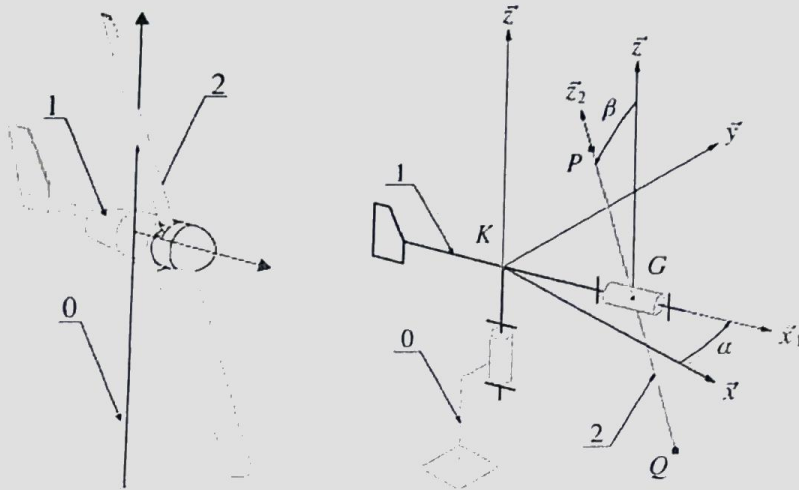


TD2 : Cinétique

Exercice 1 : Étude d'une éolienne

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de quatre solides :

- un support (0), auquel on associe un repère $R(K, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- une girouette (1), en liaison pivot d'axe $(K, \vec{z})$ avec le support (0) :
 - on lui associe un repère $R_1(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$
 - on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe $(K, \vec{z})$.
- une hélice (2), en liaison pivot d'axe $(G, \vec{x}_1)$ avec la girouette (1) :
 - on lui associe un repère $R_2(G, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$
 - on note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a \vec{x}_1$
 - on donne sa matrice d'inertie au point G :

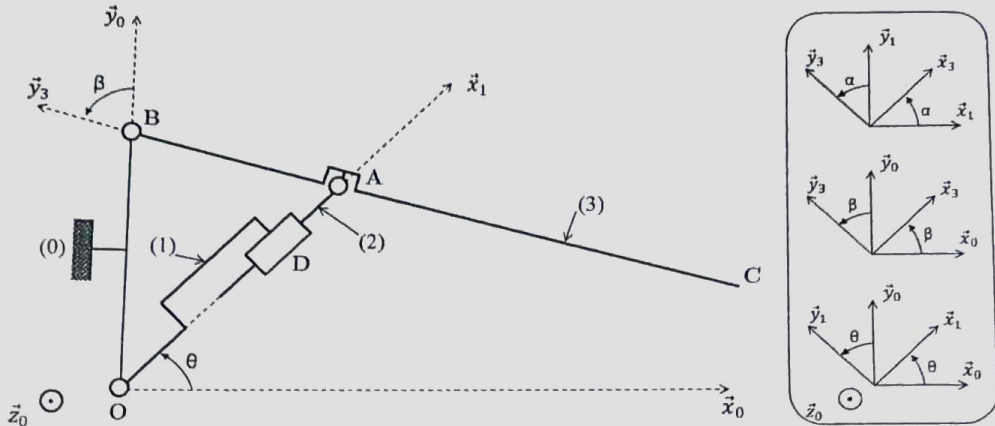
$$[I_G(2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

L'objectif de l'exercice est de mettre en place les expressions utiles à une étude dynamique ultérieure.

1. Déterminer la composante suivant $\vec{z}$ du moment cinétique, au point K , de la girouette (1) dans son mouvement par rapport au support (0).
2. Déterminer le moment cinétique, au point K , de l'hélice (2) dans son mouvement par rapport au support (0).
3. En déduire la composante suivant $\vec{z}$ du moment dynamique, au point K , de l'hélice (2) dans son mouvement par rapport au support (0).

Exercice 2 : Étude d'un Mécanisme de levage

Le mécanisme schématisé ci-dessous représente un dispositif de levage constitué d'un vérin de corps (1) et de tige (2) et d'un levier (3) en mouvement par rapport au bâti (0). La translation de la tige vérin (2) provoque le basculement du levier (3) et la montée de la charge située au point C.



On propose le paramétrage suivant :

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti (0) ;
- Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié au corps du vérin (1), avec $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
- Le repère $R_2(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ lié à la tige du vérin (2) ;
- Le repère $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ lié au levier (3), avec $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

Hypothèses

- Le corps du vérin (1) est de centre d'inertie G_1 , de masse m_1 et de moment principal d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$;
- La tige (2) est de masse m_2 de centre de masse G_2 et de moment principal d'inertie I_2 par rapport à l'axe $(G_2, \vec{z}_0)$;
- Le levier (3) est de masse m_3 de centre de masse G_3 et de moment principal d'inertie I_3 par rapport à l'axe $(B, \vec{z}_0)$;

On donne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (\lambda(t) + d) \vec{x}_1, \quad \overrightarrow{AB} = a \vec{y}_3, \quad \overrightarrow{OB} = b \vec{y}_0, \quad \overrightarrow{CB} = L \vec{y}_3, \quad \overrightarrow{OD} = h \vec{x}_1 \\ \overrightarrow{OG_1} &= c \vec{x}_1, \quad \overrightarrow{OG_2} = \lambda(t) \vec{x}_1, \quad \overrightarrow{BG_3} = -e \vec{y}_3 \end{aligned}$$

PARTIE A : Étude cinématique

L'objectif de l'étude cinématique est de déterminer la variation de la vitesse de rotation du levier (3) en fonction de la vitesse d'ouverture de la tige du vérin.

A.1. Déterminer les vecteurs instantanés de rotations $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(3/0)$.

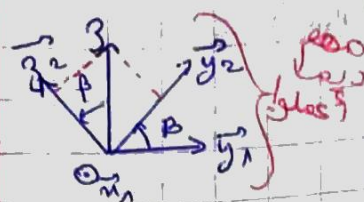
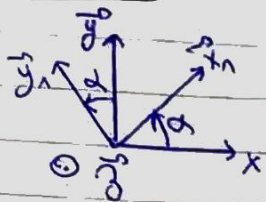
- A.2.** Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (2) par rapport à (1) au point A.
- A.3.** Déterminer par composition de mouvement le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in 2/0)$.
- A.4.** Déterminer le torseur cinématique du mouvement de (3) par rapport à (0) au point B. En déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(A \in 3/0)$. L'exprimer dans la base B_1 .
- A.5.** Déterminer les relations qui relient $\dot{\beta}$, $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.

PARTIE B : Étude cinétique

L'objectif de cette étude est de déterminer la masse équivalente M_{eq} du système ramenée sur la tige du vérin.

- B.1.** Déterminer le torseur cinétique :
- a) du mouvement de (1) par rapport à R_0 au point O.
 - b) du mouvement de (2) par rapport à R_0 au point G_2 .
 - c) du mouvement de (3) par rapport à R_0 au point B.
- B.2.** Déterminer l'énergie cinétique de l'ensemble matérielle $S = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport à R_0 .
- B.3.** Déterminer la masse équivalente M_{eq} de l'ensemble (S) ramenée sur la tige du vérin.

Exercice 1



① $\vec{\sigma}_{K(1/0)} = [I_K(1)] \cdot \vec{\Omega}_{1/0} \quad (K \text{ fixe } / R)$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

$\vec{\sigma}_{K(1/0)} = \dot{\alpha} \vec{J}$

② $\vec{\sigma}_{K(2/0)} = \vec{\sigma}_{G(2/0)} + m \vec{V}_{G(2/0)} \wedge \vec{GK}$

$\vec{\sigma}_{G(2/0)} = [I_G(2)] \cdot \vec{\Omega}_{2/0}$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} A \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} B \sin \beta \\ \dot{\alpha} C \cos \beta \end{pmatrix}_{B_2}$

$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$

$$= \dot{\beta} \vec{u}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$= \dot{\beta} \vec{u}_1 + \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2$$

$\vec{V}_{G(2/0)} = \frac{d\vec{r}_{G(2/0)}}{dt} /_0 = \dot{\alpha} \dot{\alpha} \vec{y}_1$

$M \vec{V}_{G(2/0)} \wedge \vec{GK} = M \dot{\alpha} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \wedge (-d) \vec{u}_1$

$$= M \dot{\alpha} \dot{\alpha} \vec{z}$$

$\vec{\sigma}_{K(2/0)} = A \dot{\beta} \vec{u}_1 + \dot{\alpha} B \sin \beta \vec{y}_2 + \dot{\alpha} C \cos \beta \vec{z}_2$

$$+ M \dot{\alpha} \dot{\alpha} \vec{z}$$

$\vec{\sigma}_{K(2/0)} \cdot \vec{z} = 0 + \dot{\alpha} B \sin \beta + \dot{\alpha} C \cos \beta + M \dot{\alpha} \dot{\alpha}$

TDN°2 cinétique

③ $\vec{\sigma}_{R(2/0)} \cdot \vec{z} = \frac{d\vec{\sigma}_{K(2/0)} \cdot \vec{z}}{dt} /_0$

$$= \frac{d}{dt} (\dot{\alpha} B \sin \beta + \dot{\alpha} C \cos \beta + M \dot{\alpha} \dot{\alpha})$$

$= \dot{\alpha} B \dot{\beta} \sin \beta + \dot{\alpha} B \cos \beta \dot{\beta} + \dot{\alpha} C \dot{\beta} \cos \beta - \dot{\alpha} C \sin \beta \dot{\beta} + 2M \dot{\alpha} \ddot{\alpha}$

Exercice 2

① $\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{z}_0$

$$\vec{\Omega}_{2/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$= (\lambda + \dot{\theta}) \vec{z}_0 = \dot{\beta} \vec{z}_0$$

② $\vec{V}_{(A \in 2/1)} = \frac{d\vec{OA}}{dt} /_{R_1} = \dot{\lambda} \vec{u}_1$

$\left\{ \vec{V}_{2/1} \right\}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\lambda} \vec{u}_1 \end{pmatrix} \right\}_A$

③ $\vec{V}_{(A \in 2/0)} = \vec{V}_{(A \in 2/1)} + \vec{V}_{(A \in 1/0)}$

$\vec{V}_{(A \in 2/1)} = \dot{\lambda} \vec{u}_1$

$\vec{V}_{(A \in 1/0)} = \vec{V}_{(O \in 1/0)} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA}$

$$= \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge (\lambda + d) \vec{e}_1 = (\lambda + d) \dot{\theta} \vec{y}_1$$

$\vec{V}_{(A \in 2/0)} = \dot{\lambda} \vec{u}_1 + (\lambda + d) \dot{\theta} \vec{y}_1$

④ $\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\beta} \vec{z}_0$

$$\vec{V}_{(B \in 3/0)} = 0$$

$\vec{V}_{(A \in 3/0)} = \vec{V}_{(B \in 3/0)} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{BA}$

$$= \dot{\beta} \vec{z}_0 \wedge -d \vec{y}_2 = -\dot{\beta} d \vec{x}_2$$

⑤ $\vec{V}_{(A \in 3/0)} = \vec{V}_{(A \in 3/2)} + \vec{V}_{(A \in 2/0)}$

$$\vec{V}_{(A \in 3/2)} = 0$$

$\dot{\lambda} \vec{u}_1 + (\lambda + d) \dot{\theta} \vec{y}_1 = -\dot{\beta} d \vec{x}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda} = -\dot{\beta} \sin \alpha \\ (\lambda + d) \dot{\theta} = \dot{\beta} \cos \alpha \end{cases}$$

() . ()
 باقی آ

Part 1B:

B.1 ① a $\{c(1/0)\}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}(1/0) \\ \vec{v}_B(1/0) \end{matrix} \right\}$

$$\vec{p}(1/0) = m_1 \cdot \vec{v}_{G_1}(1/0)$$

$$\vec{v}_{G_1}(1/0) = \frac{d\vec{OG}_1}{dt} / R_0 = c \dot{\theta} \hat{y}_1$$

$$\vec{v}_B(1/0) = [\vec{I}_B(1)] \cdot \vec{\omega}_{1/0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{I}_B \dot{\theta} \hat{z}_0$$

$$\{c(1/0)\}_B = \left\{ \begin{matrix} m_1 c \dot{\theta} \hat{y}_1 \\ \vec{I}_B \dot{\theta} \hat{z}_0 \end{matrix} \right\}$$

② b $\{c(2/0)\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}(2/0) \\ \vec{v}_{G_2}(2/0) \end{matrix} \right\}$

$$\vec{p}(2/0) = m_2 \vec{v}_{G_2}(2/0)$$

$$\vec{v}_{G_2}(2/0) = \frac{d\vec{OG}_2}{dt} / R_0 = \lambda \dot{\omega}_1 \hat{x}_1 + \dot{\theta} \hat{y}_1$$

$$\vec{v}_B(2/0) = [\vec{I}_B(2)] \cdot \vec{\omega}_{2/0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{I}_B \dot{\theta} \hat{z}_0$$

$$\Rightarrow \{c(2/0)\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} m_2 (\lambda \dot{\omega}_1 \hat{x}_1 + \dot{\theta} \hat{y}_1) \\ \vec{I}_B \dot{\theta} \hat{z}_0 \end{matrix} \right\}$$

③ c $\{c(3/0)\}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{p}(3/0) \\ \vec{v}_B(3/0) \end{matrix} \right\}$

$$\vec{p}(3/0) = m_3 \vec{v}_{G_3}(3/0) = m_3 \frac{d\vec{OG}_3}{dt} / R_0$$

$$= -m_3 e \beta \dot{\theta} \hat{y}_3$$

$$= m_3 e \beta \dot{\theta} \hat{y}_3$$

$$\vec{v}_B(3/0) = [\vec{I}_B(3)] \cdot \vec{\omega}_{3/0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{I}_B \cdot \beta \cdot \dot{\theta} \hat{z}_0$$

$$\Rightarrow \{c(3/0)\}_B = \left\{ \begin{matrix} m_3 e \beta \dot{\theta} \hat{y}_3 \\ \vec{I}_B \cdot \beta \cdot \dot{\theta} \hat{z}_0 \end{matrix} \right\}$$

B-2)