

Test de Mécanique des Solides Indéformables

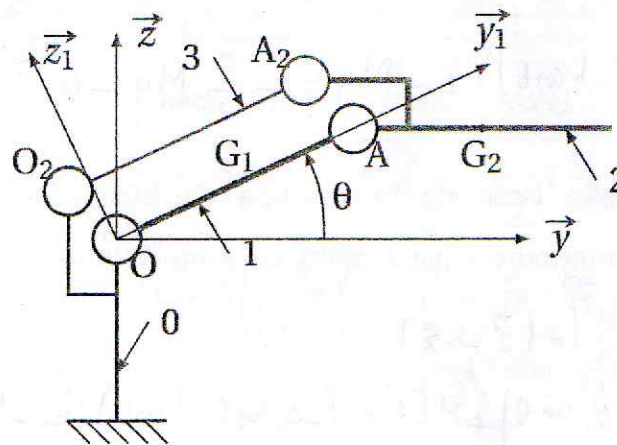
Durée : 45 min

Date : 09 Décembre 2025

Nom & Prénom : *Correction* Groupe :

On se propose d'étudier d'un point de vue dynamique une barrière de parking afin de dimensionner l'actionneur électrique commandant le mouvement de rotation. La figure ci-dessous représente le schéma cinématique de ce mécanisme. Ce dernier est composé principalement des éléments suivants :

- un support (0) auquel est lié le repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen ;
- une demi-barrière (1), de longueur L , en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{x})$ avec le support (0). Le repère $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié à la demi-barrière (1) tel que $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$;
- une demi-barrière (2), de longueur L et à laquelle est lié le repère $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, est en liaison pivot parfaite d'axe $(A, \vec{x})$ avec (1). La demi-barrière (2) est toujours parallèle au sol (parallélogramme OO_2A_2A) ;
- une tige de rappel (3) en liaison pivot parfaite d'axe $(O_2, \vec{x})$ avec le support (0) d'une part et en liaison pivot parfaite d'axe $(A_2, \vec{x})$ avec la demi-barrière (2) d'autre part ;



Hypothèses et données complémentaires :

- On donne : $\vec{OA} = L \vec{y}_1$; $\vec{OG}_1 = \frac{L}{2} \vec{y}_1$; $\vec{AG}_2 = \frac{L}{2} \vec{y}$; $\vec{OO}_2 = \vec{AA}_2 = -a \vec{y} + b \vec{z}$
- La demi-barrière (1) est de masse M , de centre de masse G_1 et de moment principal d'inertie I_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{x})$.
- La demi-barrière (2) est de masse M , de centre de masse G_2 et de moment principal d'inertie I_2 par rapport à l'axe $(A, \vec{x})$.
- la tige de rappel (3) est de masse et d'inertie négligeable.
- Un moteur (non représenté) fixé sur le support (0) exerce sur la demi-barrière (1) une action mécanique modélisée par le torseur couple suivant :

$$\{\tau_{(\text{Moteur} \rightarrow 1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x} \end{array} \right\}$$

— L'action de la tige de rappel (3) sur la demi-barrière (2) est modélisée par le torseur glisseur :

$$\{\tau_{(3 \rightarrow 2)}\}_{A_2} = \begin{Bmatrix} Y_{32} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— L'accélération de la pesanteur est définie par $\vec{g} = -g\vec{z}$.

— Il convient de retenir, pour ce problème plan, la notation représentant le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison entre un solide (i) et un solide (j) au point Q centre géométrique de la liaison, exprimé dans une base $\mathcal{B}$:

$$\{\tau(i \rightarrow j)\}_Q = \begin{Bmatrix} 0 & L_{ij} \\ Y_{ij} & 0 \\ Z_{ij} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

- 1) Quelle est la nature du mouvement de la demi-barrière (2) par rapport au support (0) ? Justifier votre réponse.

Nature du mouvement : Translation Circulaire

Justification : La demi-barrière est tj // au sol $\Rightarrow \vec{r}(2/0) = \vec{0}$ et $\vec{OA} = L\vec{y}_1 \Rightarrow$ trajectoire circulaire

- 2) Déterminer le torseur cinématique de la demi-barrière (2) dans son mouvement par rapport au support (0) au point A, puis au point G_2 .

$$\vec{r}(2/0) = \vec{0} ; \vec{v}(A \in 2/0) = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_0 = L \left(\vec{r}(1/0) \wedge \vec{y}_1 \right) = L \dot{\theta} \vec{r} \wedge \vec{y}_1 = L \dot{\theta} \vec{z}_1$$

$$\vec{v}(G_2 \in 2/0) = \vec{v}(A \in 2/0) \text{ car } \vec{r}(2/0) = \vec{0}$$

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L \dot{\theta} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L \dot{\theta} \vec{z}_1 \end{Bmatrix}$$

- 3) Déterminer le moment dynamique de la demi-barrière (1) dans son mouvement par rapport au support (0) au point O.

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_O(1/0) &= \left. \frac{d\vec{\sigma}_O(1/0)}{dt} \right|_0 \text{ car } \vec{v}(O/0) = \vec{0} \\ &= \frac{d}{dt} \left([I_O(1)] \cdot \vec{r}(1/0) \right) \Big|_0 \text{ car } \vec{v}(O \in 1/0) = \vec{0} \\ &= \frac{d}{dt} (I_1 \dot{\theta} \vec{z}) \Big|_0 = I_1 \ddot{\theta} \vec{z} \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) = I_1 \ddot{\theta} \vec{z}$$

- 4) Déterminer le moment dynamique de la demi-barrière (2) dans son mouvement par rapport au support (0) au point A puis au point O.

$$\vec{\delta}_A(2/0) = \left. \frac{d\vec{\tau}_A(2/0)}{dt} \right|_0 + M \underbrace{\vec{v}(A/0) \wedge \vec{v}(G_2/0)}_{= \vec{0} \text{ car parallèles}}$$

$$\vec{\tau}_A(2/0) = M A \vec{G}_2 \wedge \vec{v}(A \in 2/0) \text{ car } (\vec{r}(2/0) = \vec{0})$$

$$\Rightarrow \vec{S}_{A(2/0)} = \frac{ML^2}{2} \ddot{\theta} \cos \theta \vec{x} \Rightarrow \vec{S}_{A(2/0)} = \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{x}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \vec{S}_{O(2/0)} &= \vec{S}_{A(2/0)} + \vec{A}(2/0) \wedge \vec{AO} \quad \text{avec} \quad \vec{A}(2/0) = M \vec{P}(G_2/0) = M \frac{d\vec{V}(G_2/0)}{dt} \Big|_0 \\ &= ML (\ddot{\theta} \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) \\ &= \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{x} + ML (\ddot{\theta} \vec{z}_1 - \dot{\theta}^2 \vec{y}_1) \wedge (-L \vec{y}_1) \\ &= \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{x} + ML^2 \ddot{\theta} \vec{x} \end{aligned}$$

$$\vec{S}_{A(2/0)} = \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \vec{x}$$

$$\vec{S}_{O(2/0)} = \left[\frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + ML^2 \ddot{\theta} \right] \vec{x}$$

- 5) Déduire le moment dynamique au point O de l'ensemble $\Sigma = \{1, 2\}$ dans son mouvement par rapport au support (0).

$$\vec{S}_{O(\Sigma/0)} = \vec{S}_{O(1/0)} + \vec{S}_{O(2/0)}$$

$$\vec{S}_{O(\Sigma/0)} = \left[I_1 \ddot{\theta} + \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + ML^2 \ddot{\theta} \right] \vec{x}$$

- 6) Déterminer le moment des actions mécaniques extérieures exercées sur la demi-barrière (2) au point A.

$$\vec{x} = \{3, 1, \vec{g}\}; \quad \vec{\Pi}_{A(\bar{2} \rightarrow 2)} = \vec{\Pi}_{A(3 \rightarrow 2)} + \vec{\Pi}_{A(1 \rightarrow 2)} + \vec{\Pi}_{A(\vec{g} \rightarrow 2)}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \vec{\Pi}_{A(3 \rightarrow 2)} &= \vec{\Pi}_{A_2(3 \rightarrow 2)} + \vec{R}_{(3 \rightarrow 2)} \wedge \vec{AA_2} = \vec{0} + Y_{32} \vec{y}_1 \wedge (a \vec{y} - b \vec{z}) \\ &= Y_{32} (-a \sin \theta - b \cos \theta) \vec{x} \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \vec{\Pi}_{A(1 \rightarrow 2)} = \vec{0}$$

$$\textcircled{*} \vec{\Pi}_{A(\vec{g} \rightarrow 2)} = \vec{R}_{(\vec{g} \rightarrow 2)} \wedge \vec{GA} = -Mg \vec{z} \wedge (-\frac{L}{2} \vec{y}) = -Mg \frac{L}{2} \vec{x}$$

$$\vec{M}_{A(\bar{2} \rightarrow 2)} = \left[(-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2} \right] \vec{x}$$

- 7) Déduire l'équation scalaire issue de l'application du Théorème du Moment Dynamique à la demi-barrière (2) dans son mouvement par rapport au support (0) au point A en projection sur $\vec{x}$.

$$T.M.D \Rightarrow \vec{S}_{A(2/0)} = \vec{\Pi}_{A(\bar{2} \rightarrow 2)}$$

$$\frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = (-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2}$$

- 8) Déterminer le moment des actions mécaniques extérieures appliquées sur $\Sigma = \{1, 2\}$ au point O.

$$\bar{\Sigma} = \{0, 3, \vec{g}, \text{Moteur}\} ; \quad \textcircled{*} \quad \vec{\Pi}_{O(0 \rightarrow 1)} = \vec{0}$$

$$\textcircled{*} \quad \vec{\Pi}_{O(3 \rightarrow 2)} = \vec{\Pi}_{A(3 \rightarrow 2)} + \underbrace{\vec{R}_{(3 \rightarrow 2)} \wedge \vec{AO}}_{= \vec{a} \wedge \vec{b} \text{ selon axes}} = (-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} \vec{x}$$

$$\textcircled{*} \quad \vec{\Pi}_{O(\vec{g} \rightarrow 1)} = \vec{R}_{(\vec{g} \rightarrow 1)} \wedge \vec{GO} = -Mg \vec{z} \wedge \left(-\frac{L}{2} \vec{y}_1\right) = -Mg \frac{L}{2} \cos \theta \vec{x}$$

$$\textcircled{*} \quad \vec{\Pi}_{O(\vec{g} \rightarrow 2)} = \vec{\Pi}_{A(\vec{g} \rightarrow 2)} + \vec{R}_{(\vec{g} \rightarrow 2)} \wedge \vec{AO} = -Mg \frac{L}{2} \vec{x} - Mg \vec{z} \wedge (-L \vec{y}_1)$$

$$\Rightarrow \vec{\Pi}_{O(\vec{g} \rightarrow 2)} = -\left(Mg \frac{L}{2} + Mg L \cos \theta\right) \vec{x}$$

$$\textcircled{*} \quad \vec{\Pi}_{O(\text{Moteur} \rightarrow 1)} = C_m \vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{\Pi}_{O(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} = \left[(-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2} - Mg L \cos \theta - Mg \frac{L}{2} \cos \theta + C_m\right] \vec{x}$$

$$\vec{M}_O(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \left[(-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2} - \frac{3}{2} Mg L \cos \theta + C_m\right] \vec{x}$$

- 9) Dédurre l'équation scalaire issue de l'application du Théorème du Moment Dynamique à l'ensemble Σ dans son mouvement par rapport au support (0) au point O en projection sur $\vec{x}$.

$$T.M.D. \Rightarrow \vec{\sigma}_O(\Sigma \rightarrow 0) = \vec{\Pi}_O(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

$$I_1 \ddot{\theta} + \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + ML \ddot{\theta} = (-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2} - \frac{3}{2} Mg L \cos \theta + C_m$$

- 10) En utilisant les résultats des questions 7) et 9), établir l'expression du couple moteur C_m appliquée par le moteur sur la demi-barrière (1).

d'après la question 7) on a : $(-a \sin \theta - b \cos \theta) Y_{32} - Mg \frac{L}{2} = \frac{ML^2}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)$
 dans l'équation de la question 9) on obtient :

$$I_1 \ddot{\theta} + ML^2 \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} Mg L \cos \theta + C_m$$

$$\Rightarrow C_m = I_1 \ddot{\theta} + ML^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{2} Mg L \cos \theta$$

$$C_m = \left(I_1 + ML^2\right) \ddot{\theta} + \frac{3}{2} Mg L \cos \theta$$