

TD 3 : Dynamique

Exercice 1 : Système de préhension

L'étude porte sur un système de préhension qui permet de saisir un objet et de le déplacer (Figure 1). Ce système est constitué :

- d'un bâti fixe (0) auquel est lié le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ supposé galiléen ;
 - d'une colonne (1), à laquelle est lié le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0). On note $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$;
 - d'un bras (2), auquel est lié le repère $R_2(A, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en liaison pivot parfaite d'axe $(A, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe $(B, \vec{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part. On note $\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$;
 - d'un bras (3), de centre d'inertie G_3 , auquel est lié le repère $R_3(B, \vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{y}_3 = \vec{y}_1$ et $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$;
 - d'une barre (4), à laquelle est lié le repère $R_4(D, \vec{x}_1, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ tel que $\vec{y}_4 = \vec{y}_2$ et $\vec{z}_4 = \vec{z}_2$, en liaison pivot parfaite d'axe $(D, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe $(C, \vec{x}_1)$ avec le bras (3) d'autre part ;
- d'un vérin qui assure la rotation de (2) par rapport à (1). Il est constitué d'une tige (5) et du corps (6) liés par une liaison pivot glissant d'axe $(E, \vec{y}_6)$. Cette tige (5) est aussi en liaison pivot parfaite d'axe $(F, \vec{x}_1)$ avec le bras (2). Le corps (6), auquel est lié le repère $R_6(E, \vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$, est en liaison pivot parfaite d'axe $(E, \vec{x}_1)$ avec la colonne (1). On note $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_6) = (\vec{z}_0, \vec{z}_6)$.

Données et hypothèses :

- les paramètres et les données géométrique du système étudié sont présentés par les relations suivantes :

$$\vec{OA} = a\vec{y}_1 + h\vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{AE} = -e\vec{z}_0 \quad ; \quad AB = DC = L \quad ; \quad AD = BC = d \quad ; \quad \vec{AF} = \frac{L}{2}\vec{y}_2$$

$$\vec{BG}_3 = -b\vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{EF} = \lambda\vec{y}_6$$

où a, b, d, e, h et L sont des caractéristiques dimensionnelles (constantes). α, β, θ et λ sont des paramètres de position du système, dépendants du temps (variables de configuration).

- on note m_2 la masse de (2), G_2 son centre d'inertie ($G_2 \equiv F$) et sa matrice d'inertie au point A est :

$$[I_A(2)] = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- on note m_3 la masse de (3) et sa matrice d'inertie au point G_3 est :

$$[I_{G_3}(3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$



- la masse du bras (4) est négligeable ;

- l'action de la pesanteur sur le système est supposée négligeable sauf pour le bras (3). Le champ de pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}_0$;

- l'action de la tige du vérin (5) sur le bras (2) est modélisée par le torseur :

$$\{\tau_{(5 \rightarrow 2)}\}_F = \begin{Bmatrix} F\vec{y}_6 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— l'action du bras (4) sur le bras (3) est modélisée par le torseur :

$$\{\tau_{(4 \rightarrow 3)}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} Y_{43} \vec{y}_4 \\ 0 \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \vec{y}_4 = \vec{y}_2$$

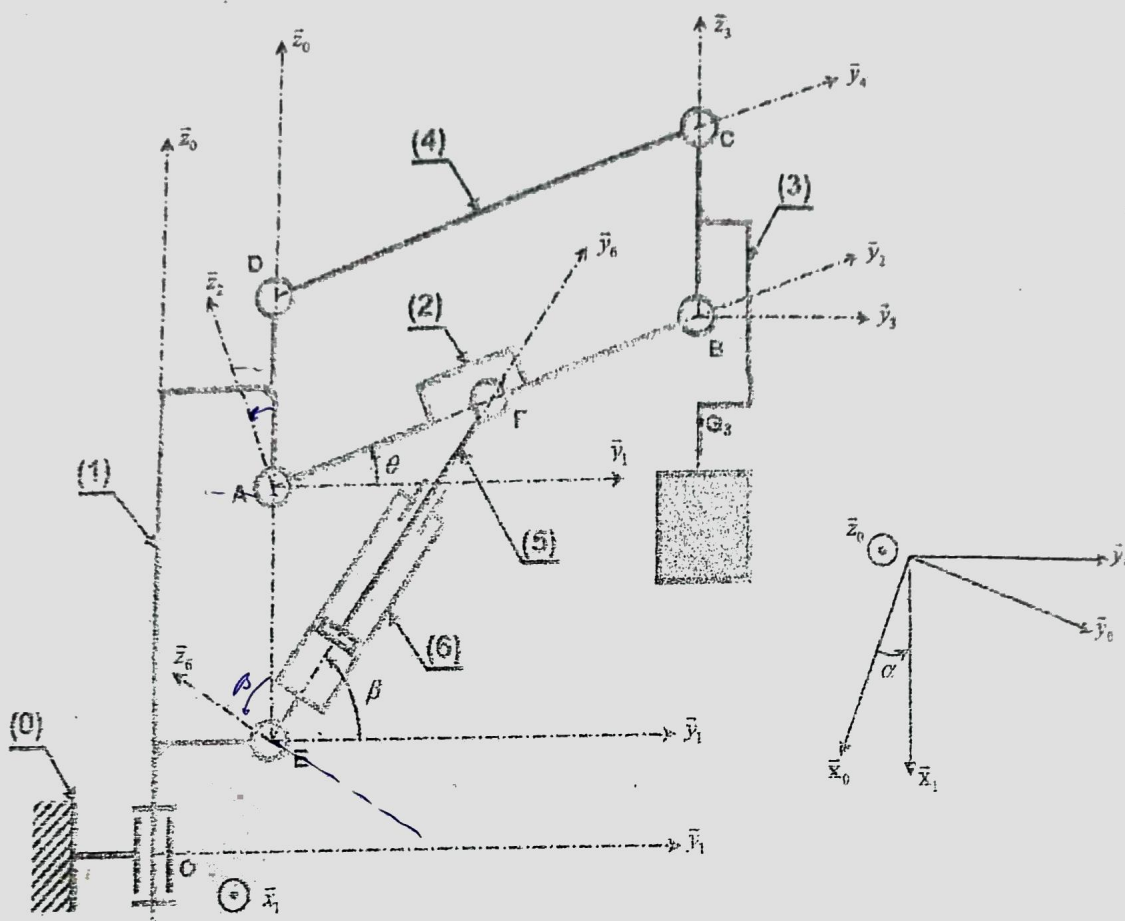


FIGURE 1 – Schéma cinématique minimal du préhenseur

I. Étude cinématique

- 1) Déterminer le torseur cinématique de (2) dans son mouvement par rapport à (1) au point A, puis au point F.
- 2) Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ et en fonction de $\dot{\lambda}$, le vecteur vitesse du point F' de la tige (5) dans son mouvement par rapport au corps (6).
- 3) Déterminer, par cinématique et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$, le vecteur vitesse du point F du corps (6) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).
- 4) En utilisant la fermeture cinématique de la chaîne 1 – 2 – 5 – 6 – 1 au point F, écrire par projection sur la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ le système d'équations liant $\lambda, \dot{\lambda}, \theta, \dot{\theta}, \beta, \dot{\beta}$ et L .
- 5) Quelle est la nature du mouvement du bras (3) par rapport à la colonne (1) ? Justifier.
- 6) Déterminer, en fonction de $\dot{\theta}$, le torseur cinématique du bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1) au point B, puis au point G3.
- 7) Déterminer le vecteur accélération du point G3 du bras (3) dans son mouvement par rapport à (1).
- 8) Déterminer le vecteur accélération du point G2 du bras (2) dans son mouvement par rapport à (1).

II. Étude dynamique

Dans cette partie, on s'intéresse à la caractérisation du vérin (5,6). Pour cela, l'étude est menée pour une position donnée de la colonne (1) ($\alpha = \text{constante}$ et le repère R_1 est supposé galiléen). Cela permet de modéliser le système proposé à l'étude par un mécanisme plan en considérant le plan de mouvement $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$.

Il convient donc de retenir la notation représentant le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre un solide (i) et un solide (j) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base $B_2(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

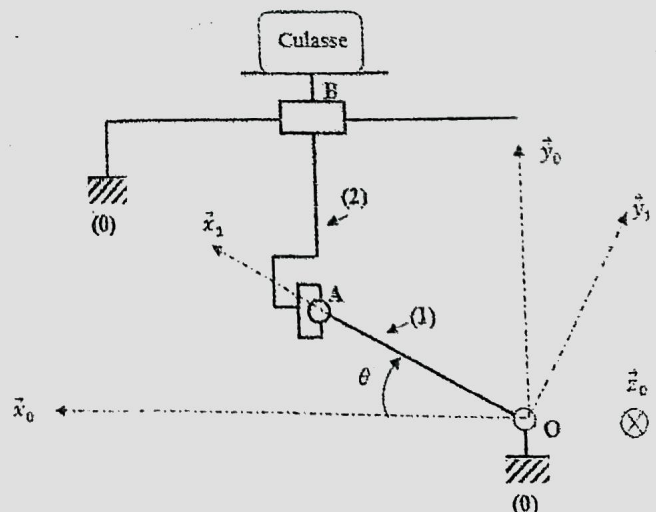
$$\{T_{(i \rightarrow j)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{ij} \\ Y_{ij} & 0 \\ Z_{ij} & 0 \end{array} \right\}_Q^{B_2}$$

- 9) Déterminer, au point A et dans la base B_2 , le torseur dynamique du bras (2) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).
- 10) Écrire dans la base B_2 et en fonction de $(\beta - \theta)$, le torseur représentant l'action mécanique de la tige (5) sur le bras (2) au point F.
- 11) Déterminer, au point A et dans la base B_2 , le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le bras (2).
- 12) Écrire le système d'équations qui découle de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au bras (2) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).
- 13) Déterminer, au point B et dans la base B_2 , le torseur dynamique du bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).
- 14) Déterminer, au point B et dans la base B_2 , le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le bras (3).
- 15) Écrire le système d'équations qui découle de l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au bras (3) dans son mouvement par rapport à la colonne (1).
- 16) En utilisant les résultats des questions 12) et 15), établir l'expression de la force F appliquée par la tige du vérin (5) sur le bras (2).

Exercice 2 : Mécanisme de chariot

La figure ci-dessous représente le schéma cinématique d'un mécanisme de chariot. Il est composé des solides suivants :

- un bâti (0), qui est lié au repère ortho-normé direct galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- une manivelle (1), qui est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec (0) et liée au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ tel que $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- un chariot (2), qui est en liaison linéaire annulaire d'axe $(A, \vec{y}_0)$ avec (1) d'une part et en liaison glissière d'axe $(B, \vec{x}_0)$ avec (0) d'autre part.



On donne :

$$\vec{OA} = L\vec{x}_1 \quad ; \quad \vec{OB} = \lambda(t)\vec{x}_0 + a\vec{y}_0$$

Hypothèses :

- La matrice d'inertie de (1) est définie au point O par :

$$[I_O(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

- La manivelle (1) est entraînée en rotation par un moteur (M) (non représenté) d'action mécanique modélisée par le couple : $\vec{C}_m = C_m \vec{z}_0$.
- Le chariot (2) est de masse m_2 et soumis à l'action du culasse représentée, au point B , par la force $\vec{F} = -F \vec{y}_0$.
- Toutes les liaisons mécaniques sont supposées parfaites sauf la liaison glissière en B entre (0) et (2) est avec frottement de coefficient f .
- A — On néglige l'action de la pesanteur sur (1) et (2).
- On considère le système plan. Le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre les solides (i) et (j) au point M et dans une base $\mathcal{B}$ sera noté :

$$\{\tau(i \rightarrow j)\}_M = \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & N_{ij} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- 1) Déterminer, par composition du mouvement, la vitesse du point A de (2) dans son mouvement par rapport à (1). Dédire la relation entre $\dot{\lambda}$ et $\dot{\theta}$.
- 2) Isoler le solide (1) et appliquer le théorème du moment dynamique par rapport à R_0 au point O .
- 3) La liaison glissière entre (2) et (0) est avec frottement et de résultante $\vec{R}_{(0 \rightarrow 2)} = X_{02} \vec{x}_0 + Y_{02} \vec{y}_0$. En se basant sur la loi de Coulomb, exprimer X_{02} en fonction de Y_{02} .
- 4) Isoler le solide (2) et appliquer le théorème de la résultante dynamique par rapport à R_0 .
- 5) Déterminer l'équation du mouvement en fonction du paramètre θ . Dédire l'expression du couple moteur C_m .

? $\vec{F} = -F \vec{y}_0$

TD3: Dynamique

exercice 2:

$$① \vec{V}(A_{2/1}) = \vec{V}(A_2/0) + \vec{V}(A_1/0)$$

$$= \dot{\lambda} \vec{u}_0 = \vec{V}(B_2/0) + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{BA} = L \dot{\theta} \vec{y}_0$$

$$\vec{\omega}_{2/0} = -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow (\dot{\lambda} + L \dot{\theta} \sin \theta) \vec{u}_0 - L \dot{\theta} \cos \theta \vec{y}_0 = V \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = -L \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\lambda} + L \dot{\theta} \sin \theta = 0 \end{cases}$$

$$② (1) = \{0, 2, \vec{c}_m\}$$

$$\vec{S}_0(1/R) = \vec{0}_0(I \rightarrow 1)$$

$$\vec{S}_0(1/0) = [I_0(1)] \cdot \vec{\omega}_{1/0}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \dot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\vec{S}_0(1/0) = \frac{d \vec{S}_0(1/0)}{dt} \Big|_{R_0} = c_1 \ddot{\theta} \vec{z}_0$$

$$\vec{J}_0(1 \rightarrow 1) = \vec{J}_0(1 \rightarrow 2) + \vec{J}_0(2 \rightarrow 1) + \vec{c}_m$$

$$= \vec{0} + [\vec{J}_A(2 \rightarrow 1) \vec{R}_2 \rightarrow 1 \wedge \vec{AO}] + c_m \vec{z}_0$$

$$\left\{ \vec{r}_{(2 \rightarrow 1)} \right\}_A = \begin{pmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_A$$

$$\vec{J}_0(I \rightarrow 1) = x_{21} \vec{u}_0 \wedge (-L \vec{u}_1) + c_m \vec{z}_0$$

$$= x_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge -L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + c_m \vec{z}_0$$

$$\vec{J}_0(I \rightarrow 1) = -L x_{21} \sin \theta \vec{z}_0 + c_m \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \text{TRD } \sin(\theta \vec{z}_0)$$

$$c_1 \ddot{\theta} = c_m - L x_{21} \sin \theta$$

$$\Rightarrow c_m = c_1 \ddot{\theta} + L x_{21} \sin \theta$$

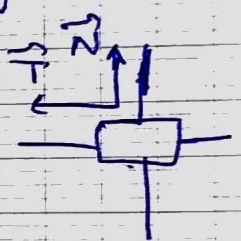
$$③ \vec{R}(0 \rightarrow 2) = x_{02} \vec{u}_0 + y_{02} \vec{y}_0$$

$$= \vec{T} + \vec{N}$$

$$\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$$

$$|x_{02}| = f |y_{02}|$$

$$x_{02} = f y_{02}$$



$$④ \text{TRD}$$

$$\vec{A} = m \vec{a}_{G_2/R} = \vec{R}(2 \rightarrow 2)$$

$$\vec{A} = m \frac{d \vec{V}_{A_{2/1}}}{dt} \Big|_{R_0} = m \ddot{\lambda} \vec{u}_0$$

$$\vec{Q} = \{0, 1, F\}$$

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 2} = \vec{R}_{0 \rightarrow 2} + \vec{R}_{2 \rightarrow 2} + \vec{F}$$

$$= x_{02} \vec{x}_0 + y_{02} \vec{y}_0 - x_{21} \vec{x}_0 - F \vec{y}_0$$

$$\text{TRD}$$

$$f m \ddot{\lambda} = x_{02} - x_{21}$$

$$0 = y_{02} - F$$

$$x_{21} = x_{02} - m \ddot{\lambda}$$

$$= f y_{02} - m \ddot{\lambda}$$

$$c_m = c_1 \ddot{\theta} + L \sin \theta (f F - m \ddot{\lambda})$$