

SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

REPRESENTATION DES SYSTEMES ASSERVIS

1. Transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$: $f(t) \xrightarrow{L} L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}.dt$
 telle que $f(t)=0$ pour $t<0$ et $p \in \mathbb{C}$.

Tableau des transformées de Laplace usuelles :

Domaine temporel : $f(t)$ avec $f(t)=0$ pour $t<0$	Domaine de Laplace : $F(p)$	Domaine temporel : $f(t)$ avec $f(t)=0$ pour $t<0$	Domaine de Laplace : $F(p)$
$\delta(t).u(t)$: impulsion	1	$t^n.e^{-at}.u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$K.u(t)$: échelon	$\frac{K}{p}$	$\sin(wt).u(t)$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
$K.t.u(t)$: rampe	$\frac{K}{p^2}$	$\cos(wt).u(t)$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
$e^{-a.t}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t}.\sin(wt).u(t)$	$\frac{w}{(p+a)^2 + w^2}$
$t^n.u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a.t}.\cos(wt).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + w^2}$

Conditions d'Heaviside :

$f(0^+)=0, f''(0^+)=0, f'''(0^+)=0, \dots$ C'est-à-dire si les conditions initiales sont nulles.

Propriétés de la transformée de Laplace

Domaine temporel	Domaine de Laplace
Linéarité : $[a.f_1(t) + b.f_2(t)].u(t)$	$a.F_1(p) + b.F_2(p)$
Dérivée première : $f'(t).u(t)$	$p.F(p) - f(0^+)$
Dérivée seconde : $f''(t).u(t)$	$p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)$
Intégration : $\int_0^t f(x).dx.u(t)$	$\frac{F(p)}{p}$

Théorème du retard : (τ : retard) $L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$

2. Représentation par le schéma fonctionnel (schéma bloc)

2.1- Fonction de transfert – transmittance :

Forme canonique de la fonction de transfert : $H(p) = K \frac{1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}{p^\alpha (1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^{m-\alpha})}$, avec

m : Ordre de la fonction de transfert, c'est le degré du dénominateur de la fonction de transfert

α : Classe de la fonction de transfert, c'est le nombre des intégrateurs ($\alpha \geq 0$)

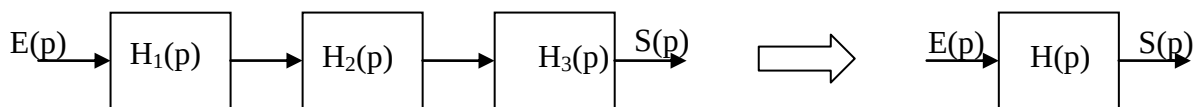
K : Gain statique de la fonction de transfert, $K = \lim_{p \rightarrow 0} p^\alpha \cdot H(p)$

2.2- Schéma fonctionnel (schéma bloc) : Formalisme

Bloc		Jonction	
Sommateur		Comparateur	

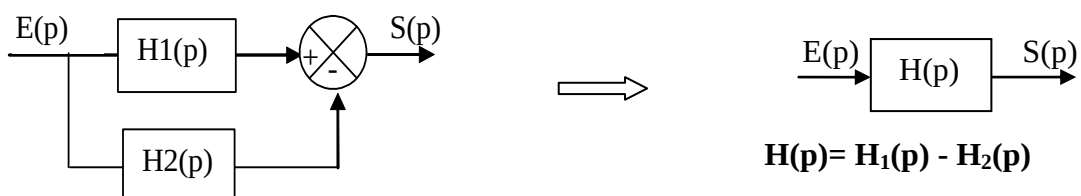
2.3- Opérations élémentaires sur les schémas blocs :

• Blocs en série



$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$$

• Blocs en parallèle



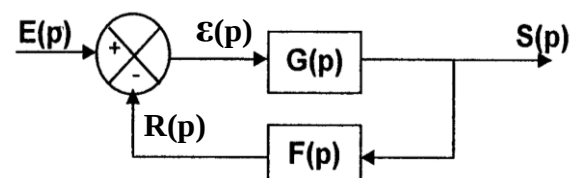
$$H(p) = H_1(p) - H_2(p)$$

2.4- Détermination de la F.T à partir du schéma fonctionnel d'un système asservi

2.4.1 Système asservi à retour non unitaire :

G(p) : Fonction de transfert de la chaîne directe

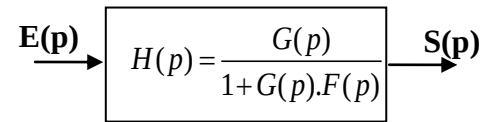
F(p) : Fonction de transfert de la chaîne de retour



FTBF : Fonction de transfert en boucle fermée.

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Rightarrow FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p).F(p)}$$

Schéma équivalent



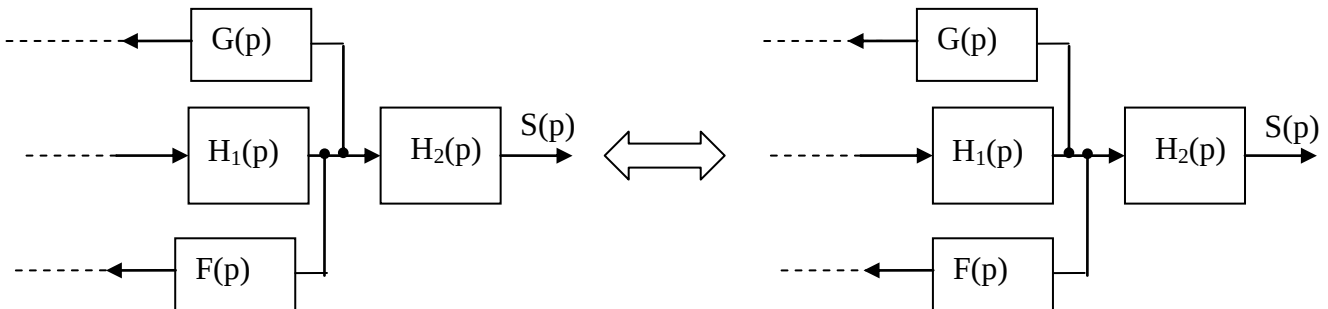
FTBO : Fonction de transfert en boucle ouverte.

$$FTBO(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} \Rightarrow FTBO(p) = G(p).F(p)$$

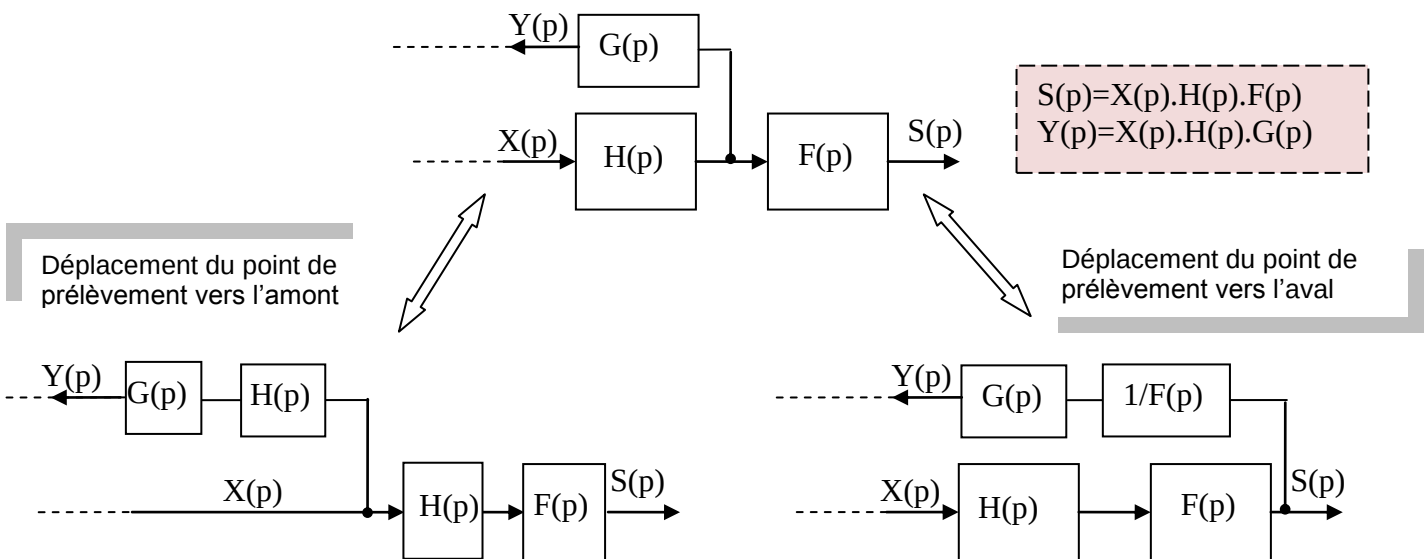
Formule de Black : $FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$

• **Déplacement des jonctions**

- Permutation des jonctions :

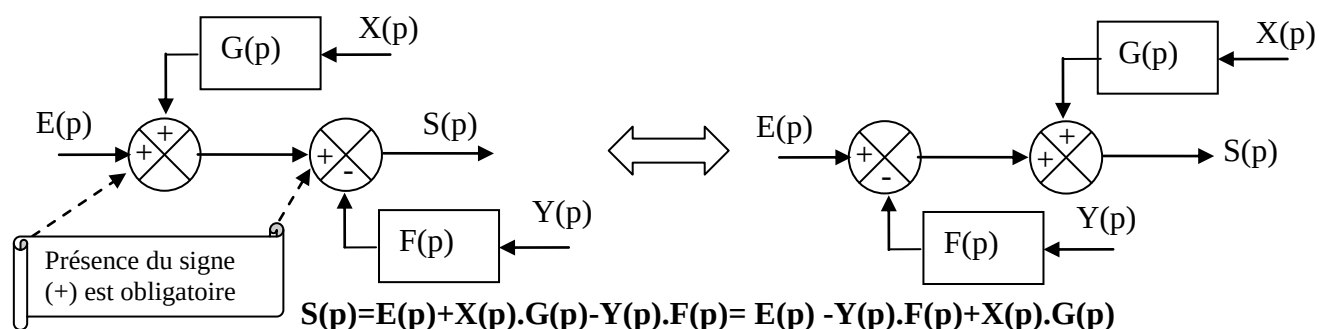


- Déplacement des jonctions vers l'amont ou vers l'aval. :

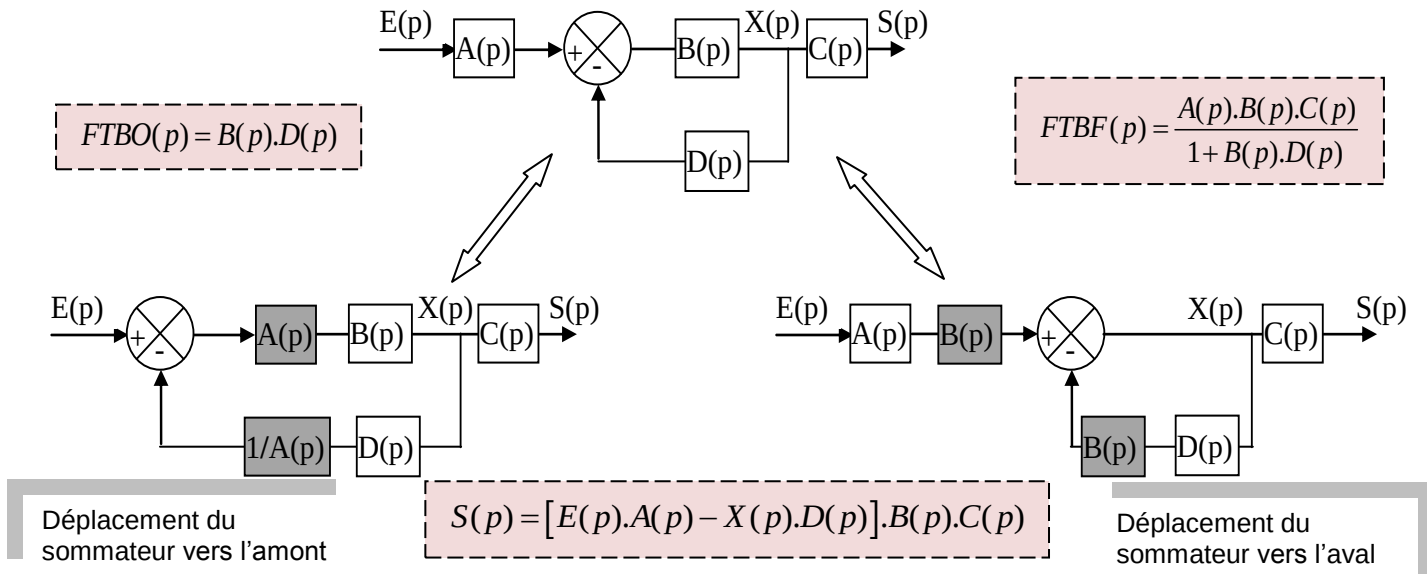


• **Déplacement des sommateurs**

Permutation des sommateurs :



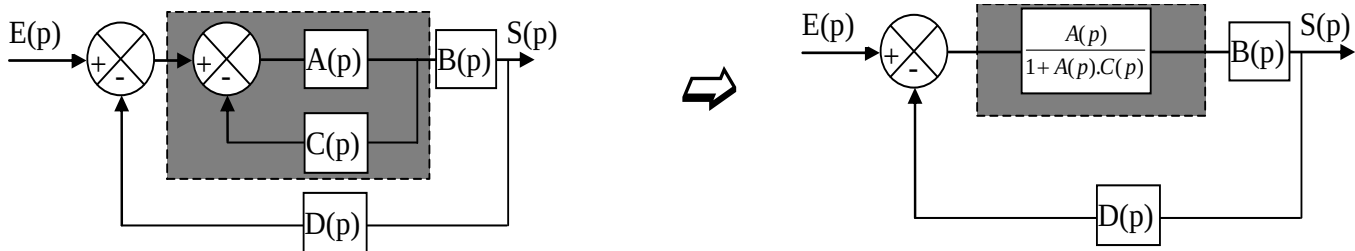
- Déplacement des sommateurs vers l'amont ou vers l'aval. :



NB : - IL faut garder les mêmes FTBO et FTBF quelque soit le déplacement effectué.
- Il est interdit de permuter un sommateur avec une jonction.

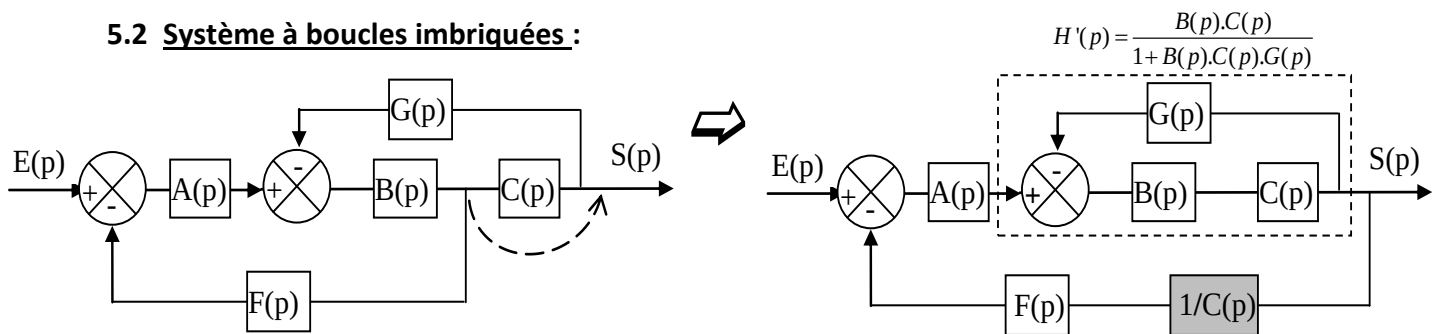
5- Algèbre des schémas blocs

5.1 Système à boucles concentriques :



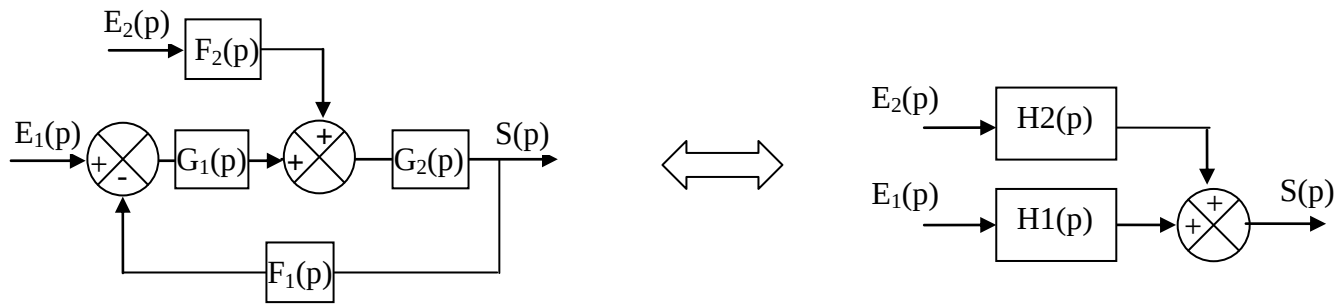
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{A(p)}{1 + A(p).C(p)} \cdot B(p)}{1 + \frac{A(p)}{1 + A(p).C(p)} \cdot B(p).D(p)} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).C(p) + A(p).B(p).D(p)}$$

5.2 Système à boucles imbriquées :



$$H(p) = \frac{A(p).H'(p)}{1 + A(p).H'(p).F(p). \frac{1}{C(p)}} = H(p) = \frac{A(p).B(p).C(p)}{1 + B(p).C(p).G(p) + A(p).B(p).F(p)}$$

2.5-Système à deux entrées et une sortie



Méthode de superposition : $E_1(p)$ non nul et $E_2(p)$ nul, puis $E_2(p)$ non nul et $E_1(p)$ nul.

▪ Avec $E_1(p) \neq 0$ et $E_2(p) = 0$, le schéma bloc devient : $H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{G_1(p).G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p).F_1(p)}$

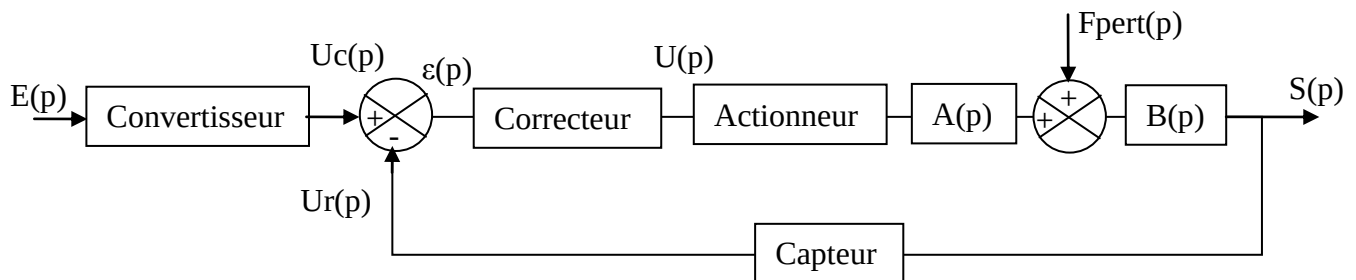
▪ Avec $E_2(p) \neq 0$ et $E_1(p) = 0$, le schéma bloc devient : $H_2(p) = \frac{S_2(p)}{E_2(p)} = \frac{F_2(p).G_2(p)}{1 + G_1(p).G_2(p).F_1(p)}$

En appliquant le principe de superposition : $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{G_1(p).G_2(p).E_1(p) + F_2(p).G_2(p).E_2(p)}{1 + F_1(p).G_1(p).G_2(p)}$$

$S(p) = H_1(p).E_1(p) + H_2(p).E_2(p)$: Les fonctions $H_1(p)$ et $H_2(p)$ ont le même dénominateur.

6- Gain du convertisseur dans un schéma bloc



Pour un asservissement correct :

$$\begin{cases} \varepsilon(p) = E(p).K_{conv} - S(p).K_{capt} \\ \varepsilon(p) = 0 \text{ et } E(p) = S(p) \end{cases} \Rightarrow K_{conv} = K_{capt}$$

ANALYSE TEMPORELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

1- Système de premier ordre

Fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$

Etude temporelle : Réponse à une entrée échelon

$$e(t) = E_0.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

Réponse temporelle : $s(t) = K.E_0(1 - e^{-t/\tau})$

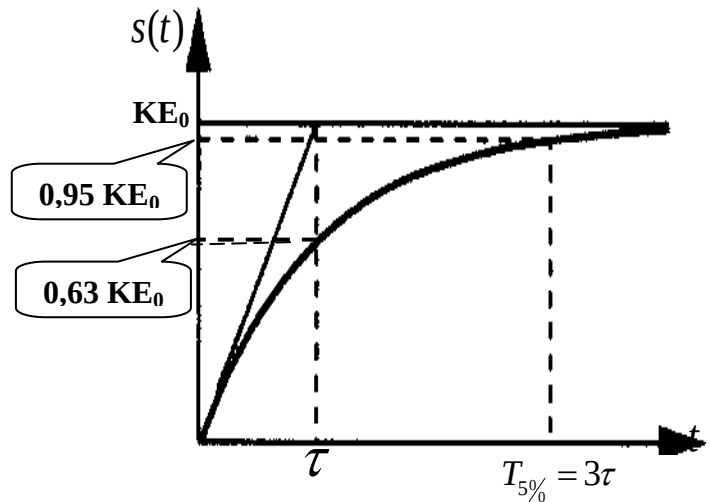
• **Allure de la réponse temporelle :**

Caractéristiques de la réponse temporelle :

$$s(0) = 0, \quad \dot{s}(0) = \frac{KE_0}{\tau}$$

$$s(\tau) = 0,63KE_0, \quad s(\infty) = KE_0$$

$$\text{Temps de réponse à 5\% : } T_{5\%} = 3\tau$$



2- Système de second ordre

Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{w_n}p + \frac{1}{w_n^2}p^2}$$

Etude temporelle : Réponse à une entrée échelon (réponse indicielle)

$$e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow \boxed{s(0) = 0} \quad \boxed{\dot{s}(0) = 0} \quad \boxed{s(\infty) = KE_0}$$

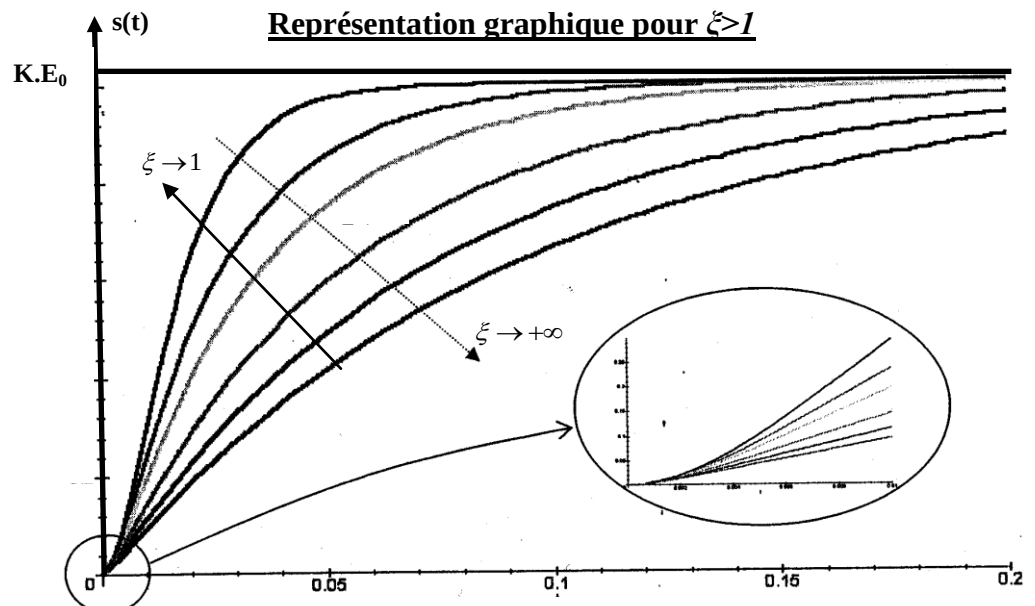
$$\text{On a : } H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{w_n}p + \frac{1}{w_n^2}p^2} = \frac{Kw_n^2}{w_n^2 + 2\xi w_n p + p^2} = \frac{Kw_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$\xi > 1$	$\xi = 1$	$\xi < 1$
Deux racines réelles : Régime apériodique	Deux racines doubles : Régime apériodique critique	Deux racines complexes conjuguées : Régime pseudo-périodique
$p_{1,2} = w_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$	$p_{1,2} = -w_n$	$p_{1,2} = w_n(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})$

2.1 Régime apériodique : $\xi > 1$

On peut donc écrire la fonction de transfert comme le produit de deux fonctions de transfert du premier

ordre : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$, avec $w_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$.



Le comportement du système tend asymptotiquement vers la valeur KE_0 sans jamais la dépasser. Plus le coefficient d'amortissement ξ est grand plus le temps de réponse est important.

$$\xi \nearrow \rightarrow t_{r_{5\%}} \nearrow$$

2.2 Régime apériodique critique : $\xi=1$

La fonction de transfert peut s'écrire sous la forme d'un double premier ordre : $H(p) = \frac{K}{(1+\tau p)^2}$, $w_n = \frac{1}{\tau}$

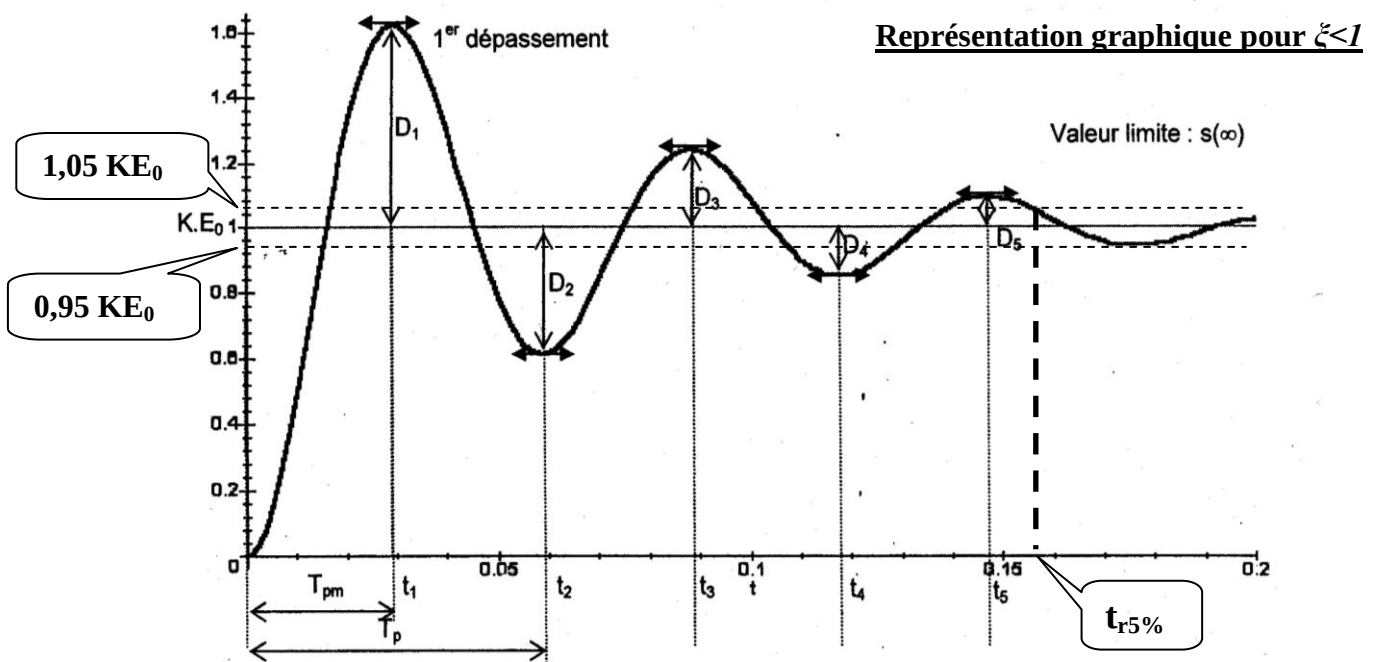
C'est le régime le plus rapide sans dépassement ($\xi=1$)

2.3 Régime pseudo-périodique : $\xi < 1$

On définit : $w_p = w_n \sqrt{1-\xi^2}$, w_p est appelée : **pulsation amortie**.

On pose $\cos \varphi = \xi$ et $\sin \varphi = \sqrt{1-\xi^2}$ $\Rightarrow$

$$s(t) = K.E_0 \left(1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(w_p t + \varphi) \right)$$



• **Pseudo pulsation :** $w_p = w_n \sqrt{1-\xi^2}$ (A retenir)

• **Pseudo période :**

La réponse présente des oscillations amorties de période : $T_p = \frac{2\pi}{w_p} = \frac{2\pi}{w_n \sqrt{1-\xi^2}}$ (A retenir)

• **Premier dépassement : D_1**

Le premier maximum (ou dépassement) apparaît à $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{w_p}$

$$\Rightarrow D_1 = K E_0 \cdot e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (\text{A retenir})$$

• **Premier dépassement relatif : $D_1\%$**

$$D_1 = \frac{D_1}{s(\infty)} \cdot 100\% \quad \Rightarrow \quad D_1 = 100 \cdot e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \% \quad (\text{A retenir})$$

2.4 Temps de réponse à 5%

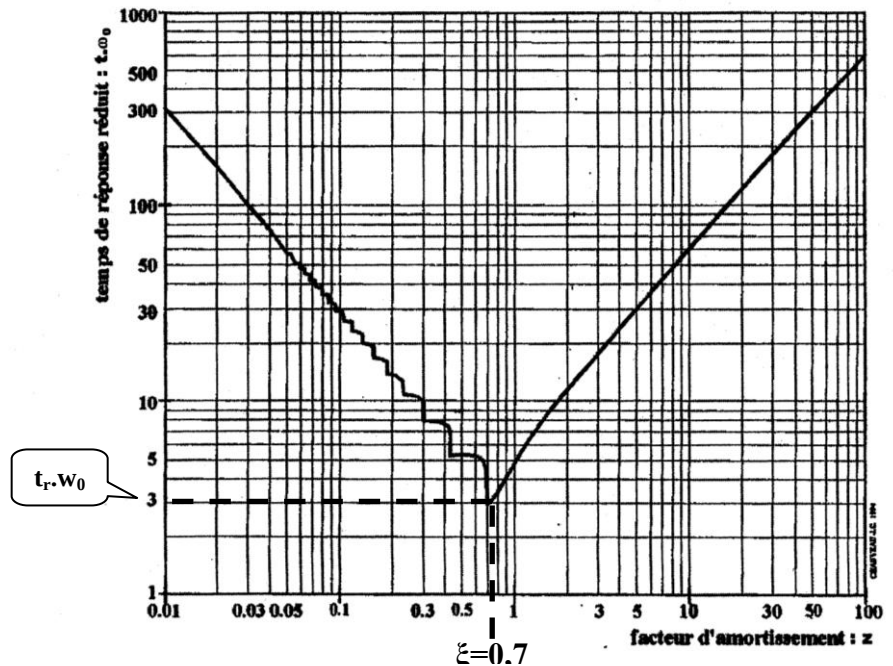
On utilise l'abaque ci-contre, qui donne la valeur du temps de réponse réduit : $t_{5\%}w_0$ en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

Pour $\xi=0,7$ le temps de réponse est minimal donc :

Le régime le plus rapide :
($\xi=0,7$)

Pour $\xi=1$: $t_{5\%}w_n = 5$, on a : $w_n = \frac{1}{\tau}$,

donc : Le temps de réponse = 5τ pour $\xi=1$.



ANALYSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES LINEAIRES

1 Réponse harmonique d'un système 'intégrateur

Le système intégrateur a pour fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{p} \Rightarrow H(jw) = \frac{K}{jw}$

Gain en dB :

$$G(w) = |H(jw)| = \frac{K}{w}$$

$$G_{dB} = 20 \log |H(jw)|$$

$$= 20 \log K - 20 \log w$$

Equation d'une droite de pente -20dB/décade :

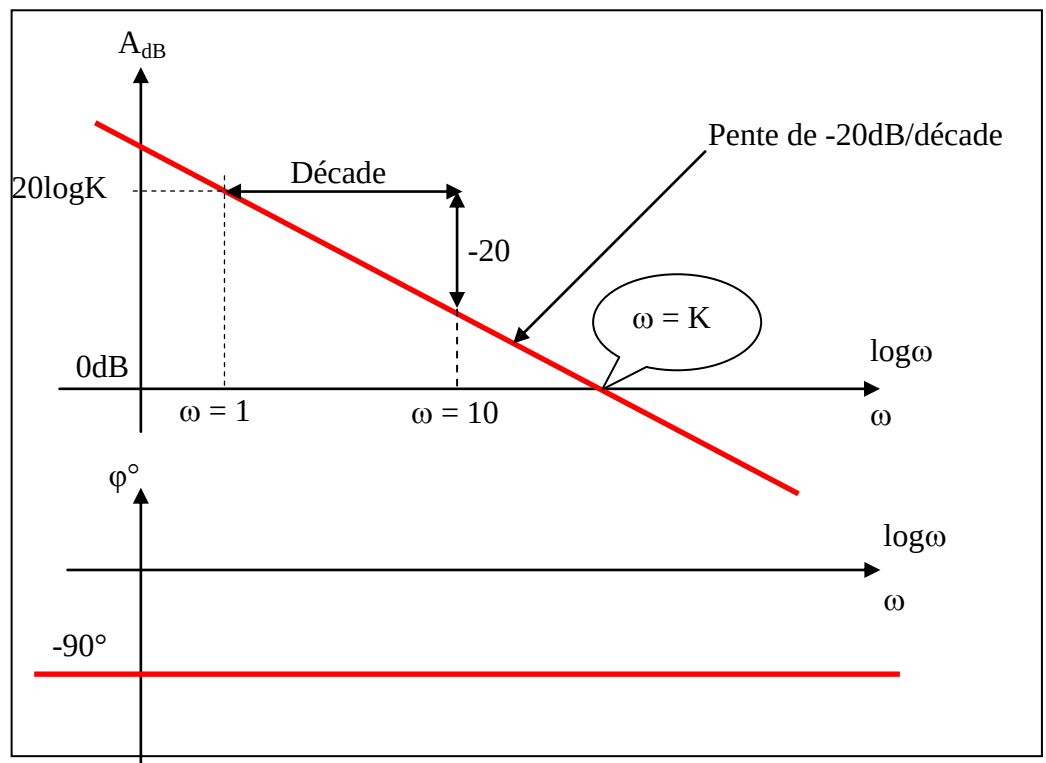
Pour $w=1 \rightarrow G_{dB}=20 \log K$,

et pour $G_{dB}=0 \rightarrow w=K$

Phase :

$$\varphi(w) = \text{Arg}[H(jw)]$$

$$\Rightarrow \varphi(w) = -90^\circ$$



Généralisation : $H(p) = \frac{K}{p^\alpha}$

Gain en dB :

$$G_{dB} = 20 \log |H(jw)| = 20 \log K - 20\alpha \log w$$

C'est une droite de pente -20α dB/décade, et on a toujours pour $w=1 \rightarrow G_{dB}=20 \log K$

Phase : $\varphi(w) = -\alpha \cdot 90^\circ$

2 Réponse harmonique du système de premier ordre

Le système du premier ordre a pour fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

En régime harmonique $H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \Rightarrow$ Module: $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$, Argument : $\varphi = -\text{Arctg}(\tau\omega)$.

Gain en dB : $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}$

Phase : $\varphi(\omega) = \text{Arg}[H(j\omega)] = -\arctan(\tau\omega)$

Asymptotes du diagramme de Bode

- Pour $\omega \rightarrow 0$, $\begin{cases} H(j\omega) = K \text{ (équivalent à un comportement de gain pur)} \\ G_{dB} = 20 \log K : \text{Asymptote horizontale} \\ \varphi = 0^\circ : \text{Asymptote horizontale} \end{cases}$
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $\begin{cases} H(j\omega) = \frac{K}{\tau j\omega} \text{ (équivalent à un comportement d'intégrateur)} \\ G_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega : \text{Equation d'une droite de pente -20dB/décade} \\ \varphi = -90^\circ : \text{Asymptote horizontale} \end{cases}$

Valeur particulière : Pour $\omega = \frac{1}{\tau}$

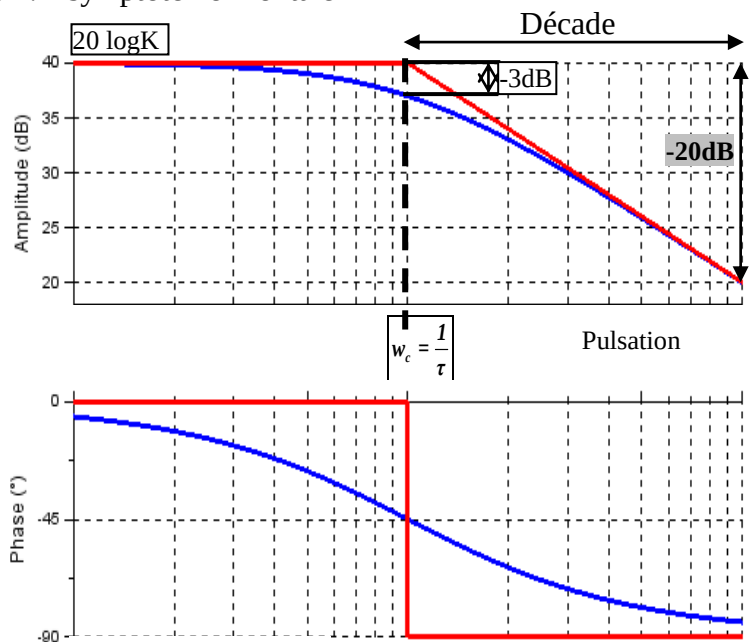
Les deux asymptotes du diagramme de gain se croisent pour la pulsation de cassure ω_c :

$$20 \log K = 20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log \omega_c \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{\tau}}$$

Le module $|H(j\omega_0)| = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{dB}$$

La phase $\varphi(\omega_c) = -45^\circ$.



3 Réponse harmonique du système de deuxième ordre

La fonction de transfert d'un système du second ordre s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}, \text{ et en régime harmonique } H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot 2z \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Module : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2z \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cdot$ **Argument :** $\varphi = -\text{Arctg}\left(\frac{2z \cdot \omega \cdot \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

Asymptotes du diagramme de Bode

- Pour $\omega \rightarrow 0$, $\begin{cases} G_{dB} = 20 \log K : \text{Asymptote horizontale} \\ \varphi = 0 : \text{Asymptote horizontale} \end{cases}$

- Pour $w \rightarrow +\infty$,
$$\begin{cases} G_{dB} = 20\log(K.w_0^2) - 40\log w : \text{Equation d'une droite de pente } -40\text{dB/décade} \\ \varphi = -180^\circ : \text{Asymptote horizontale} \end{cases}$$

Les deux asymptotes du diagramme de gain se croisent pour la pulsation de cassure w_c :

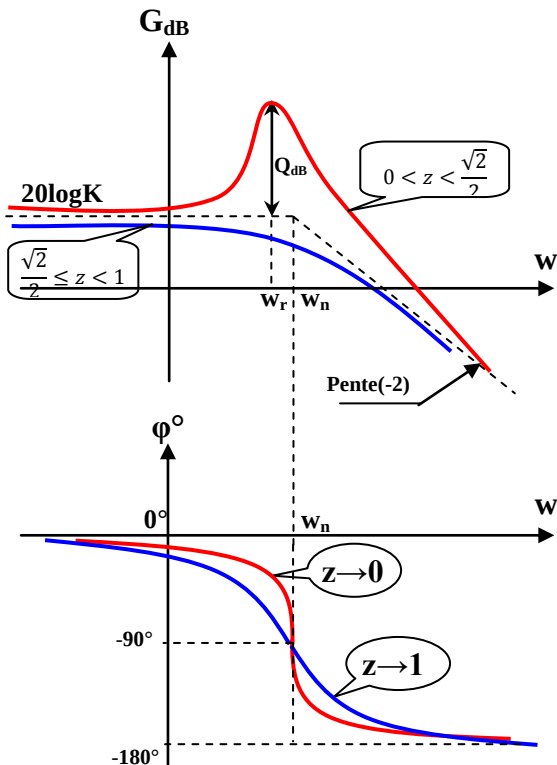
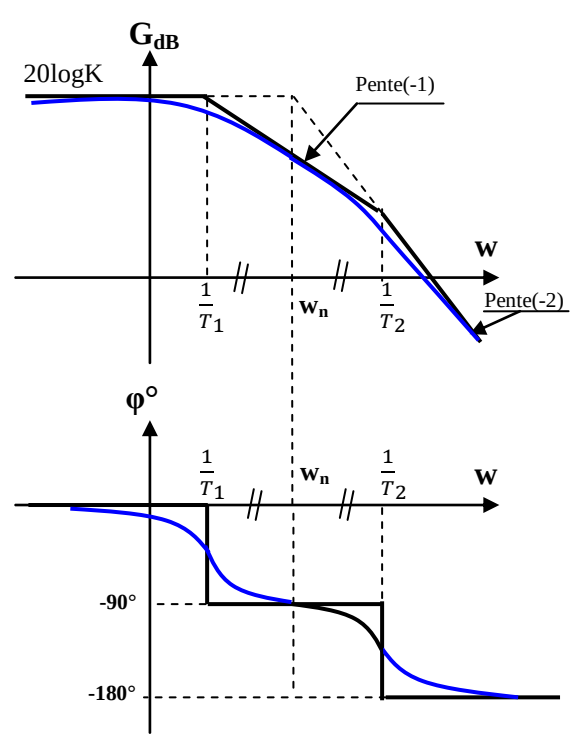
$$20\log K = 20\log(K.w_0^2) - 40\log w_c \Rightarrow \boxed{w_c = w_0}$$

Valeur particulière : Pour $w=w_0$

Le module $|H(jw_0)| = \frac{K}{2.z} \Rightarrow G_{dB}(w_0) = 20\log K - 20\log 2.z$.

La phase $\varphi(w_0) = -90^\circ$ (quelque soit la valeur de z).

On distingue **trois cas** en fonction du coefficient d'amortissement z :

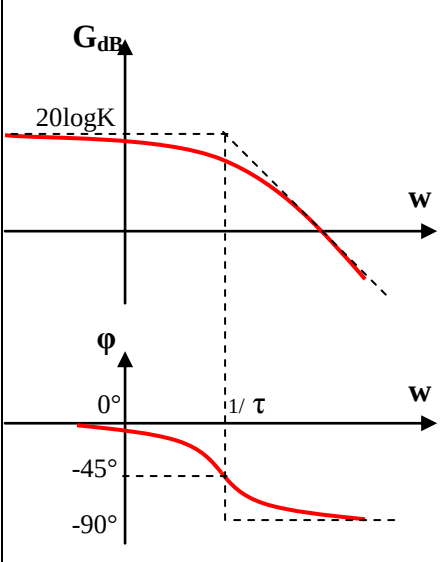
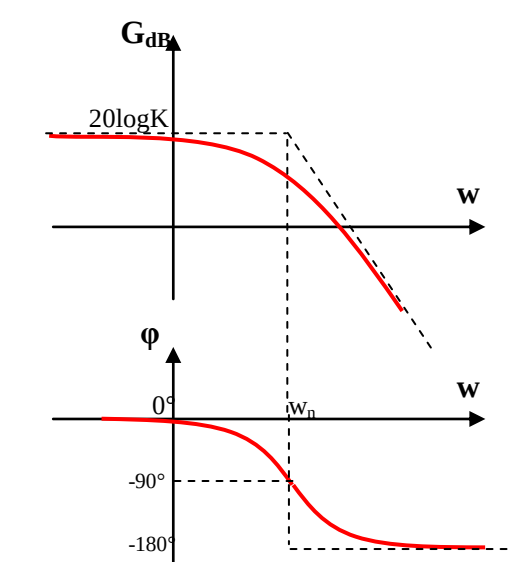
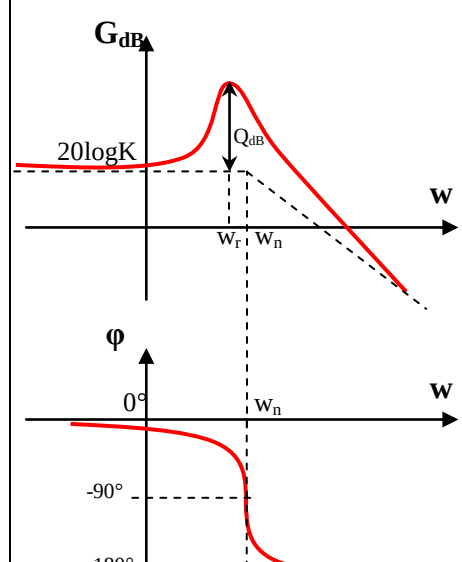
$0 < Z \leq 1$	$Z > 1$
✓ Premier cas (résonance): $z < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ Coefficient de surtension: $Q = \frac{1}{2.z\sqrt{1-z^2}}$, pulsation de résonance: $w_r = w_0\sqrt{1-2z^2}$ Lorsque $z \rightarrow 0$, alors $w_r \rightarrow w_0$ et $Q \rightarrow +\infty$ ✓ Deuxième cas: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z \leq 1$ Le diagramme d'amplitude ne présente pas de maximum, la courbe réelle reste toujours sous les asymptotes. pour $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow G_{dB}(w_0) = 20\log K - 3\text{dB}$, et pour $z=1 \Rightarrow G_{dB}(w_0) = 20\log K - 6\text{dB}$ Chute de gain à w_0: $3\text{dB} \leq 20\log K - G_{dB}(w_0) \leq 6\text{dB}$ 	La fonction de transfert peut se décomposer en un produit de deux 1^{er} ordre : $H(p) = \frac{K}{(1+T_1.p).(1+T_2.p)}$ Le tracé des diagrammes de Bode est donc la somme graphique des deux tracés du premier ordre. Les deux pulsations de cassure sont $w_1 = \frac{1}{T_1}$ et $w_2 = \frac{1}{T_2} \text{ . (On suppose dans la suite que } T_2 < T_1 \text{)}$ 

IDENTIFICATION

1. Identification fréquentielle

On sollicite le système par une entrée de type sinusoïdale dont on fait varier la fréquence.

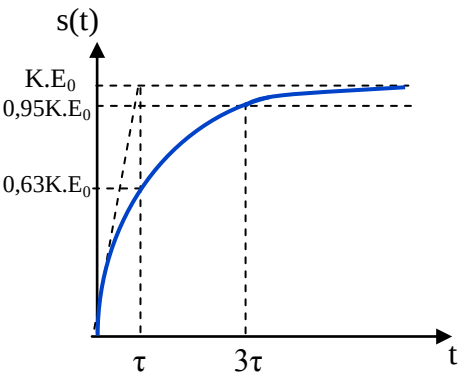
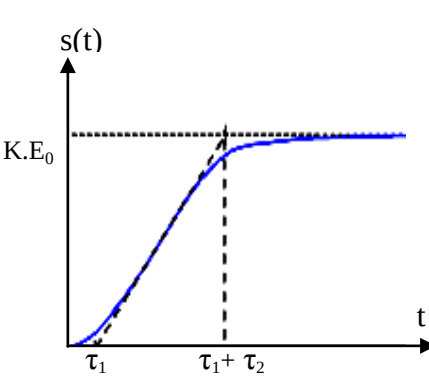
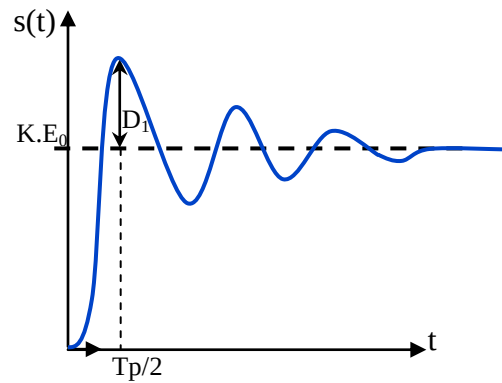
La présence des intégrateurs dans le système est caractérisée par une pente de $(-\alpha \cdot 20\text{dB/déc})$ pour le gain et de $(-\alpha \cdot 90^\circ)$ pour la phase lorsque $(\omega \rightarrow 0)$. α : classe du système.

Premier ordre	Second ordre	
	$\xi \geq 0,7$	$\xi < 0,7$
		
Vérification de la pente à l'infini (-20dB/déc) et de la phase à l'infini (-90°). Détermination de $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ par la courbe de phase : $\varphi(1/\tau) = -45^\circ$ ou par l'intersection des deux asymptotes	Vérification : -pente à l'infini (-40dB/déc) et phase à l'infini (-180°). Détermination de ω_n par la courbe de phase : $\varphi(\omega_n) = -90^\circ$, ou par l'intersection des deux asymptotes. On détermine ξ à partir de la valeur mesurée du module : $G_{dB}(\omega_n) = 20 \log\left(\frac{K}{2\xi}\right).$	
	Si $\xi > 1$: $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$; $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$: déterminée par l'intersection de l'asymptote horizontale et celui de pente -20dB/déc. $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1}$: déterminée par l'intersection de l'asymptote de pente -20dB/déc et celui de pente -40dB/déc.	Pour $\xi < 0,7$: On détermine ξ par : $G_{dB}(\omega_n) = 20 \log\left(\frac{K}{2\xi}\right)$ Ou bien à partir de la valeur mesurée la résonance : $Q_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\right), \text{ ou }$ $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$
On détermine le gain par l'asymptote à l'origine $(\omega \rightarrow 0)$: $G_{dB}(0) = 20\log(K)$		

2. Identification temporelle

On sollicite le système par une entrée de type échelon ou par une impulsion de Dirac, on étudie ensuite la réponse temporelle de la sortie.

Réponses pour une entrée échelon

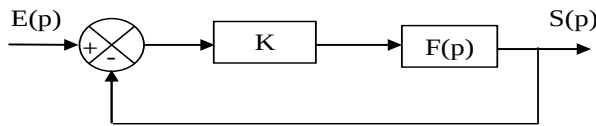
Premier ordre	Second ordre	
	$\xi \geq 1$	$\xi < 1$
		
On détermine le gain par le rapport de la sortie sur l'entrée en régime permanent : $s(\infty) = KE_0$		
- Tangente non nulle à l'origine. On a donc un système de 1^{er} ordre : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$ On déduit la constante de temps à partir du temps de réponse à 5% ($t_{5\%} = 3\tau$) ou par la pente à l'origine ($\text{tg}\alpha = \frac{K.E_0}{\tau}$) on a aussi : $s(\tau) = 0,63 KE_0$	- Tangente nulle à l'origine. → système de second ordre : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$ Si $\tau_1 \ll \tau_2$ on peut approximer : Méthode1: L'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses → τ_1 et avec l'asymptote à l'infini → $\tau_1 + \tau_2$ Méthode 2 : par un premier ordre : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_2 \cdot p)}$, en utilisant l'hypothèse du pôle dominant.	- Tangente nulle à l'origine. → système de second ordre : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$ - On détermine ξ à partir de la mesure du premier dépassement D_1 : $D_1 = K.E_0 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ - ω_0 est déterminée à partir de la pseudo période T_p : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$

RAPIDITE DES SYSTEMES BOUCLES

FTBF : Premier ordre	FTBF : Second ordre
Le temps de réponse à 5% pour une réponse indicielle est : $T_{5\%} = 3\tau$. La rapidité augmente si le temps de réponse à 5% diminue ou si la constante de temps τ diminue. Bande passante : $BP_{-3dB} =]0, 1/\tau[$.	Le temps de réponse à 5% pour une réponse indicielle est donné par l'abaque des temps de réponse réduits. Pour un coefficient d'amortissement ξ constant, le produit $t_{5\%} \cdot \omega_n$ est constant, donc la rapidité augmente si la pulsation propre ω_n augmente. ➤ La réponse est plus rapide si $\xi = 0,7$. ➤ La réponse est plus rapide sans dépassement si $\xi = 1$. (Régime apériodique : rapidité ↗ si $\xi \rightarrow 1$). Bande passante : $BP_{-3dB} =]0, \omega_n[$ si $\xi = 0,7$ et $BP_{-6dB} =]0, \omega_n[$ si $\xi = 1$.

Une augmentation de la bande passante provoque, en général, une augmentation de la rapidité.

Influence du gain sur la rapidité des systèmes bouclés



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K.F(p)}{1+K.F(p)}$$

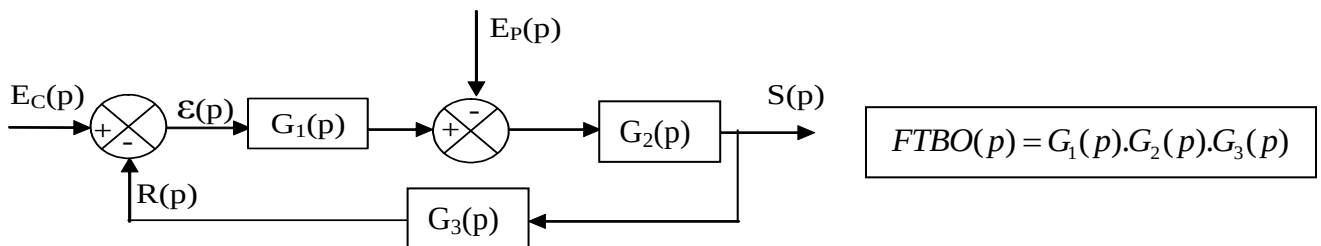
Quand **K** est grand, la sortie tend à être égale à l'entrée et le système est donc très rapide.

Une augmentation du gain de la FTBO permet, en général, une augmentation de la rapidité.

PRECISION DES SYSTEMES BOUCLES

Un système est **précis** si l'écart est nul en régime permanent: $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0$.

Considérons un système bouclé à deux entrées :



$$FTBO(p) = G_1(p).G_2(p).G_3(p)$$

$E_c(p)$: entrée consigne (principale) ; $E_p(p)$: entrée perturbation (secondaire).

Principe de la superposition : $S(p) = \frac{G_1(p).G_2(p)}{1+FTBO(p)} E_c(p) - \frac{G_2(p)}{1+FTBO(p)} E_p(p)$

et comme $\varepsilon(p) = E_c(p) - G_3(p).S(p) \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)} E_c(p) + \frac{G_2(p).G_3(p)}{1+FTBO(p)} E_p(p) \Rightarrow \varepsilon(p) = \varepsilon_c(p) + \varepsilon_p(p)$

$\varepsilon_c(p) = \frac{1}{1+FTBO(p)} E_c(p)$: Ecart vis-à-vis la consigne.

$\varepsilon_p(p) = \frac{G_2(p).G_3(p)}{1+FTBO(p)} E_p(p)$: Ecart vis-à-vis la perturbation.

1- Ecart vis-à-vis la consigne

L'entrée perturbation est nulle ($E_p(p)=0$).

Notons: $FTBO(p) = \frac{K.N(p)}{p^\alpha.D(p)}$ avec $\begin{cases} \alpha : \text{classe de la FTBO} \\ K : \text{gain statique} \\ N(0)=1 \text{ et } D(0)=1 \end{cases}$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{E_c(p)}{1+FTBO(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{p.E_c(p)}{1+FTBO(p)} \right].$$

1.1- Ecart statique (écart de position) :

On appelle écart statique ε_s ou écart de position ε_p quand l'entrée est un **échelon** :

$$e_c(t) = a.u(t) \Rightarrow E_c(p) = \frac{a}{p}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{1+FTBO(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a.p^\alpha.D(p)}{p^\alpha.D(p) + K.N(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a.p^\alpha}{p^\alpha + K} \right].$$

- Si la FTBO est de classe 0 ($\alpha=0$), l'écart statique est égal à $\frac{a}{1+K}$
- Si la FTBO est de classe supérieure ou égale à 1 ($\alpha \geq 1$), l'écart statique est nul.

Conclusion :

Pour annuler l'écart statique, il faut au moins un intégrateur dans la FTBO

Si la FTBO n'a pas d'intégration, l'écart statique décroît quand le gain de la FTBO augmente

1.2- Ecart de traînage (écart de vitesse ou de poursuite) :

On appelle écart de traînage ε_t quand l'entrée est une **rampe** : $e_c(t) = a.t.u(t) \Rightarrow E_c(p) = \frac{a}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a}{p(1+FTBO(p))} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a.p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right].$$

- Si la FTBO est de classe 0 ($\alpha=0$), l'écart de traînage est infini.
- Si la FTBO est de classe 1 ($\alpha=1$), l'écart de traînage est égal à $\frac{a}{K}$.
- Si la FTBO est de classe supérieure ou égale à 2 ($\alpha \geq 2$), l'écart de traînage est nul.

Conclusion :

Pour annuler l'écart de traînage, il faut au moins deux intégrateurs dans la FTBO

Si la FTBO a une intégration, l'écart de traînage décroît quand le gain de la FTBO augmente

Tableau des écarts en fonction de l'entrée et la classe de la FTBO

Entrée	Classe de la FTBO			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$e_c(t) = a.u(t) \Rightarrow E_c(p) = \frac{a}{p}$	$\varepsilon_s = \frac{a}{1+K_{bo}}$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$
$e_c(t) = a.t.u(t) \Rightarrow E_c(p) = \frac{a}{p^2}$	$\varepsilon_t = +\infty$	$\varepsilon_t = \frac{a}{K_{bo}}$	$\varepsilon_t = 0$	$\varepsilon_t = 0$
$e_c(t) = \frac{1}{2} a.t^2.u(t) \Rightarrow E_c(p) = \frac{a}{p^3}$	$\varepsilon_a = +\infty$	$\varepsilon_a = +\infty$	$\varepsilon_a = \frac{a}{K_{bo}}$	$\varepsilon_a = 0$

ε_s : écart statique ; ε_t : écart de traînage ; ε_a : écart d'accélération

2- Ecart vis-à-vis la perturbation

L'entrée consigne est nulle ($E_c(p)=0$).

L'écart vis-à-vis la perturbation est : $\varepsilon_p(p) = \frac{G_2(p).G_3(p)}{1+FTBO(p)} E_p(p)$.

Notons: $G_1(p) = \frac{K_1.N_1(p)}{P^{\alpha_1}.D_1(p)}$ et $G_2(p).G_3(p) = \frac{K_2.N_2(p)}{P^{\alpha_2}.D_2(p)}$ avec $N_1(0)=N_2(0)=D_1(0)=D_2(0)=1$.

2.2- Perturbation en échelon :

La perturbation $E_p(p)$ est un échelon : $e_p(t) = a.u(t) \Rightarrow E_p(p) = \frac{a}{p}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{sp} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_p(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a \cdot G_2(p) \cdot G_3(p)}{1 + FTBO(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a \cdot K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right].$$

➤ L'écart statique vis-à-vis la perturbation est nul si $\alpha_1 \geq 1$ et quelque soit α_2 .

Conclusion :

Pour annuler l'erreur statique vis-à-vis la perturbation, il faut au moins un intégrateur placé en amont du point d'application de la perturbation

2.3- Perturbation en rampe :

La perturbation $E_p(p)$ est une rampe : $e_p(t) = a.t.u(t) \Rightarrow E_p(p) = \frac{a}{p^2}$.

$$\varepsilon_{tp} = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{a \cdot K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} D_1(p)}{p^{\alpha_1} D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{a \cdot K_2 \cdot p^{\alpha_1 - 1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right]$$

➤ L'écart de traînage vis-à-vis la perturbation est nul si $\alpha_1 \geq 2$ et quelque soit α_2 .

Conclusion :

Pour annuler l'erreur de traînage vis-à-vis la perturbation, il faut au moins deux intégrateurs placés en amont du point d'application de la perturbation

STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

1. Etude de la stabilité à partir de la FTBF

Le système est stable si la FTBF possède : - des pôles réels tous négatifs ;

- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

- Un système a plusieurs entrées, est un système qui possède plusieurs FTBF ayant le même dénominateur. Il suffit donc, d'étudier la stabilité d'une seule FTBF (la plus simple en général).

1-1 Critère algébrique de stabilité : ROUTH

Soit une fonction de transfert en boucle fermée de dénominateur : $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$.

- Si certains a_i sont négatifs ou nuls, alors $D(p)$ a des racines à partie réelle positive : le système est instable.

- Si tous les a_i sont positifs, **on ne peut pas** affirmer que les p_i sont à partie réelle négative.

Pour conclure rapidement sur la stabilité, on pourra utiliser le critère de **ROUTH simplifié** :

Système	Premier ordre	Second ordre	Troisième ordre
FTBF	$H(p) = \frac{N(p)}{a_1 p + a_0}$	$H(p) = \frac{N(p)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	$H(p) = \frac{N(p)}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$
Condition de stabilité	$p = -\frac{a_0}{a_1}$ $p < 0 \Leftrightarrow \frac{a_0}{a_1} > 0$	$p_i < 0 \Leftrightarrow a_2, a_1 \text{ et } a_0 > 0$	$p_i < 0 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

2. Etude de la stabilité à partir de la FTBO

2-1 Critères graphiques : REVERS

- Enoncé du critère du revers :**

Un système est stable en **boucle fermée** si, à la pulsation de coupure w_{co} de la FTBO pour laquelle :

$$|H_{bo}(j\omega_{co})| = 1 \Rightarrow G_{dB}(\omega_{co}) = 0,$$

le déphasage est supérieur à -180° .

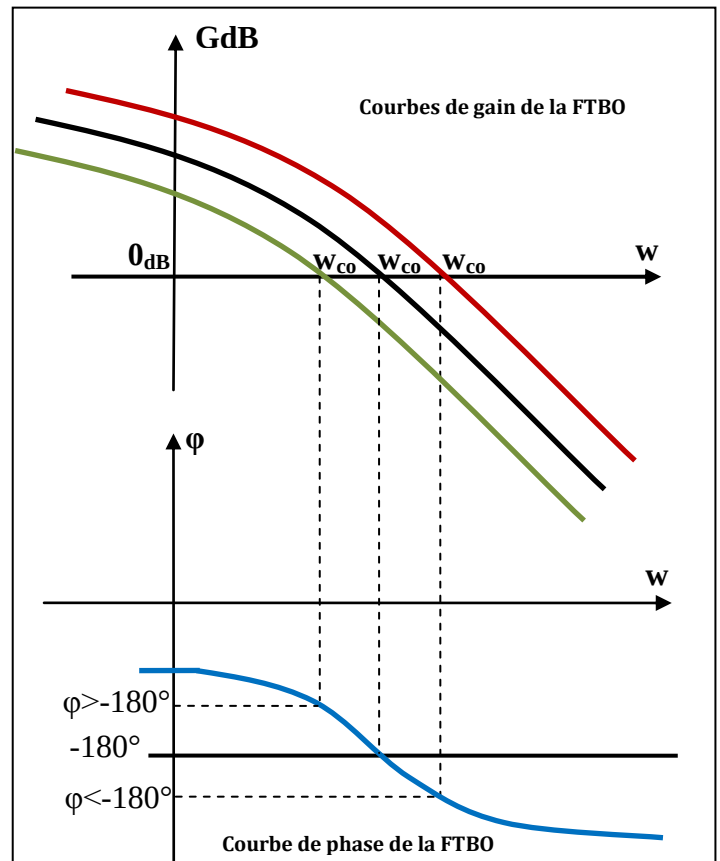
Il est instable dans le cas contraire.

$\varphi(w_{co}) > -180^\circ$: Système stable en boucle fermée.

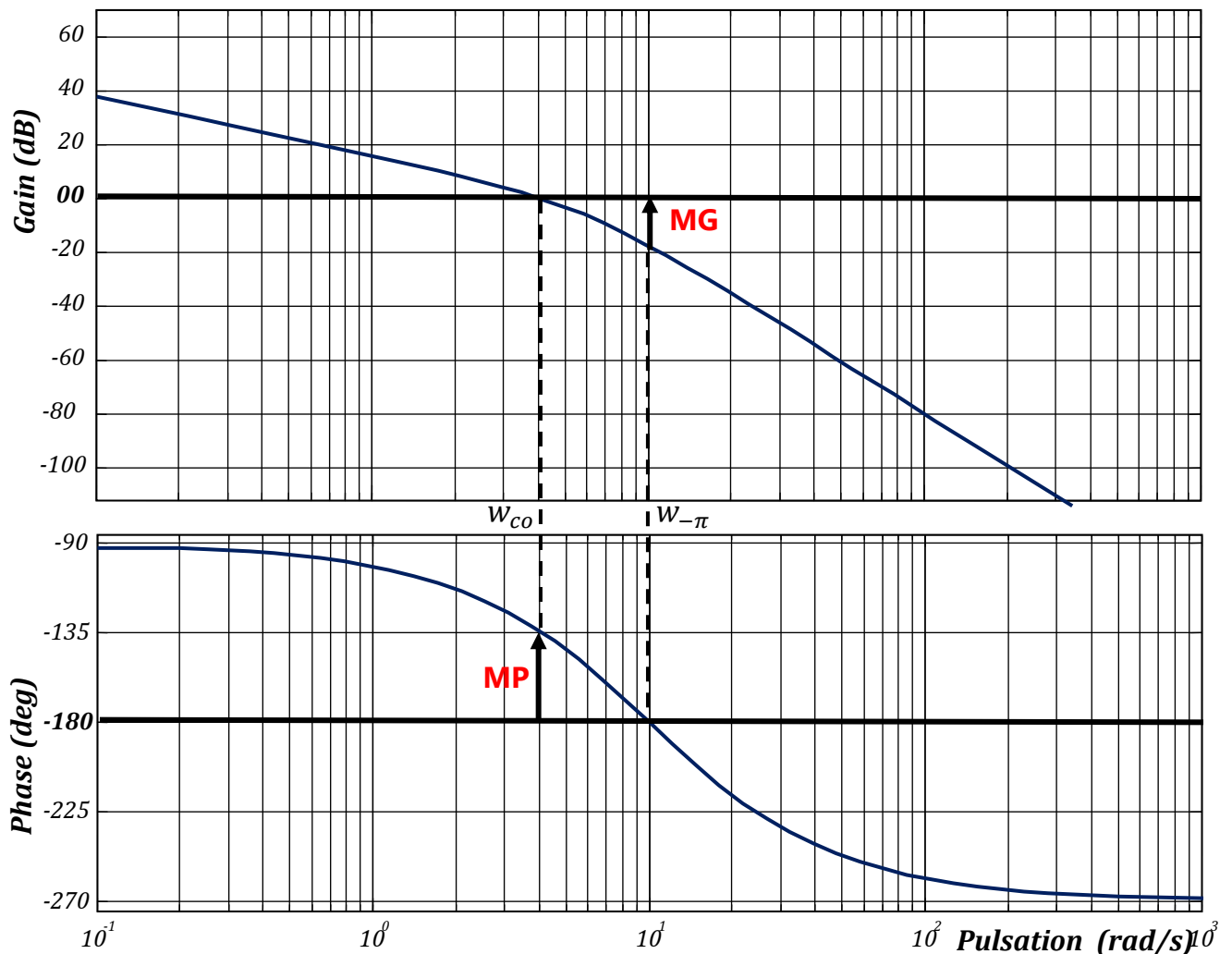
$\varphi(w_{co}) < -180^\circ$: Système instable en boucle fermée.

$\varphi(w_{co}) = -180^\circ$: Système est juste instable en boucle fermée.

2-3-2 Marges de stabilité :



Gain (dB)



Marge de phase	Marge de gain
$\begin{cases} MP = 180 + \text{Arg}[H_{BO}(j\omega_{CO})] \\ H_{BO}(j\omega_{CO}) = 1 \end{cases}$ La marge de phase MP est la distance mesurée en degré entre la courbe de phase à ω_{CO} et -180°	$\begin{cases} MG = -G_{dB}(\omega_{-\pi}) = 20 \log \left(\frac{1}{ H_{BO}(j\omega_{-\pi}) } \right) \\ \text{Arg}[H_{BO}(j\omega_{-\pi})] = -180^\circ \end{cases}$ La marge de gain MG est la distance mesurée en décibels entre la courbe de gain à $\omega_{-\pi}$ et l'axe des abscisses 0dB.
Un système est stable, s'il possède des marges de stabilité positives. Un système a des marges de stabilité satisfaisantes, si elles sont supérieures aux valeurs imposées par le cahier des charges. Les valeurs de marge de phase égale à 45° et de marge de gain égale à 12dB sont considérées comme satisfaisantes pour la plupart des systèmes asservis.	

CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

1. Introduction

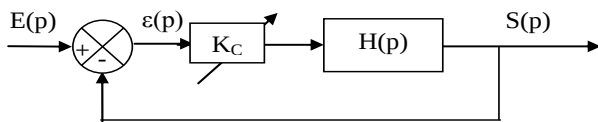
Afin d'améliorer les performances du système asservi, on ajoute des correcteurs:

Nous nous intéressons aux cas les plus classiques : **correcteurs P, PI et PD agissant sur le signal d'écart.**

2. Correcteur standards

2.1- Correcteur proportionnel (P) :

Le correcteur proportionnel est un gain pur dont la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme $C(p) = k$.



• Réglage d'un correcteur proportionnel :

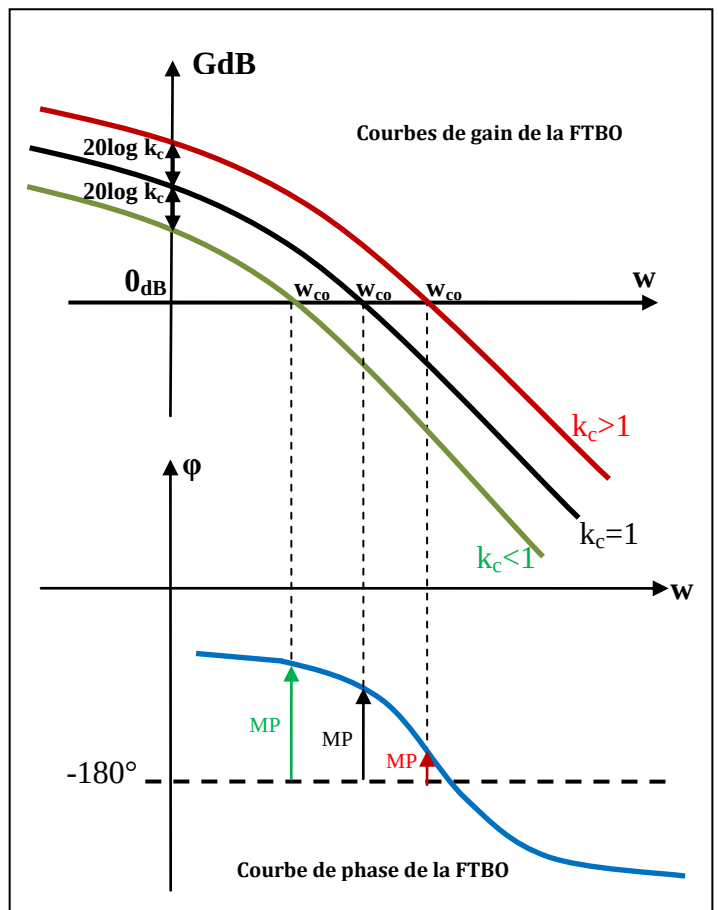
Le réglage du correcteur k_c consiste à traduire verticalement la courbe de gain en fonction des exigences du cahier des charges :

-Translation vers le haut de $20 \log k_c \rightarrow K_c > 1$:
 $\begin{cases} \omega_{CO} \text{ augmente} \rightarrow \text{amélioration de la rapidité} \\ MP \text{ diminue} \rightarrow \text{dégradation de la stabilité} \end{cases}$

-Translation vers le bas de $20 \log k \rightarrow K_c < 1$:
 $\begin{cases} \omega_{CO} \text{ diminue} \rightarrow \text{diminution de la rapidité} \\ MP \text{ augmente} \rightarrow \text{amélioration de la stabilité} \end{cases}$

$$K_c \nearrow \rightarrow K_{BO} \nearrow \begin{cases} \varepsilon \searrow \Rightarrow \text{Précision} \nearrow \\ tr \searrow \Rightarrow \text{Rapidité} \nearrow \\ \begin{cases} MP \searrow \\ MG \searrow \end{cases} \Rightarrow \text{Stabilité} \searrow \end{cases}$$

La correction proportionnelle ne permet pas d'améliorer en même temps la stabilité et la précision



2.2- Correcteur proportionnel – intégral (PI) :

La fonction de transfert de ce correcteur est :

$$C(p) = K(1 + \frac{1}{T_i \cdot p})$$

Elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$C(p) = K(\frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p})$$

K : gain réglable.

T_i : constante de temps d'intégration réglable, elle permet de corriger les risques d'instabilité par

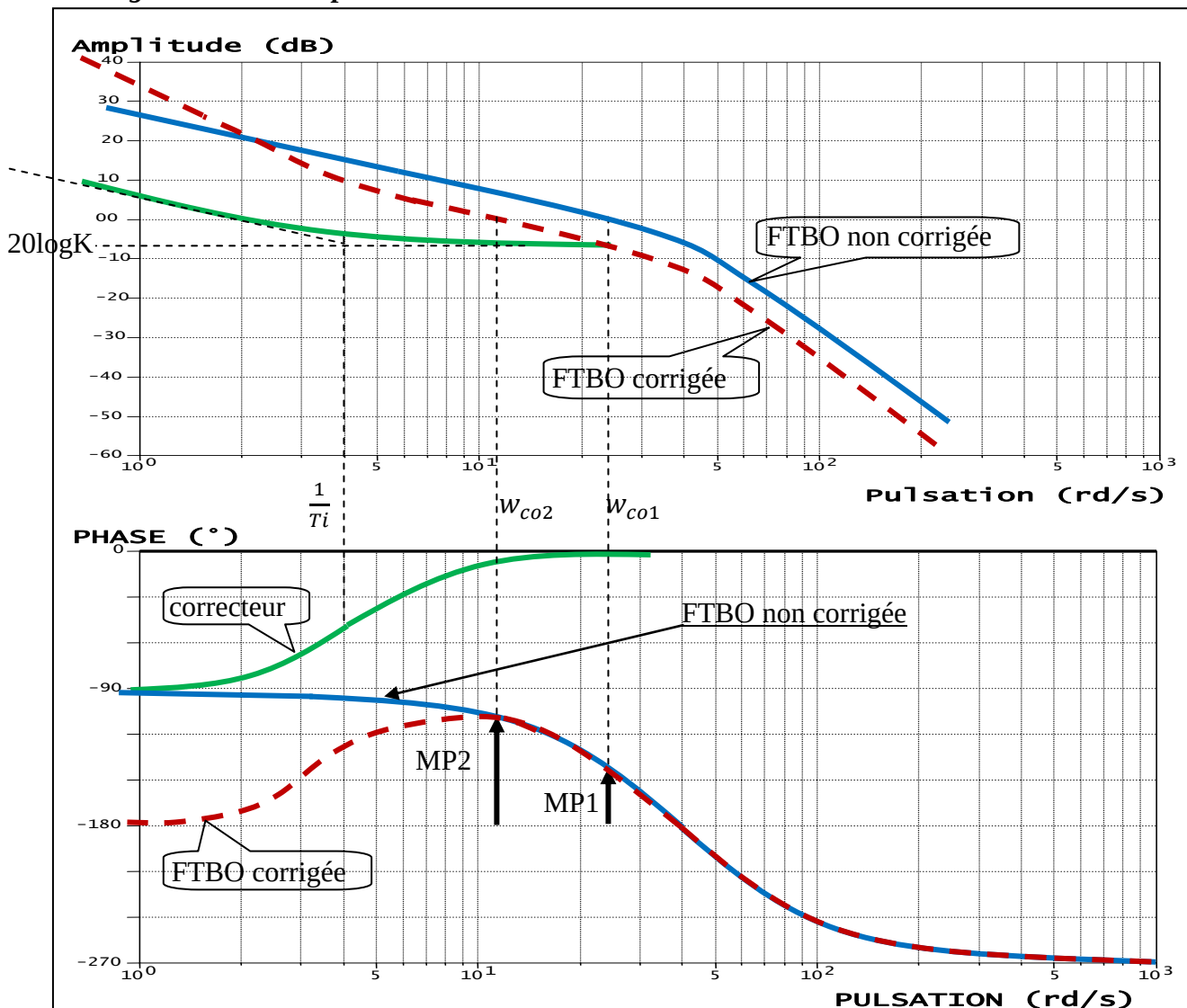
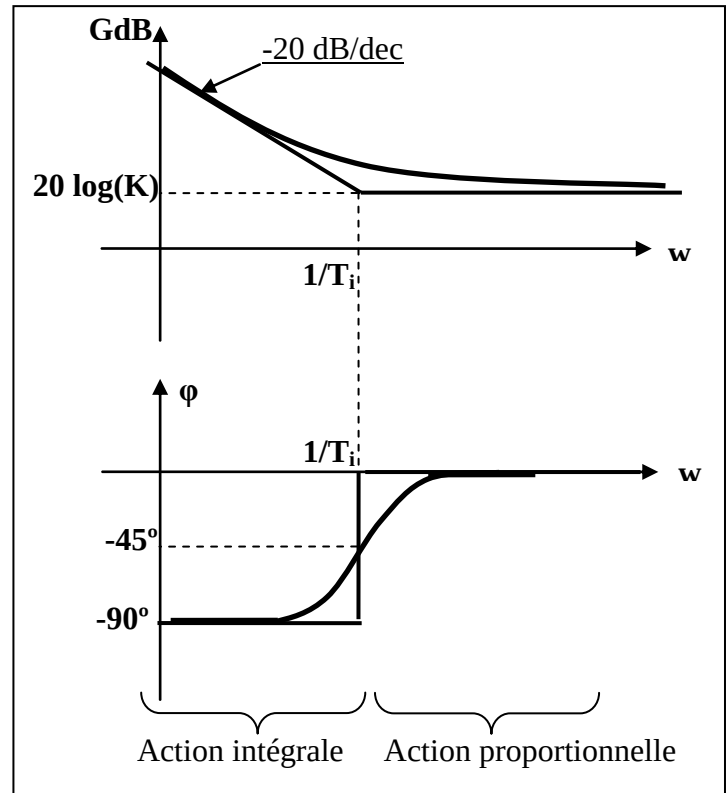
apport de phase, tel que : $\frac{1}{T_i} \ll w_{co}$.

(w_{co} : pulsation de coupure de la FTBO non

corrigée, en général $\frac{1}{T_i} = \frac{w_{co}}{10}$)

Le terme ($\frac{1}{p}$) correspond à l'action intégrale en vue d'améliorer la précision.

A stabilité égale, le correcteur proportionnel – intégral améliore la précision



Avantages	• Diminution du gain à haute fréquence • Amélioration de la stabilité	• amélioration de la précision
Inconvénients	• Diminution de la bande passante	• Diminution de la rapidité

2.3- Correcteur proportionnel - dérivé : PD

La fonction de transfert de ce correcteur

est : $C(p) = K(1 + T_d \cdot p)$

K: un gain réglable.

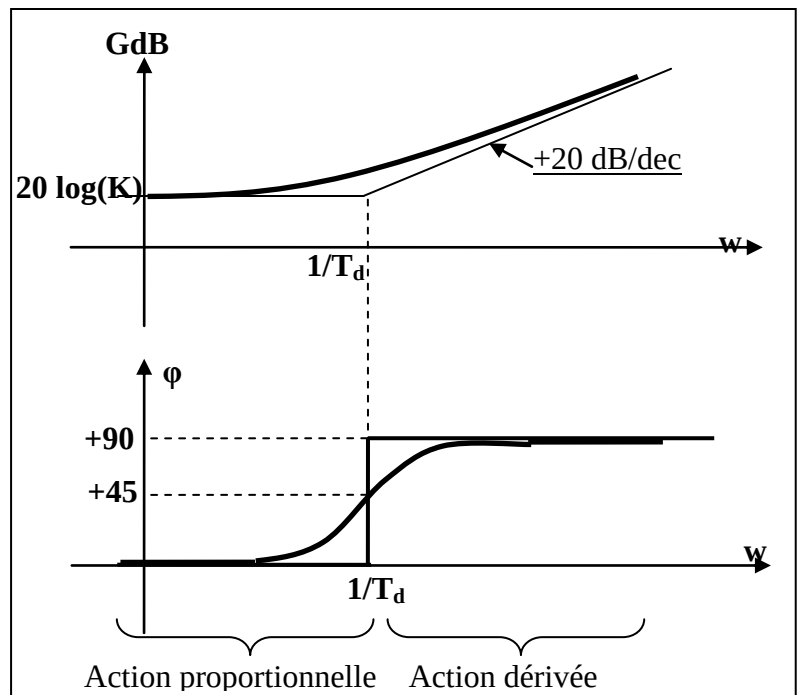
T_d : constante de temps de dérivation, également réglable.

Le premier terme (K) permet de régler la précision.

Le deuxième terme $(1 + T_d \cdot p)$ permet d'assurer la stabilité par apport de phase .

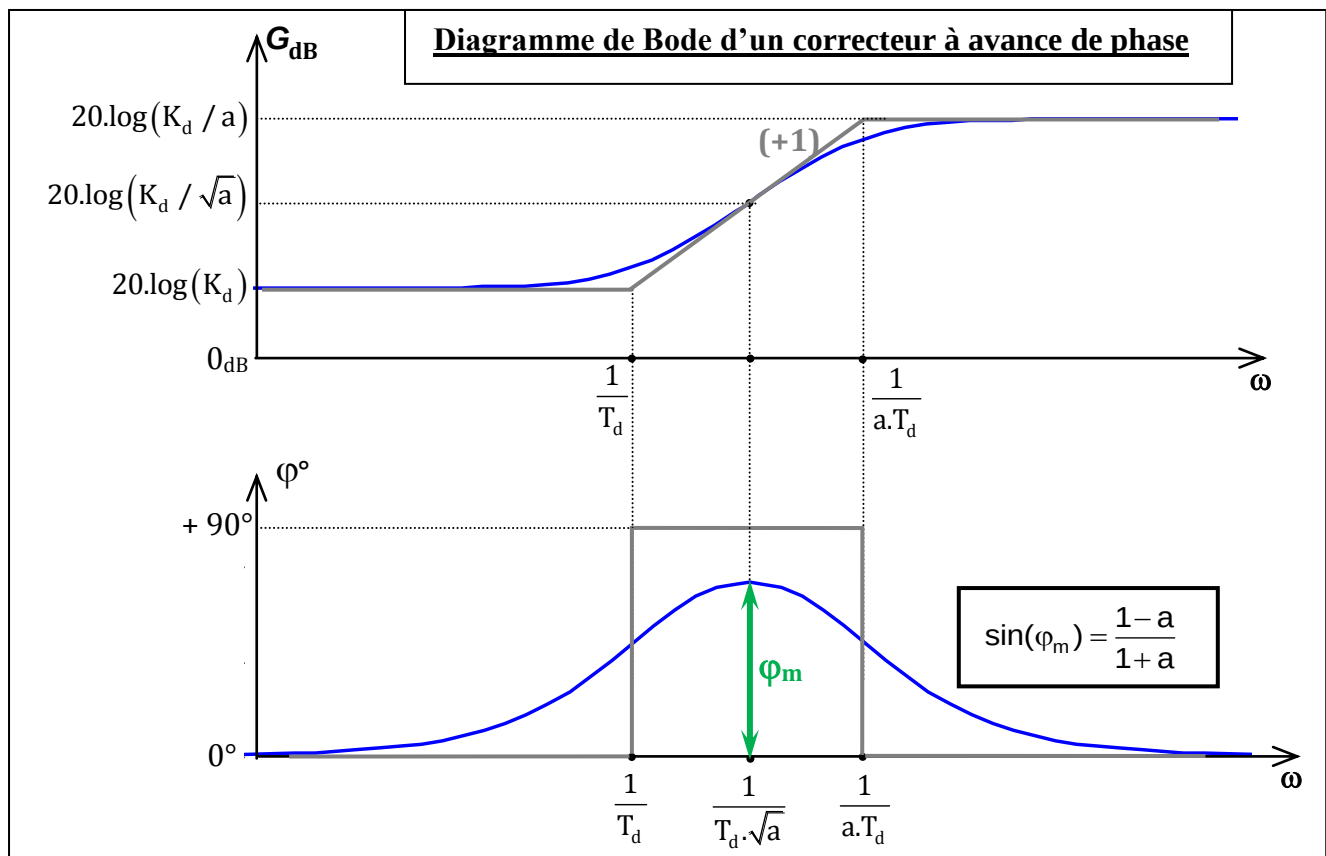
A précision égale, le correcteur

proportionnel – dérivé améliore la stabilité

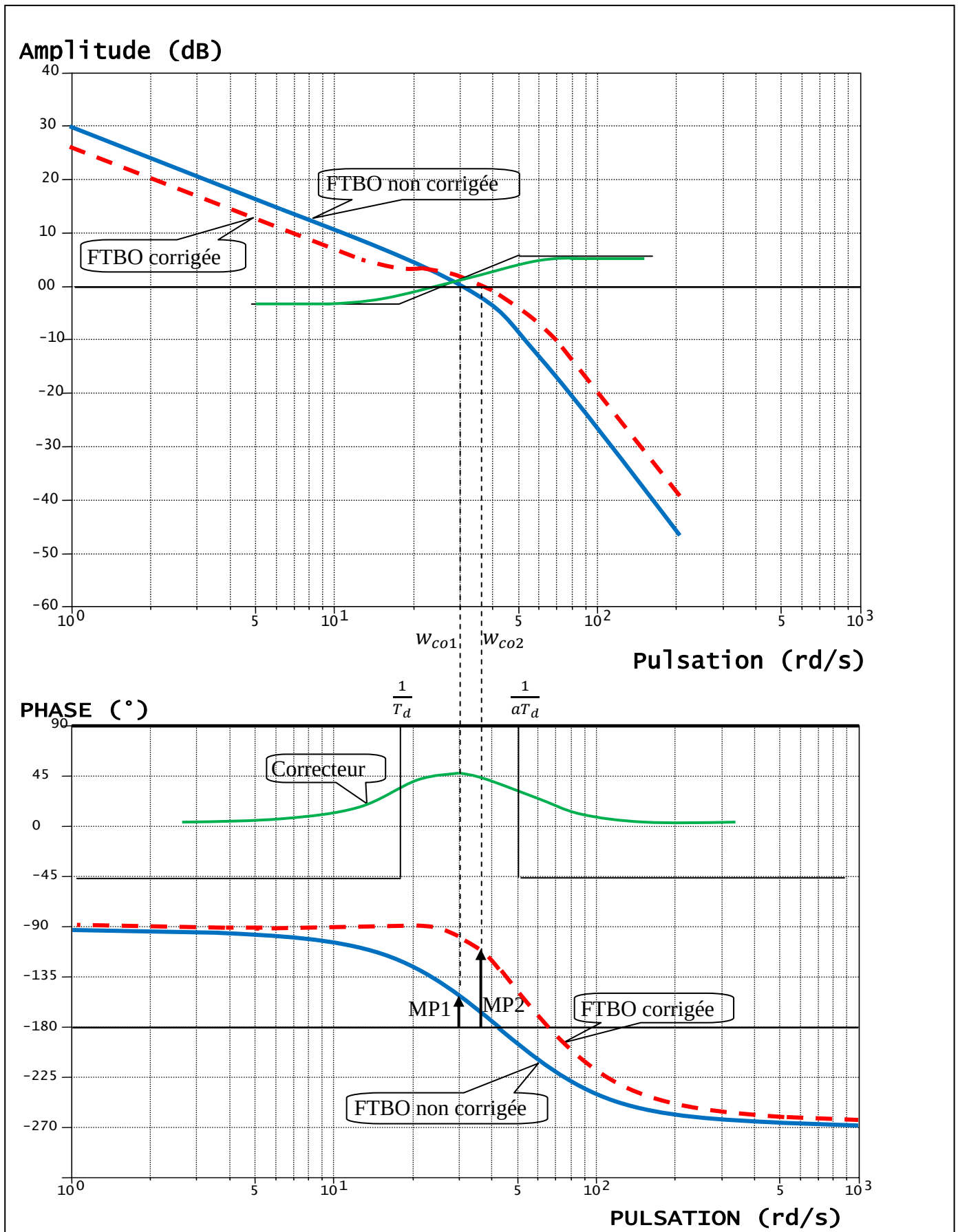


2.4- Correcteur à avance de phase :

Le correcteur PD n'est pas physiquement réalisable. En pratique, on utilise un correcteur dont la fonction de transfert est de la forme $C(p) = K \frac{1 + T_d \cdot p}{1 + a T_d \cdot p}$ avec $a < 1$; Ce correcteur s'appelle : correcteur à avance de phase ou bien correcteur **proportionnel dérivé réel**.



➤ Les effets de la correction par avance de phase :



Avantages	• Augmentation de la bande passante et de la rapidité • Amélioration de la stabilité
Inconvénients	• Aucune action sur la précision • Accroissement du gain à haute fréquence