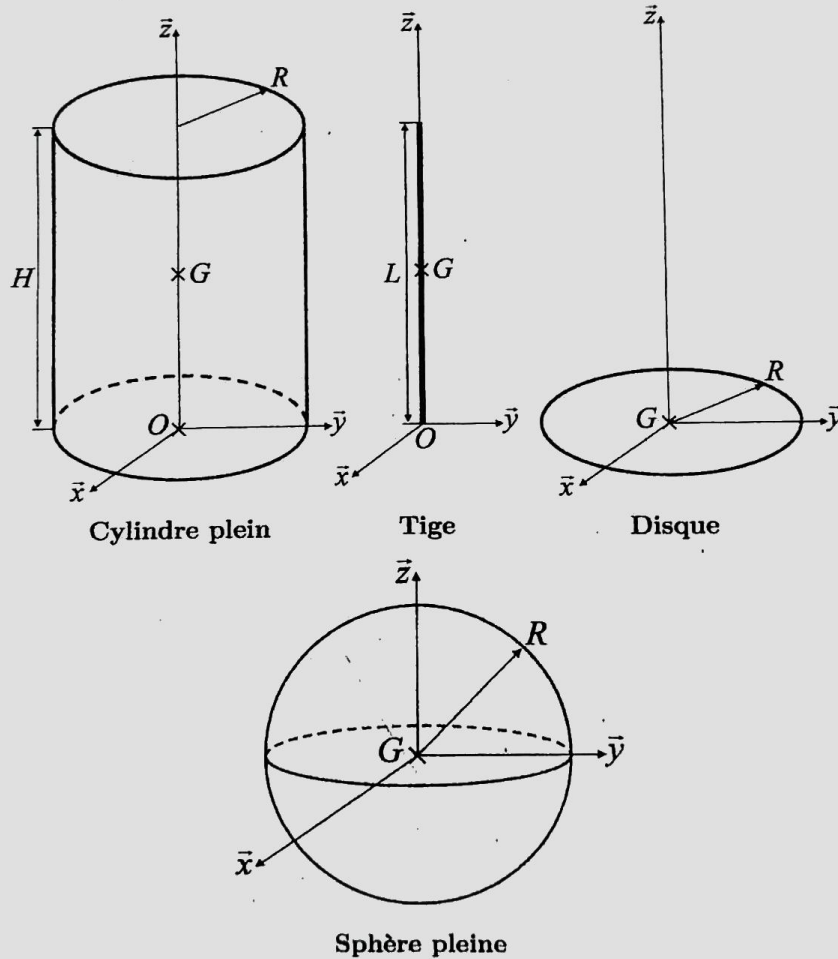


FIGURE 1 – Solides élémentaires

Exercice 2

Un vilebrequin S , homogène de masse m , est modélisé par trois cylindres :

- S_1 de centre d'inertie $G_1(0, 0, 0)$ de rayon R_1 et de longueur L_1 ;
- S_2 de centre d'inertie $G_2(a_2, 0, c_2)$ de rayon R_2 et de longueur L_2 ;
- S_3 de centre d'inertie $G_3(a_3, 0, c_3)$ de rayon R_3 et de longueur L_3 .

- 1) Déterminer la position du centre d'inertie G du vilebrequin : $\overrightarrow{G_1G}$.
- 2) Donner la forme de la matrice d'inertie du vilebrequin $[I_{G_1}(S)]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$.
- 3) Déterminer le moment d'inertie $C_{G_1}(S)$ du vilebrequin par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z})$.

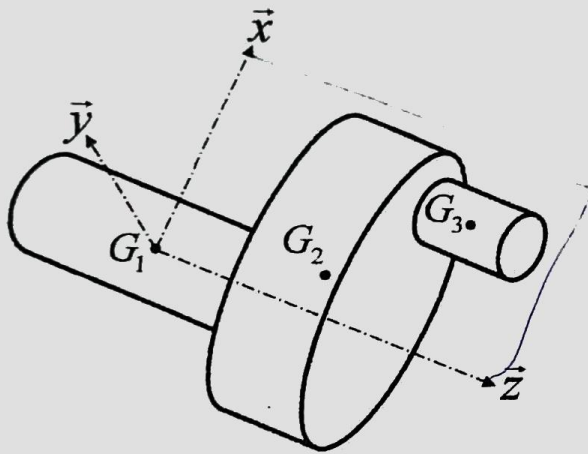


FIGURE 2 – Vilebrequin (S)

Exercice 1

l'axe (G, z) est une axe de révolution
 la matrice d'inertie d'un cylindre homogène par

$$I_G = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \text{ en } (x, y, z)$$

$$C = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$\int R^2 dm$$

$$dm = \rho dV$$

$$dV = R^2 dz$$

$$= \rho R^2 dz$$

$$C = \int R^2 dm$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta \int_{-H/2}^{H/2} dz$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi H$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 H} \frac{\pi R^4 H}{2} = \frac{m R^2}{2}$$

$$A = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$B = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$A + B = 2A = \int (x^2 + y^2) dm + \int z^2 dm$$

$$2A = C + \int z^2 dm$$

$$A = \frac{C}{2} + \int z^2 dm$$

$$\int z^2 dm = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-H/2}^{H/2} z^2 dz$$

$$= \rho \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{H^3}{12}$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 H} \frac{\pi R^3 H^3}{12}$$

$$A = \frac{m R^2}{4} + \frac{m H^2}{12}$$

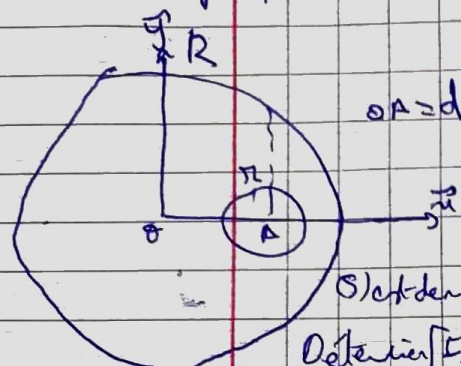
$$[I_G(\text{cylindre})] = \begin{bmatrix} \frac{m R^2}{4} + \frac{m H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m R^2}{4} + \frac{m H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m R^2}{2} \end{bmatrix} \text{ en } (x, y, z)$$

* Matrice d'inertie centrée d'une tige de longueur $2R=0$ et $H=L$

$$[I_G(\text{tige})] = \begin{bmatrix} \frac{m L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } (x, y, z)$$

* Matrice d'inertie centrée d'une

S_1 dis $E \times F$ (hors TD)



$OA = d$

S et densité m

Déterminer $[I_O(S)]$

S_1 disque de centre O de rayon R de

masse m_1

S_2 disque de A de rayon r de masse m_2

avec $m_1 = \sigma S_1 = \sigma \pi R^2 = \frac{m R^2}{R^2 - r^2}$
 $m_2 = \sigma S_2 = \sigma \pi r^2 = \frac{m r^2}{R^2 - r^2}$

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi (R^2 - r^2)}$$

L'axe $(O, \vec{n})$ est axe de symétrie

matérielle $\Rightarrow (O, \vec{x})$ est un axe principal d'inertie.

$\vec{e}_1$ par $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie matérielle

$\Rightarrow (O, \vec{z})$ est un axe principal d'inertie.

Donc $[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$ avec (x, y, z)

avec $A = A_G(S_1) - A_G(S_2)$

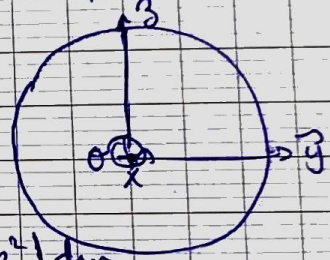
$$= \frac{m_1 R^2}{4} - \left(\frac{m_2 r^2}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} B &= B_G(S_1) - B_G(S_2) \\ &= \frac{m_1 R^2}{4} - \left(\frac{m_2 R^2}{4} + m_2 d^2 \right) \\ C &= C_G(S_1) - C_G(S_2) \\ &= \frac{m_1 R^2}{2} - \left(\frac{m_2 R^2}{2} + m_2 d^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_G &= A_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ C_G &= C_G + m(x_G^2 + y_G^2) \\ B_G &= B_G + m(x_G^2 + z_G^2) \end{aligned}$$

Résumé de la note

La note est modélisée par un cercle de masse $M = 2 \text{ kg}$ de rayon $R = 0,35 \text{ m}$



Déterminer l'inertie par rapport à l'axe de rotation.

$$I = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) dm$$

$dm \Rightarrow dl = \lambda R d\theta \Rightarrow \lambda = \frac{m}{2\pi R}$

$I = \int_0^{2\pi} R^3 d\theta = \lambda R^3 \cdot 2\pi$

$= \frac{m}{2\pi R} R^3 \cdot 2\pi = m R^2$ AN $= I = 2 \times (0,35)^2 = 0,49 \text{ kg m}^2$

Calcul de l'inertie d'une sphère pleine:



$$[I_G(\text{sphère})] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

$A = \int (y^2 + z^2) dm$

$B = \int (x^2 + z^2) dm$

$C = \int (x^2 + y^2) dm$

$$3A = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$= 2 \int r^2 dm$$

$$A = \frac{2}{3} \int r^2 dm$$

$$10 \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} \rho \iiint r^2 dV$$

$$= \frac{2}{3} \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} \rho \frac{R^5}{5} 2 \cdot 2\pi$$

$$= \frac{8}{3} \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{8}{3} \rho \frac{R^5 \pi}{5}$$

$$= \frac{8}{3} \frac{m}{\frac{4}{3} \pi R^3} \cdot \frac{R^5 \pi}{5} = \frac{2}{5} m R^2$$

Exercice 2

Formule de Barycentre

① $G \in (G_1, \vec{u}, z)$ plan de symétrie matérielle

$$\Rightarrow \vec{OG} = n_0 \vec{u} + z_0 \vec{z}$$

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + m_3 \vec{OG}_3}{m}$$

$$\text{avec } m_1 = \rho V_1 = \rho \pi R_1^2 L_1$$

$$m_2 = \rho V_2 = \rho \pi R_2^2 L_2$$

$$n_0 = \frac{m_2 a_2 + m_3 a_3}{2}$$

$$z_0 = \frac{a_2 R_2^2 L_2 + a_3 R_3^2 L_3}{R_1^2 L_1 + R_2^2 L_2 + R_3^2 L_3}$$

$$z_0 = \frac{m_2 c_2 + m_3 c_3}{3} = \frac{a_2 R_2^2 L_2 + a_3 R_3^2 L_3}{R_1^2 L_1 + R_2^2 L_2 + R_3^2 L_3}$$

② Le plan $(G_1, \vec{u}, z)$ est un plan de symétrie matérielle.

$\Rightarrow (G_1, \vec{u})$ est un axe principal d'inertie

$$\Rightarrow [I_{G_1}(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$C = C_{G_1}(S) = C_{G_1}(S_1) + C_{G_1}(S_2) + C_{G_1}(S_3)$$

$$= \frac{m_1 R_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2}{2}$$