

Les systèmes asservis

I. INTRODUCTION AUX SYSTEMES ASSERVIS

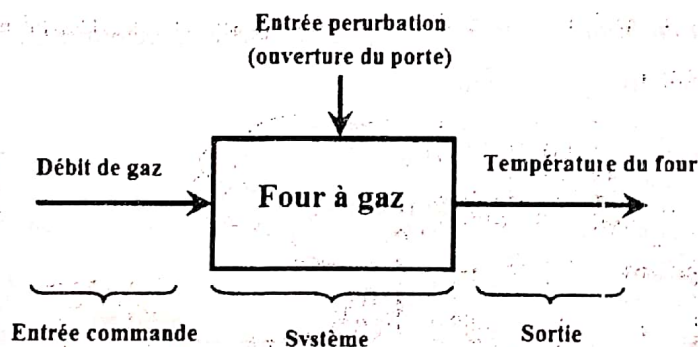
I.1. Définition

Un système est un ensemble de processus physique-chimiques en évolution. Des actions sur le système (entrées de commande) sont effectuées dans le but d'obtenir des objectifs donnés (sorties). Des entrées de perturbations qu'on ne peut pas les commander peuvent agir sur le système et modifier sa sortie.

Exemple – Système four à gaz

Considérons le système constitué d'un four à gaz :

- l'entrée de commande est le débit de gaz,
- les entrées de perturbation peuvent provenir de : l'usure des joints, l'ouverture de la porte etc....
- la sortie est la température réelle dans le four.

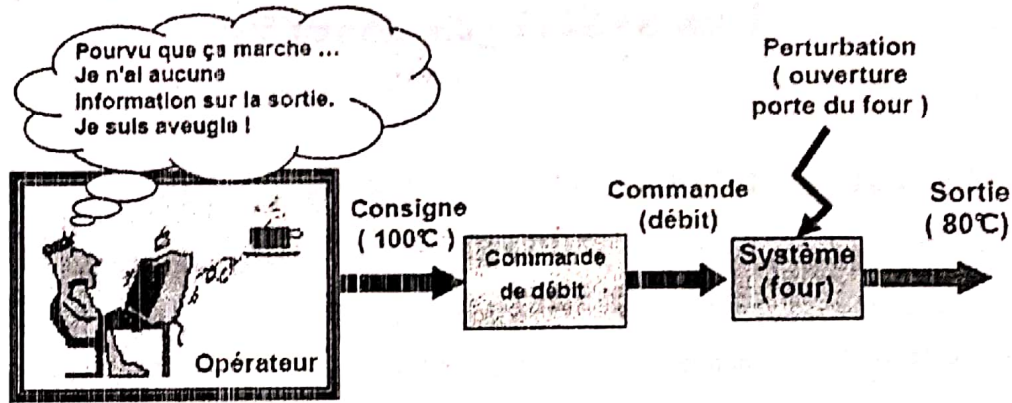


I.2. Système en Boucle Ouverte (BO) – Système en Boucle Fermée (BF)

La régulation automatique d'un système consiste à contrôler sa sortie, sans intervention humaine, pour la maintenir à une valeur donnée, appelée consigne. Le contrôle s'effectue par un bloc de commande appelé correcteur qui génère l'entrée de commande susceptible de changer la valeur de la sortie du système à commander. On distingue deux types de commande : commande en boucle ouverte et commande en boucle fermée.

Exemple – Régulation de la température du four à gaz à une valeur consigne de 100°C :

- **Régulation en boucle ouverte** : La consigne est envoyée au bloc de commande, qui génère une entrée de commande pour le système à commander.

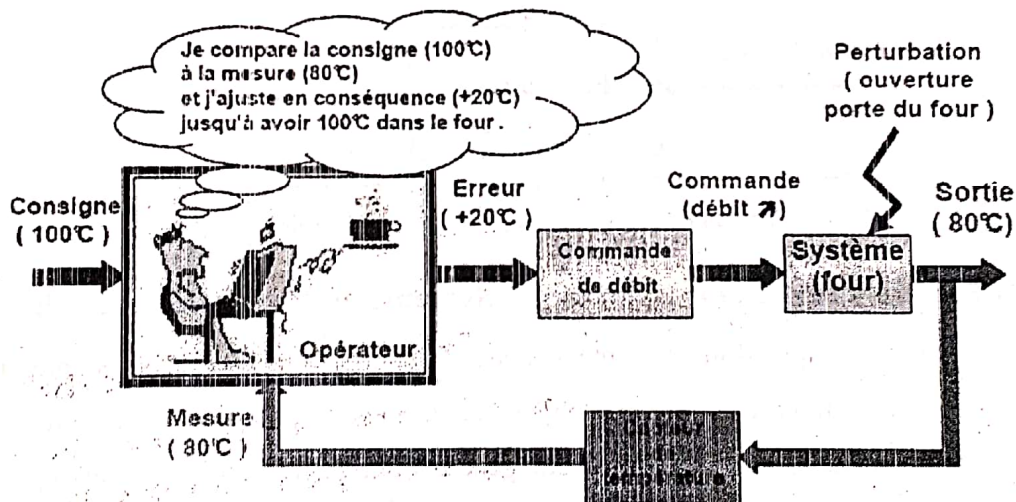


Avec cette structure de commande :

- Il n'y a aucune information sur la sortie, l'opérateur est aveugle et ne peut élaborer aucune stratégie d'ajustement pour obtenir la valeur de la consigne (100°C).
- Il n'y a aucun contrôle de la commande. Les perturbations impactent directement sur le système sans pouvoir être compensées.

D'une manière générale, la commande en BO est peu utilisable en raison de leurs mauvaises performances. Pour remédier à tous ces problèmes, on utilise une commande en BF.

- **Régulation en boucle fermée :** Le signal de sortie est retourné au bloc de commande et est comparé avec la consigne.



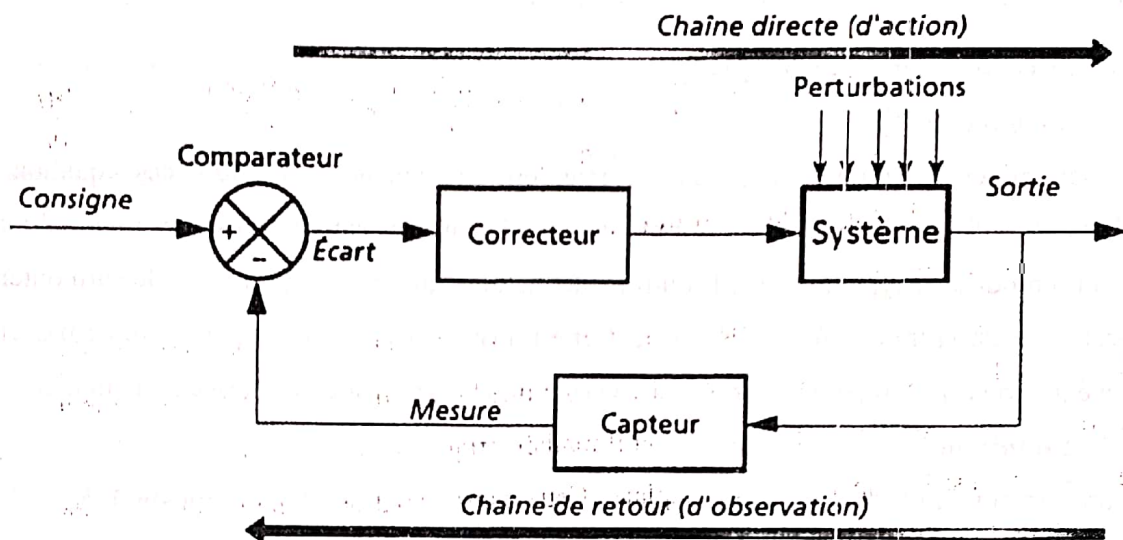
Avec cette structure de commande :

- Il y a contrôle de l'exécution de la commande par rétroaction de la sortie sur l'entrée du système.
- Il y a possibilité de réguler le système pour suivre aussi précisément que possible la consigne.
- On peut compenser les effets des perturbations extérieures.

I.3. Structure d'un système asservi

Un système asservi se compose d'une chaîne directe (ou chaîne d'action) et d'une chaîne retour (ou chaîne d'observation) et comprend les éléments suivants:

- Le système dynamique à commander, évoluant suivant les lois de la physique.
- Un capteur qui informe sur la valeur de la grandeur de sortie.
- Un comparateur qui évalue l'écart entre la consigne et la mesure.
- Un correcteur qui est l'organe de commande du système. Il reçoit la valeur de l'écart entre la consigne et la mesure et modifie la commande pour améliorer les performances du système.



Structure d'un système asservi

II. EQUATIONS D'UN SYSTEME LINEAIRE

II.1. Définition

Généralement, le comportement d'un système dynamique est décrit par des relations mathématiques entre les entrées et les sorties. Le système est dit linéaire si l'équation liant la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont la forme générale est :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Avec : $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, n$) et $b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, m$).

II.2. La transformée de Laplace

II.2.1. Introduction

Pour déterminer le comportement du système, on sera amené à résoudre ces équations différentielles. Cette résolution sera difficile lorsque l'ordre des équations est supérieur à 2 ou lorsqu'on modifie le type d'entrée. L'outil mathématique qui va nous permettre de surmonter ce problème est la transformée de Laplace. Cette transformation va nous permettre de passer d'une équation différentielle temporelle à une équation polynomiale, plus aisée à manipuler.

II.2.2. Définition

A toute fonction du temps $f(t)$, nulle pour $t < 0$, on fait correspondre une fonction $F(p)$ de la variable complexe p telle que :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

On note $L[f(t)]$ la transformée de Laplace directe et $L^{-1}[f(t)]$ la transformée inverse.

II.2.3. Propriétés des transformées de Laplace

Théorème de dérivation :

$$\begin{aligned} L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= pF(p) - f(0) \\ L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] &= p^2 F(p) - pf(0) - p \frac{df(0)}{dt} \\ &\vdots \\ L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= p^n F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} \frac{d^i f(0)}{dt^i} \end{aligned}$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles alors :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) \quad \text{et} \quad L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) \quad \text{et} \quad L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p)$$

Théorème d'intégration :

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Théorème de retard :

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$$

Théorème de l'amortissement ou de décalage fréquentiel :

$$L[e^{-j\omega t} f(t)] = F(p + j\omega)$$

Facteur d'échelle :

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

II.3. Fonction de transfert

Nous avons vu que l'équation liant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ d'un système linéaire est :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation et en considérant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

On appelle **fonction de transfert** du système le rapport :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Avec : n est l'ordre du système.

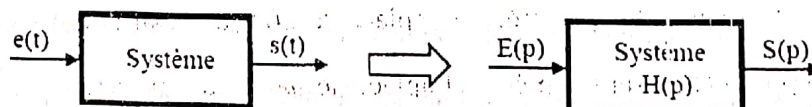
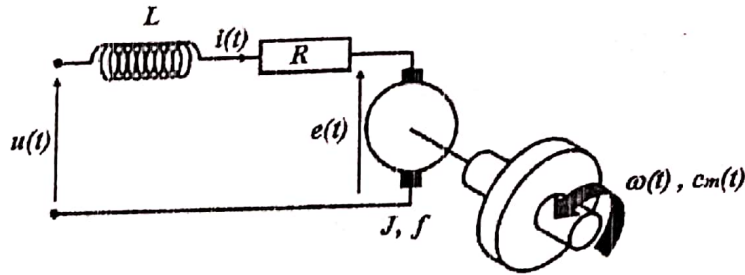


Schéma fonctionnel d'un système linéaire

Application 1 :

On considère un moteur électrique à courant continu suivant :



La loi d'Ohm dans le circuit d'induit est donnée par :

$$u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

L'équation de la dynamique de l'arbre moteur est donnée par :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f.\omega(t) = c_m(t)$$

Les équations de l'électromagnétisme dans le moteur sont données par :

$$e(t) = K_e \omega(t)$$

$$c_m(t) = K_t i(t)$$

Avec :

Liste des variables	
$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur
$i(t)$	Courant consommé par le moteur
$e(t)$	Tension contre-électromotrice du moteur
$\omega(t)$	Vitesse de rotation de l'arbre du moteur
$c_m(t)$	Couple moteur

Liste des paramètres	
L	Inductance de l'induit
R	Résistance de l'induit
J	Inertie totale du moteur
f	Coefficient du frottement
K_t	Coefficient du couple moteur
K_e	Coefficient de la f.c.e.m

On suppose que :

- Les conditions initiales de toutes les grandeurs sont nulles
- $X(p)$ représente la transformée de Laplace de $x(t)$ notée par : $X(p) = L[x(t)]$
- $\Omega(p)$ représente la transformée de Laplace de $\omega(t)$ notée par : $\Omega(p) = L[\omega(t)]$

Ecrire les équations ci-dessus dans le domaine de Laplace et montrer que la fonction de

transfert $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ peut s'écrire sous la forme : $H(p) = \frac{b_0}{p^2 + a_1 p + a_0}$.

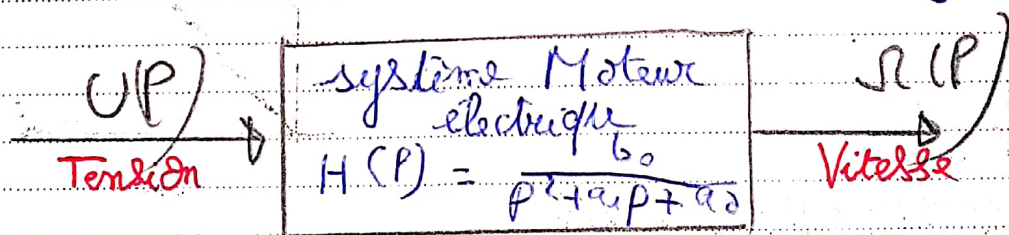
$$(1) U(P) = R I(P) + L P I(P) + E(P)$$

$$(2) J P \Omega(P) + f \Omega(P) = C_m(P)$$

$$(3) E(P) = K_e \Omega(P) \quad (4) C_m(P) = K_t I(P)$$

$$\begin{aligned} U(P) &= (R + L P) I(P) + E(P) \\ &= (R + L P) \frac{C_m(P)}{K_t} + K_e \Omega(P) \\ &= (R + L P) \frac{(J P + f) \Omega(P)}{K_t} + K_e \Omega(P) \\ &= \frac{(R + L P)(f + J P) + K_e K_t}{K_t} \Omega(P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(P) &= \frac{\Omega(P)}{U(P)} = \frac{K_t}{(R + L P)(f + J P) + K_e K_t} \\ &= \frac{K_t}{L J P^2 + (R J + L f) P + R f + K_e K_t} \\ &= \frac{\frac{K_t}{L J}}{P^2 + \frac{R J + L f}{L J} P + \frac{R f + K_e K_t}{L J}} \\ &= \frac{b_0}{P^2 + a_1 P + a_0} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_0 = \frac{K_t}{L J} \\ a_1 = \frac{R J + L f}{L J} \\ a_0 = \frac{R f + K_e K_t}{L J} \end{array} \right. \end{aligned}$$



II.4. Les signaux canoniques

Pour caractériser le comportement d'un système, on observe sa réponse $s(t)$ suite à l'application d'une entrée $e(t)$. Généralement, on utilise les entrées typiques suivantes :

- l'impulsion : la réponse à une entrée impulsion s'appelle réponse impulsionnelle.
- l'échelon : la réponse à une entrée échelon s'appelle réponse indicielle.
- la rampe.
- la sinusoïde : la réponse à une entrée sinusoïde s'appelle réponse fréquentielle ou harmonique.

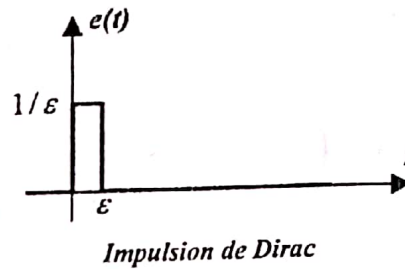
☑ La fonction impulsion de Dirac $\delta(t)$:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e(t)$$

Avec :

$$e(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } t < 0 \text{ et } t > \varepsilon \end{cases}$$

(on signe, analyse)

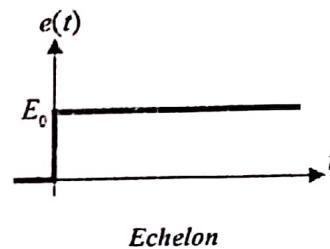


☑ La fonction échelon :

$$e(t) = E_0 u(t); (E_0 > 0)$$

Avec :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



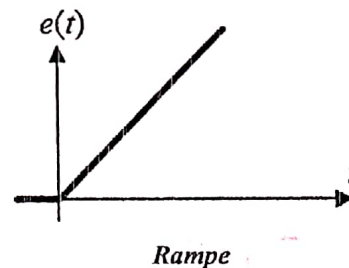
La fonction est dite échelon unitaire si $E_0 = 1$.

☑ La fonction rampe :

$$e(t) = A_0 t u(t); (A_0 > 0)$$

Avec :

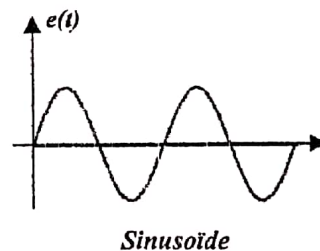
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



La fonction est dite rampe unitaire si $A_0 = 1$.

☑ La fonction sinusoïde :

$$e(t) = \begin{cases} E_0 \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



Application 2 :

Calculer la transformée de Laplace des fonctions : impulsion de Dirac, échelon, rampe.

*** TL impulsion:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(e(t)) &= \int_0^E \frac{1}{E} e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{E} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^E \\
 &= \frac{e^{-pE} - 1}{-pE} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-pE)^k}{k!} - 1}{-pE} \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-pE)^k}{k!}}{-pE} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-pE)^{k-1}}{k!} \\
 &= 1 - \frac{pE}{2!} + \frac{(pE)^2}{3!} - \dots \xrightarrow{E \rightarrow 0} 1
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$$

*** TL de l'échelon:**

$$\mathcal{L}(e(t)) = \int_0^{\infty} E_0 e^{-pt} dt = E_0 \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{E_0}{p}$$

$$\mathcal{L}(e(t)) = \frac{E_0}{p}$$

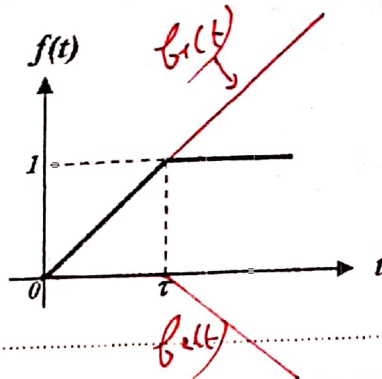
*** TL de la rampe:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(e(t)) &= \int_0^{\infty} A_0 t e^{-pt} dt \\
 &= A_0 \int_0^{\infty} \frac{-d}{dp} (e^{-pt}) dt \\
 &= -A_0 \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \\
 &= -A_0 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{A_0}{p^2}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(e(t)) = \frac{A_0}{p^2}$$

Application 3 :

Calculer la transformée de Laplace du signal $f(t)$ représenté par la figure ci-dessous :



* $f_1(t)$ est une fonction rampe de pente $\frac{1}{\tau}$
 $\Rightarrow \mathcal{L}(f_1(t)) = \frac{1}{\tau p^2}$

* $f_2(t)$ est une fonction rampe de pente $-\frac{1}{\tau}$
 décalée de τ , d'après le T.h. de retard $e^{-p\tau}$
 $\mathcal{L}(f_2(t)) = \frac{-1}{\tau p^2} e^{-p\tau}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{\tau p^2} (1 - e^{-p\tau})$

Le tableau ci-dessous récapitule la transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles.

	$f(t)$	$F(p) = L[f(t)]$		$f(t)$	$F(p) = L[f(t)]$
1	$\delta(t)$	1	7	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
2	1	$\frac{1}{p}$	8	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	9	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
4	t^2	$\frac{2!}{p^3}$	10	$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	11	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	12	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

II.5. La transformée de Laplace inverse

Pour déterminer la réponse temporelle $s(t)$ d'un système à partir de sa forme polynomiale $S(p)$, on essaye d'exprimer $S(p)$ sous des formes usuelles évoquées au tableau précédent et puis de faire la transformation inverse de Laplace. On peut utiliser la décomposition en éléments simples si l'expression de $S(p)$ est compliquée.

Rappel : Décomposition en élément simple d'une fonction rationnelle

soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ où p et q sont deux fonctions polynômes ($\deg(p) < \deg(q)$).

– Si $q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ alors $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{\alpha_1}{(x-a_1)} + \frac{\alpha_2}{(x-a_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-a_n)}$$

– Si $q(x) = (x-a)^n$ alors $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)^n(x-b)^m} = \frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n} + \frac{\beta_1}{(x-b)} + \frac{\beta_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{\beta_m}{(x-b)^m}$$

Application 4:

Déterminer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$S(p) = \frac{2}{p(p+4)} ; S(p) = \frac{3p+15}{(p+1)^2+9} ; S(p) = \frac{p^2+7p+12}{p^2+3p+2} ; S(p) = \frac{4p^2}{(p+1)^3}$$

$$* S(p) = \frac{2}{p(p+4)} = \frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p+4}$$

$$K_1 = [p S(p)]_{p=0} = 0,5 \quad K_2 = [(p+4) S(p)]_{p=-4} = -0,5$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{0,5}{p} - \frac{0,5}{p+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow s(t) = 0,5 - 0,5 e^{-4t}$$

$$\text{— valeur initiale: } s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = 0$$

$$\text{— valeur finale: } s(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = 0,5$$

$$* S(p) = \frac{3p+15}{(p+1)^2+9} = 3 \frac{p+5}{(p+1)^2+3^2} + 6 \frac{3}{(p+1)^2+3^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow s(t) = 3 e^{-t} \cos(3t) + 6 e^{-t} \sin(3t) \quad s(0) = 3 ; s(\infty) = 0$$

$$* S(p) = \frac{p^2+7p+12}{p^2+3p+2} = 1 + \frac{4p+10}{p^2+3p+2}$$

$$= 1 + \frac{4p+10}{(p+1)(p+2)} = 1 + \frac{K_1}{p+1} + \frac{K_2}{p+2}$$

$$K_1 = 6 ; K_2 = -2 \quad S(p) = 1 + \frac{6}{p+1} - \frac{2}{p+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow s(t) = \delta(t) + 6 e^{-t} - 2 e^{-2t}$$

$$\text{— } s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \infty \Rightarrow s(0) = \infty$$

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = 0 \Rightarrow s(\infty) = 0$$

$$* S(p) = \frac{4p^2}{(p+1)^3} = \frac{K_1}{p+1} + \frac{K_2}{(p+1)^2} + \frac{K_3}{(p+1)^3}$$

$$K_1 = 4 ; K_2 = -8 ; K_3 = 4$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{4}{p+1} - \frac{8}{(p+1)^2} + \frac{4}{(p+1)^3}$$

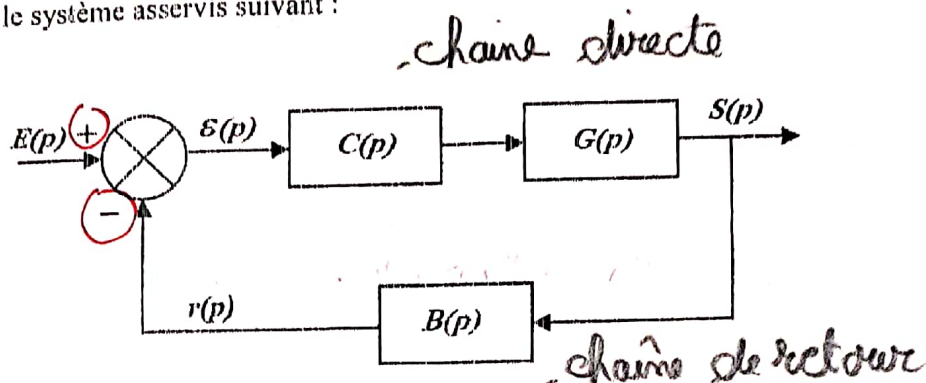
$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow s(t) = 4 e^{-t} - 8 t e^{-t} + 4 t^2 e^{-t}$$

$$s(0) = 4 ; s(\infty) = 0$$

III. ANALYSE DES SYSTEMES ASSERVIS

III.1. Définition

On considère le système asservi suivant :



Avec :

- $E(p)$: signal d'entrée du système (ou consigne).
- $S(p)$: signal de sortie du système.
- $r(p)$: signal de retour du système.
- $\varepsilon(p)$: l'erreur entre la consigne et le signal de retour.
- $C(p)$: fonction de transfert du correcteur.
- $G(p)$: fonction de transfert du système.
- $B(p)$: fonction de transfert du capteur.

On peut définir pour ce système asservi les fonctions suivantes :

- **Fonction de Transfert de la Chaîne Directe (FTCD) :**

$$FTCD(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = C(p).G(p)$$

- **Fonction de Transfert de la Chaîne de Retour (FTCR) :**

$$FTCR(p) = \frac{r(p)}{S(p)} = B(p)$$

- **Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) :**

$$FTBO(p) = \frac{r(p)}{\varepsilon(p)} = FTCD(p).FTCR(p) = C(p).G(p).B(p)$$

- **Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :**

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p).FTCR(p)} = \frac{C(p).G(p)}{1 + C(p).G(p).B(p)}$$

Preuve :

$\oplus$ à inverse les $\oplus$ et les $\ominus$

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{C(p).G(p).E(p)}{E(p) + r(p)} = \frac{C(p).G(p).E(p)}{E(p) + C(p).G(p).B(p).E(p)} = \frac{C(p).G(p)}{1 + C(p).G(p).B(p)}$$

Remarque :

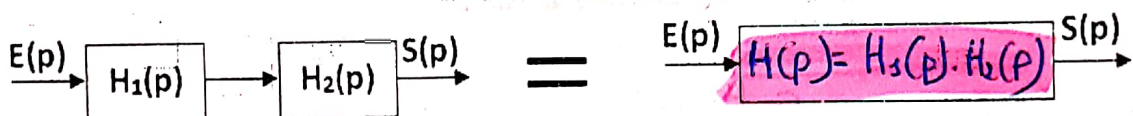
Si le retour est unitaire, c'est-à-dire $B(p) = 1$, alors on a :

$$FTBF(p) = \frac{C(p).G(p)}{1 + C(p).G(p)} = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

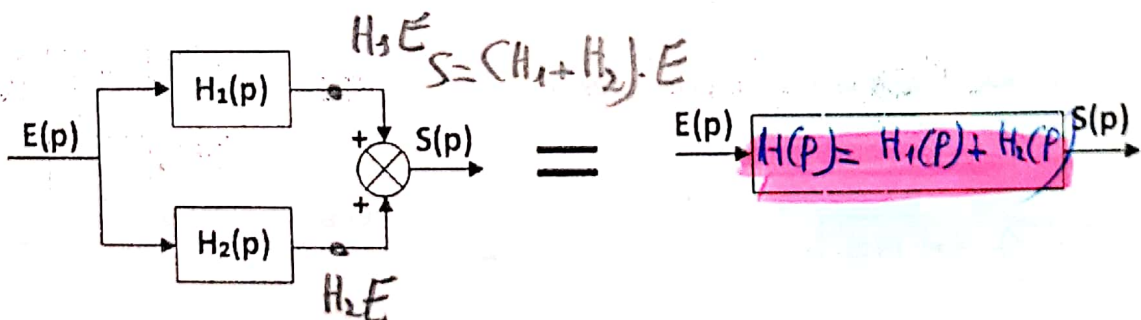
III.2. Transformation et réduction de schémas-blocs

Dans le but de déterminer la fonction de transfert d'un système à partir du schéma-bloc, il est nécessaire de "réduire" celui-ci. La réduction fait appel à un certain nombre de transformations qui reposent sur les règles de manipulation des diagrammes fonctionnels.

III.2.1. Association de blocs en série



III.2.2. Association de blocs en parallèle

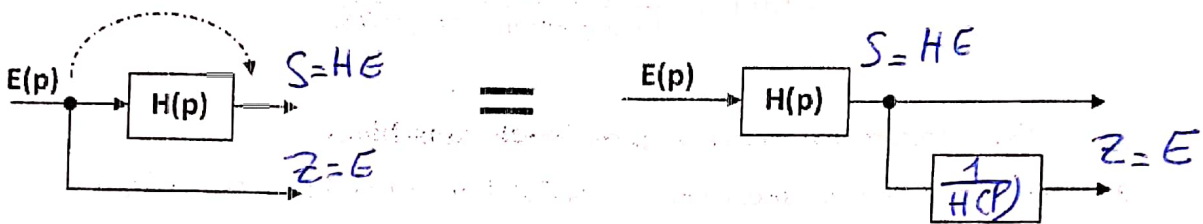


III.2.3. Déplacement de jonction

- Déplacement d'une jonction avant un bloc :

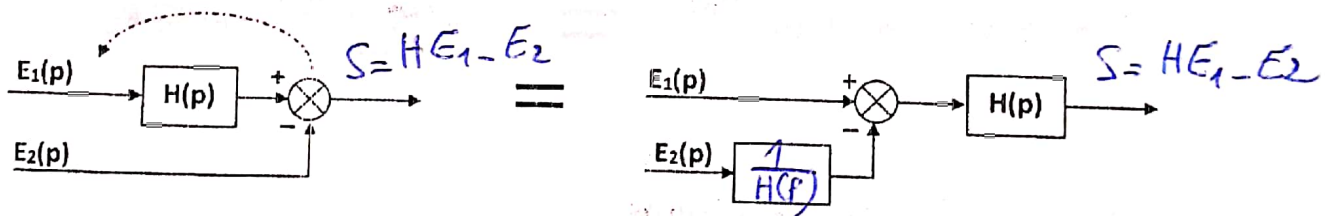


- Déplacement d'une jonction après un bloc :

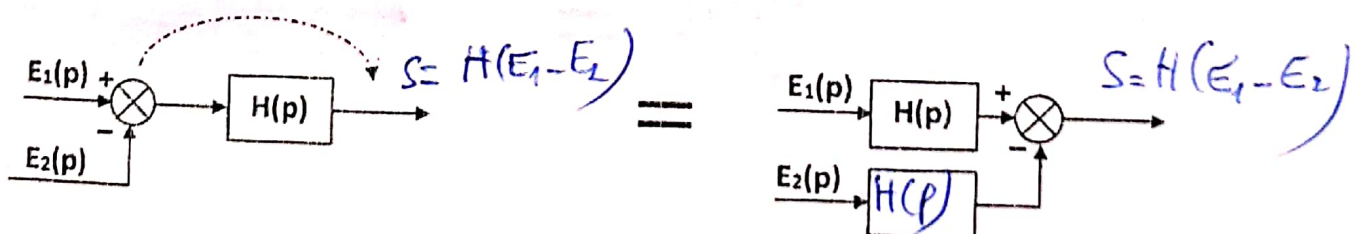


III.2.4. Déplacement de comparateur

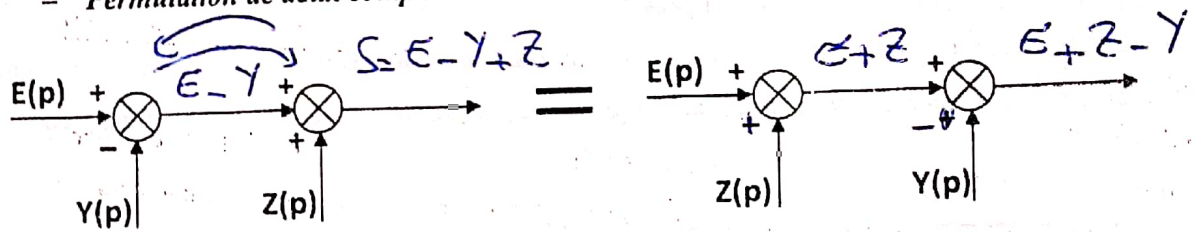
- Déplacement d'un comparateur avant un bloc :



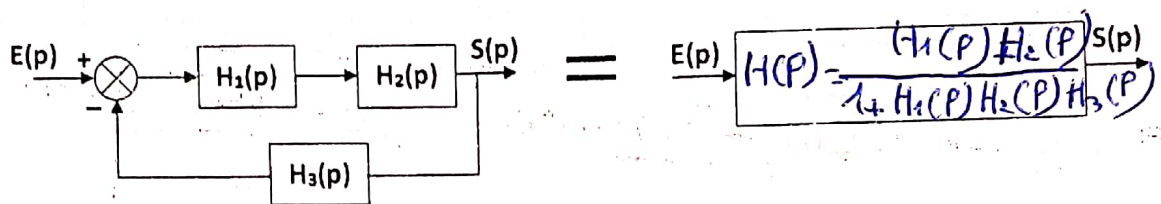
- Déplacement d'un comparateur après un bloc :



- Permutation de deux comparateurs successifs :

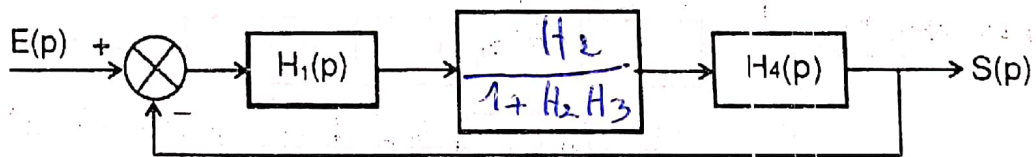
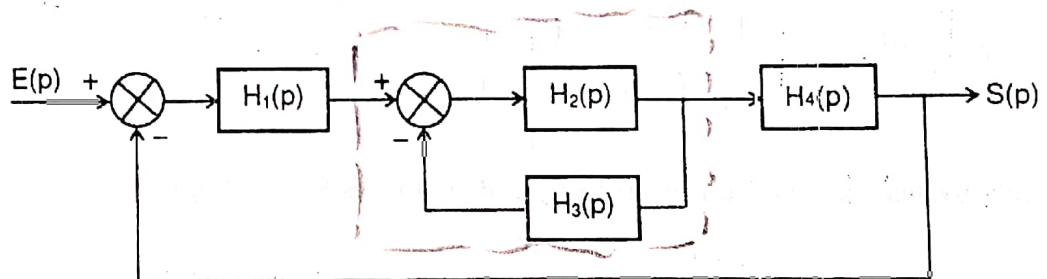


III.2.6. Système en boucle fermée



III.2.7. Système à boucles concentriques

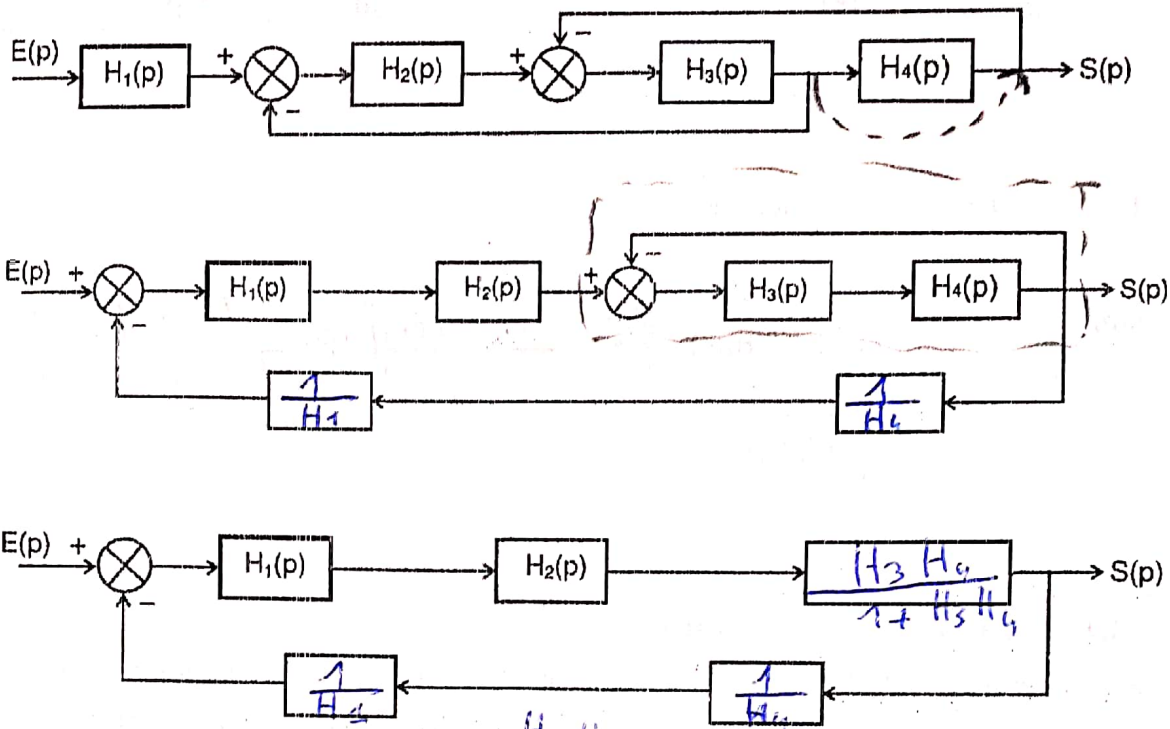
Pour déterminer la FTBF d'un système comportant des boucles concentriques il faut d'abord déterminer la FTBF de la boucle la plus interne et remplacer cette boucle par un bloc.



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_3 \frac{H_2}{1 + H_2 H_3} H_3}{1 + H_3 \frac{H_2}{1 + H_2 H_3} H_4} = \frac{H_3 H_2 H_3}{1 + H_2 H_3 + H_3 H_2 H_4}$$

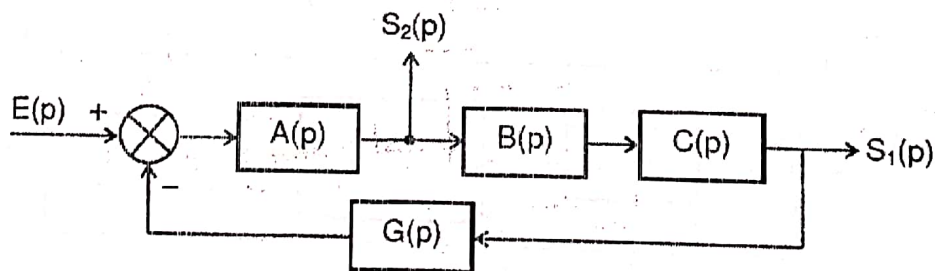
III.2.8. Système à boucles imbriquées

Pour déterminer la FTBF d'un système comportant des boucles imbriquées il faut se ramener au cas d'un système à boucles concentriques en déplaçant une jonction ou un comparateur.



$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H_1 H_2 \frac{H_3 H_4}{1 + H_3 H_4}}{1 + H_1 H_2 \frac{H_3 H_4}{1 + H_3 H_4} \frac{1}{H_3} \frac{1}{H_4}} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{1 + H_3 H_4 + H_1 H_2 H_3}$$

III.2.9. Système bouclé à une entrée $E(p)$ et deux sorties $S_1(p)$ et $S_2(p)$

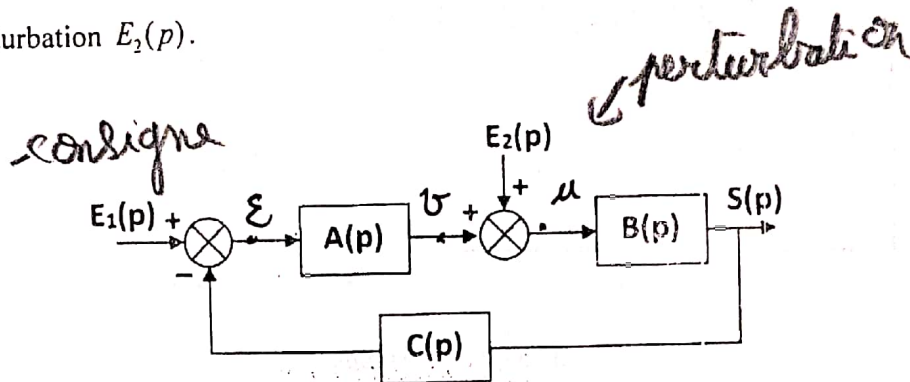


$$FTBF_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} = \frac{ABC}{1 + ABCG}$$

$$FTBF_2(p) = \frac{S_2(p)}{E(p)} = \frac{A}{1 + ABCG}$$

III.2.10. Système bouclé à deux entrées $E_1(p)$ et $E_2(p)$ et une sortie $S(p)$

Dans un système réel, l'entrée ne comprend pas seulement l'entrée consigne $E_1(p)$ mais aussi l'entrée perturbation $E_2(p)$.



Pour déterminer la sortie de ce système multi-entrée, on utilise le principe de superposition.

Ce principe indique que si on considère que :

- Un 1^{ère} mode : pour lequel l'entrée consigne $E_1(p)$ est non nulle et l'entrée perturbation $E_2(p)$ est nulle, alors on obtient une sortie $S_1(p)$.
- Un 2^{ème} mode : pour lequel l'entrée perturbation $E_2(p)$ est non nulle et l'entrée consigne $E_1(p)$ est nulle, alors on obtient une autre sortie $S_2(p)$.

Maintenant, lorsque les deux entrées $E_1(p)$ et $E_2(p)$ sont non nulles elles produisent une sortie $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$.

1^{ère} mode : $E_1(p) \neq 0$, $E_2(p) = 0$



Schéma équivalent

$$H_1(p) = \left. \frac{S_1(p)}{E_1(p)} \right|_{E_2(p)=0} = \frac{AB}{1 + ABC}$$

$$E_0 = E_1 - \eta$$

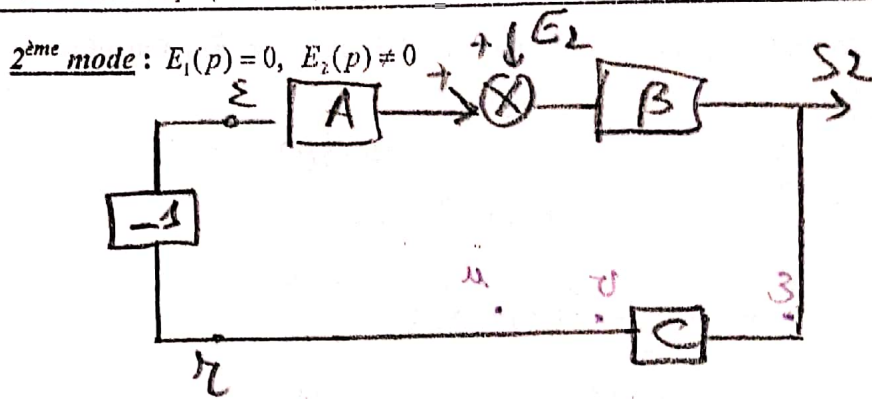


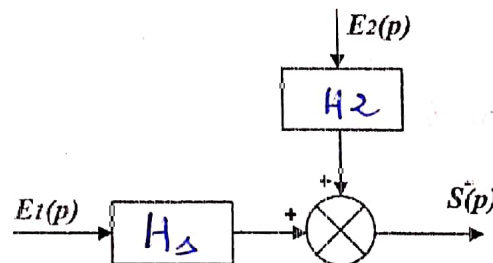
Schéma équivalent

$$H_2(p) = \left. \frac{S_2(p)}{E_2(p)} \right|_{E_1(p)=0} = \frac{B}{1 - (-1)ABC} = \frac{B}{1 + ABC}$$

Lorsque $E_1(p) \neq 0$ et $E_2(p) \neq 0$, la sortie du système est :

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) = H_1(p)E_1(p) + H_2(p)E_2(p) = \frac{ABE_1 + BE_2}{1 + ABC}$$

Dans ce cas, le système peut être approximé par le schéma bloc suivant :



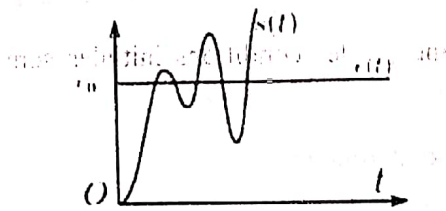
IV. REPONSE TEMPORELLE DES SYSTEMES

IV.1. Les performance des systèmes asservis

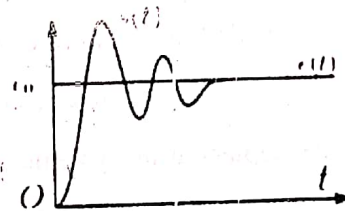
Les critères permettant de caractériser les performances d'un système asservi sont : la stabilité, la précision et la rapidité.

IV.1.1. La stabilité

La stabilité caractérise l'aptitude du système à converger vers une valeur finie.



Système instable



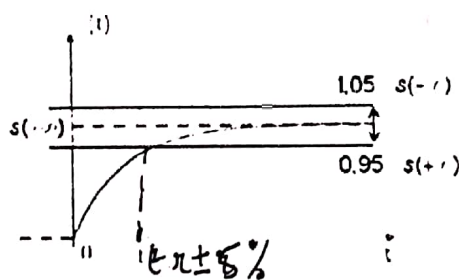
Système stable

IV.1.2. La précision

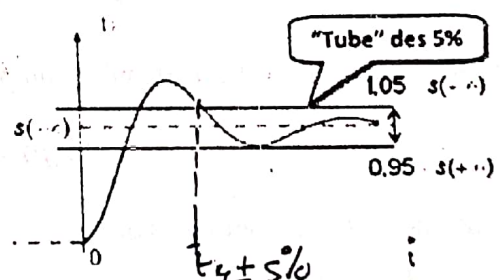
La précision caractérise l'aptitude du système à converger vers la consigne. Un système est précis si l'erreur entre la consigne et la sortie est le plus faible possible.

IV.1.3. La rapidité

La rapidité se caractérise par le temps mis par le système pour que la sortie atteigne la valeur finale. Pour caractériser la rapidité, on définit le temps de réponse à $\pm 5\%$ ($t_{r,5\%}$) qui est le temps mis par la sortie pour se stabiliser dans un intervalle compris entre -5% et $+5\%$ de la valeur finale $s(\infty)$ où $s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$.



système sans dépassement



système avec dépassement

IV.2. Analyse temporelle d'un système de 1^{er} ordre

IV.2.1. Définition

L'équation différentielle d'un système de 1^{er} ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est :

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

En utilisant la propriété de la dérivée, tout en considérant que les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace permet d'écrire :

$$a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_0 E(p)$$

La transformée de Laplace d'un système de 1^{er} ordre est alors définie par :

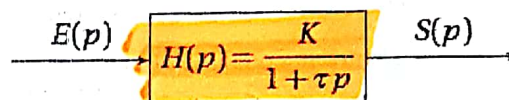
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_0 + a_1 p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Avec :

$K = \frac{b_0}{a_0}$: gain statique du système.

$\tau = \frac{a_1}{a_0}$: constante du temps du système.

système d'ordre 1



IV.2.2. Réponse indicielle (entrée échelon)

Pour une entrée échelon d'amplitude E_0 $\left(e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \right)$, la sortie est :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{K E_0}{p(1 + \tau p)}$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p}$$

Les constantes A et B sont telles que :

$$A = [p S(p)]_{p=0} = K E_0$$

$$B = [(1 + \tau p) S(p)]_{p=-1/\tau} = -K E_0 \tau$$

L'expression de $S(p)$ est alors :

$$S(p) = \frac{K E_0}{p} - \frac{K E_0 \tau}{1 + \tau p} = \frac{K E_0}{p} - \frac{K E_0}{p + \frac{1}{\tau}}$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = K E_0 - K E_0 e^{-t/\tau} = K E_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

Les caractéristiques de la réponse $s(t)$ sont :

- La réponse $s(t)$ est une fonction croissante

- La valeur initiale de la réponse :

$$s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = 0$$

- La valeur finale de la réponse (réponse en régime permanent):

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = K E_0$$

- Le gain statique K :

$$K = \frac{s(\infty)}{e(\infty)} = \frac{K E_0}{E_0}$$

- La constante du temps τ du système :

$$s(\tau) = K E_0 (1 - e^{-1}) = 0,63 K E_0 = 0,63 s(\infty)$$

- L'équation de la tangente à l'origine est :

$$s(\tau) = K E_0 (1 - e^{-1}) = 0,63 K E_0 = 0,63 s(\infty)$$

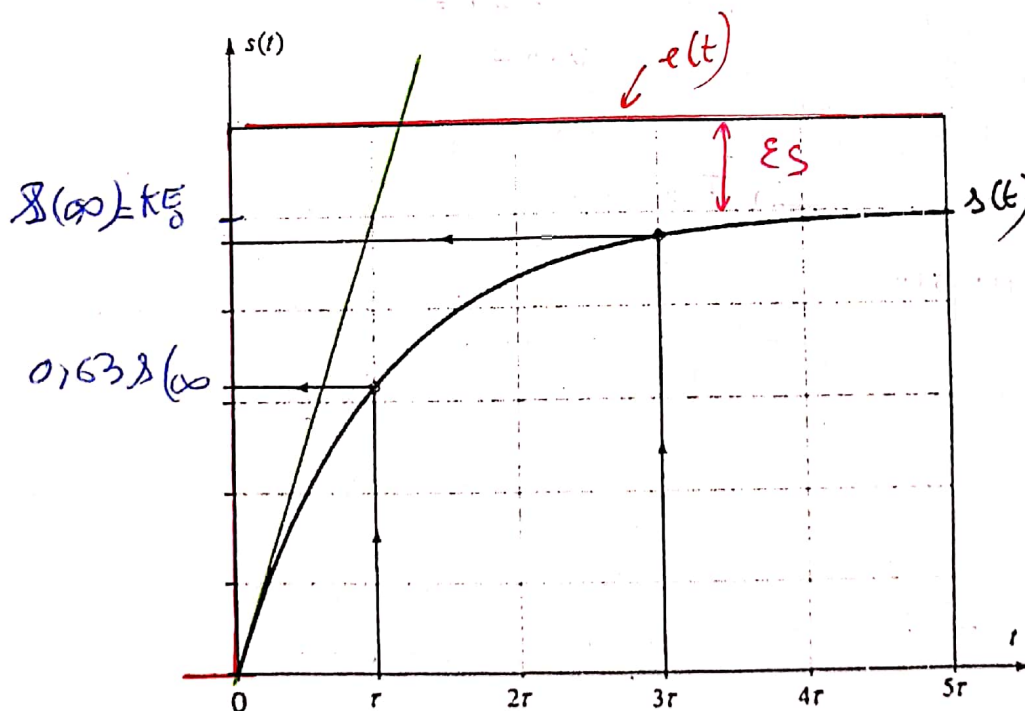
- Le temps de réponse à $\pm 5\%$ (ou temps de stabilisation) : t_r

$$y = s'(0)(t-0) + s(0) = \frac{K E_0}{\tau} t$$

cette tangente coupe la droite $y = K E_0$ en $t = \tau$

- L'erreur statique de position : ε_s

$$\varepsilon_s = e(\infty) - s(\infty) = E_0 - K E_0$$

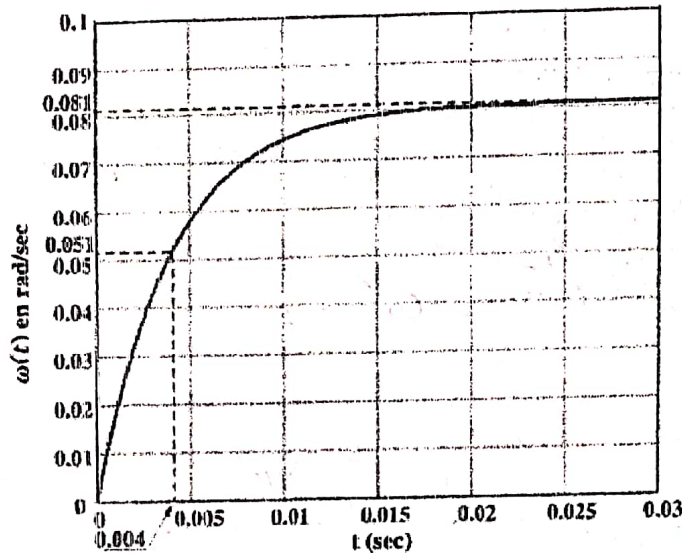
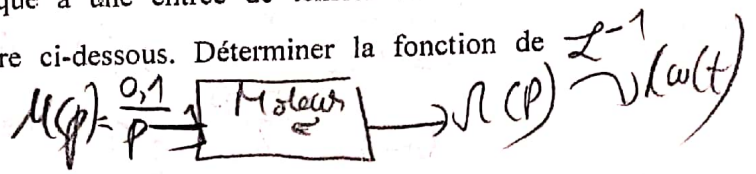


Réponse indicielle d'un système de 1^{er} ordre

Application 5: Identification d'un système à partir de sa réponse indicielle

La réponse indicielle $\omega(t)$ d'un moteur électrique à une entrée de tension en échelon d'amplitude $U_0 = 0.1 \text{ V}$ est donnée par la figure ci-dessous. Déterminer la fonction de

transfert de ce moteur $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$.



La courbe présente la réponse indicielle d'un système d'ordre 1 $\Rightarrow H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$

$$K = \frac{\omega(\infty)}{u(0)} = \frac{0,085}{0,1} = 0,85$$

$$\omega(\tau) = 0,63 \omega(\infty) = 0,63 \times 0,085 = 0,054$$

(33)

$$\Rightarrow \tau = 0,004 \text{ s}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{0,85}{1 + 0,004 p}$$

$$t_r = 3\tau = 3 \times 0,004 = 0,012 \text{ s}$$

IV.3. Analyse temporelle d'un système de second ordre

IV.3.1. Définition

L'équation différentielle d'un système de 2nd ordre d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

En utilisant la propriété de la dérivée, tout en considérant que les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace permet d'écrire :

$$a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_0 E(p)$$

La transformée de Laplace d'un système de second ordre est alors définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{\frac{b_0}{a_2}}{p^2 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_0}{a_2}} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{E(p)}{= \frac{E_0}{p}} \rightarrow H(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \rightarrow S(p) \end{aligned}$$

Un système de 2nd ordre est caractérisé par trois paramètres qui sont : le gain statique K , la pulsation propre non amortie ω_n et le coefficient d'amortissement ξ . Leurs expressions s'obtiennent après identification de la façon suivante :

$$\omega_n^2 = \frac{a_0}{a_2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$2\xi \omega_n = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \xi = \frac{a_1}{2a_2} \cdot \frac{1}{\omega_n} = \frac{a_1}{2a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}} = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2 a_0}}$$

$$K \omega_n^2 = \frac{b_0}{a_2} \Rightarrow K = \frac{b_0}{a_2} \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{b_0}{a_2} \frac{a_2}{a_0} = \frac{b_0}{a_0}$$

IV.3.2. Réponse indicielle (réponse à un échelon)

Pour une entrée échelon d'amplitude E_0 ($e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$), la sortie est :

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K E_0 \omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{K E_0 \omega_n^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$

Avec : p_1 et p_2 sont les racines de l'équation caractéristique : $p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 = 0$.

La forme de la réponse dépend de la nature des racines de l'équation caractéristique du second degré du dénominateur.

Le déterminant réduit de l'équation caractéristique est :

$$\Delta' = \omega_n^2 \xi^2 - \omega_n^2 = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$$

Suivant le signe de Δ' , on peut distinguer 2 cas différents :

☒ 1^{ère} cas : Le régime apériodique (ou non oscillatoire) $\xi \geq 1$

Si $\Delta' \geq 0$ c'est-à-dire : $\xi^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \xi \geq 1$. Alors on a 2 racines réelles :

$$\begin{aligned} p_1 &= -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ p_2 &= -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{aligned}$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2}$$

Les constantes A , B et C sont telles que :

$$A = [pS(p)]_{p=0} = KE_0$$

$$B = [(p-p_1)S(p)]_{p=p_1} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$C = [(p-p_2)S(p)]_{p=p_2} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)}$$

L'expression de $S(p)$ est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{KE_0}{p} + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)} \cdot \frac{1}{(p-p_1)} + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)} \cdot \frac{1}{(p-p_2)} \\ &= \frac{KE_0}{p} + \frac{KE_0\omega_n^2}{(p_1-p_2)} \left(\frac{1}{p_1(p-p_1)} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE_0 + \frac{KE_0\omega_n^2}{(p_1-p_2)} \left(\frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} \right)$$

Tenant compte que : $p_1 = -1/\tau_1$; $p_2 = -1/\tau_2$; $p_1 - p_2 = 2\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$; $p_1 p_2 = \omega_n^2$, on aura :

$$s(t) = KE_0 + \frac{KE_0\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} (-\tau_1 e^{-t/\tau_1} + \tau_2 e^{-t/\tau_2})$$

Les caractéristiques de la réponse $s(t)$ sont :

- La réponse $s(t)$ est une fonction croissante.

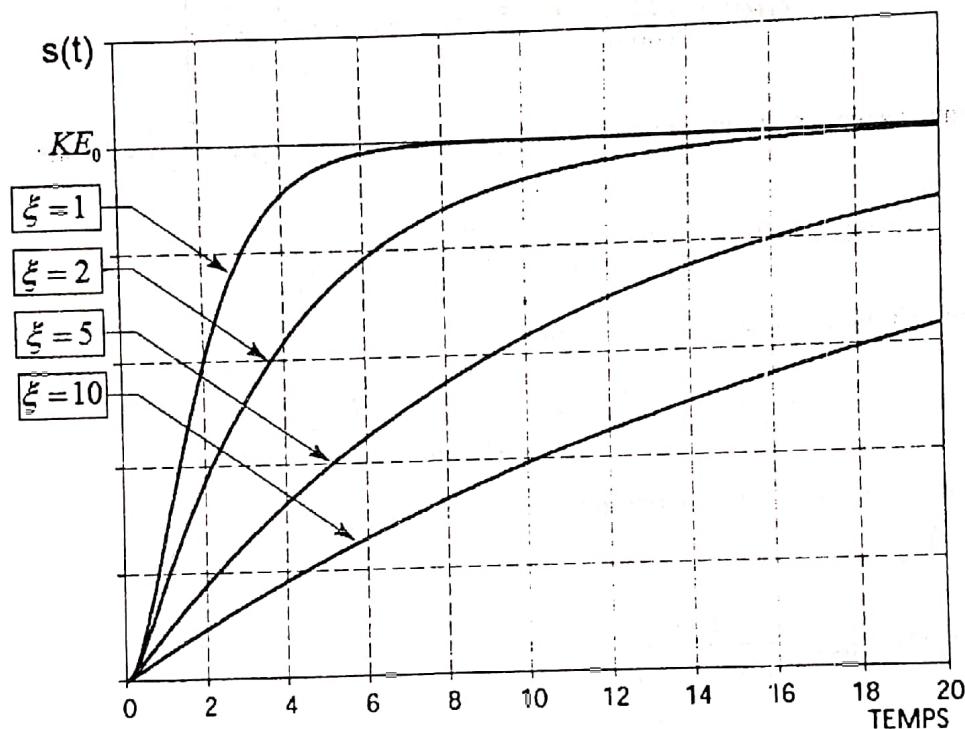
- La valeur initiale de la réponse :

$$s(0) = \lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pS(p) = 0$$

- La valeur finale de la réponse (ou réponse en régime permanent):

$$s(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pS(p) = KE_0$$

- La tangente à l'origine est une droite horizontale d'équation : $y = 0$



Réponse indicielle d'un système de 2nd ordre pour $\xi \geq 1$.

Remarques :

- Pour le régime aperiodique (ou régime non oscillatoire), l'allure de la réponse est assez proche de celle d'un système du 1^{er} ordre, diffère néanmoins par la tangente horizontale à l'origine et l'existence d'un point d'inflexion.
- Pour le régime aperiodique, la réponse la plus rapide correspond à $\xi = 1$. Ce cas est appelé régime critique.

☒ 2^{ème} cas : Le régime pseudo-périodique (ou oscillatoire amortie) $\xi < 1$

Si $\Delta' < 0$ c'est-à-dire : $\xi^2 - 1 < 0 \Rightarrow \xi < 1$. Alors on a 2 racines complexes conjuguées:

$$p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$$

$$p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2})$$

Si on pose $\xi = \cos(\varphi)$ alors $\sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2}$, on obtient :

$$p_1 = -\omega_n(\cos(\varphi) - j\sin(\varphi)) = -\omega_n e^{-j\varphi}$$

$$p_2 = -\omega_n(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = -\omega_n e^{j\varphi}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Rightarrow \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

La sortie du système pour une entrée échelon $\left(e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}\right)$ est alors:

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

La décomposition de $S(p)$ en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{KE_0\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-p_2}$$

Les constantes A , B et C sont telles que :

$$A = [pS(p)]_{p=0} = KE_0$$

$$B = [(p-p_1)S(p)]_{p=p_1} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)}$$

$$C = [(p-p_2)S(p)]_{p=p_2} = \frac{KE_0\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)}$$

L'expression de $S(p)$ est alors:

$$S(p) = \frac{KE_0}{p} + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1(p_1-p_2)(p-p_1)} + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_2(p_2-p_1)(p-p_2)}$$

$$= \frac{KE_0}{p} + \frac{KE_0\omega_n^2}{(p_1-p_2)} \left(\frac{1}{p_1(p-p_1)} - \frac{1}{p_2(p-p_2)} \right)$$

En utilisant la transformée inverse, on obtient :

$$\begin{aligned} s(t) &= L^{-1}[S(p)] = KE_0 + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} \right) \\ &= KE_0 + \frac{KE_0\omega_n^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_1 p_2} \right) \end{aligned}$$

Tenant compte que : $p_1 = -\omega_n e^{-j\varphi}$; $p_2 = -\omega_n e^{j\varphi}$; $p_1 - p_2 = 2j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$; $p_1 p_2 = \omega_n^2$, on aura:

$$\begin{aligned} s(t) &= KE_0 + \frac{KE_0\omega_n^2}{2j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{-\omega_n e^{j\varphi} e^{\left(-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t} + \omega_n e^{-j\varphi} e^{\left(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t}}{\omega_n^2} \right) \\ &= KE_0 + \frac{KE_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{-e^{j\varphi} e^{\left(-\xi\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t} + e^{-j\varphi} e^{\left(-\xi\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\right)t}}{2j} \right) \\ &= KE_0 + \frac{KE_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\frac{-e^{j\varphi} e^{-\xi\omega_n t} e^{j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t} + e^{-j\varphi} e^{-\xi\omega_n t} e^{-j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t}}{2j} \right) \\ &= KE_0 + \frac{KE_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{-e^{j\varphi} e^{j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t}}{2j} \right) \\ &= KE_0 + \frac{KE_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left(\frac{-e^{j(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)} + e^{-j(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi)}}{2j} \right) \\ &= KE_0 - \frac{KE_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \end{aligned}$$

Avec : $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$

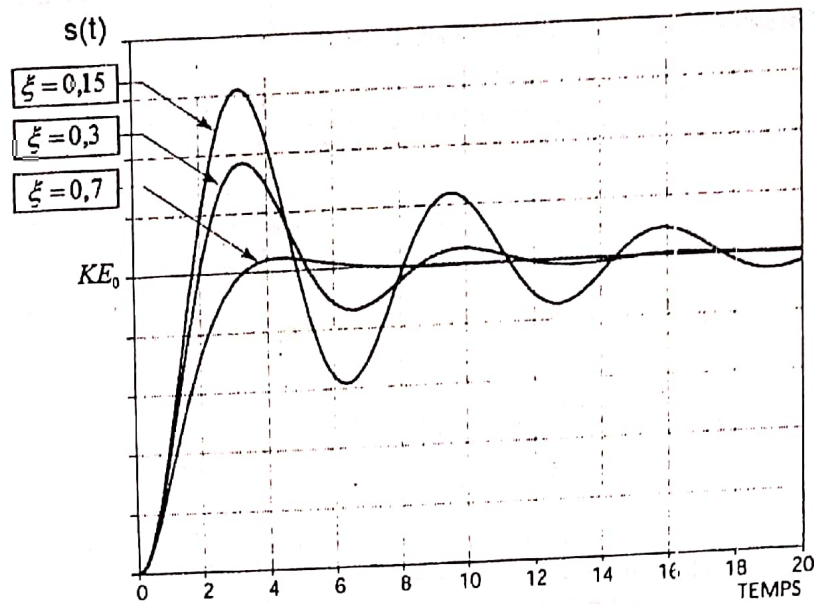
Les caractéristiques de la réponse $s(t)$ sont :

- La réponse $s(t)$ est une fonction oscillante (partie sinusoïdale) amortie (exponentielle décroissante).
- La pseudo-pulsation (ou pulsation propre amortie):

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

- La pseudo-période des oscillations:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

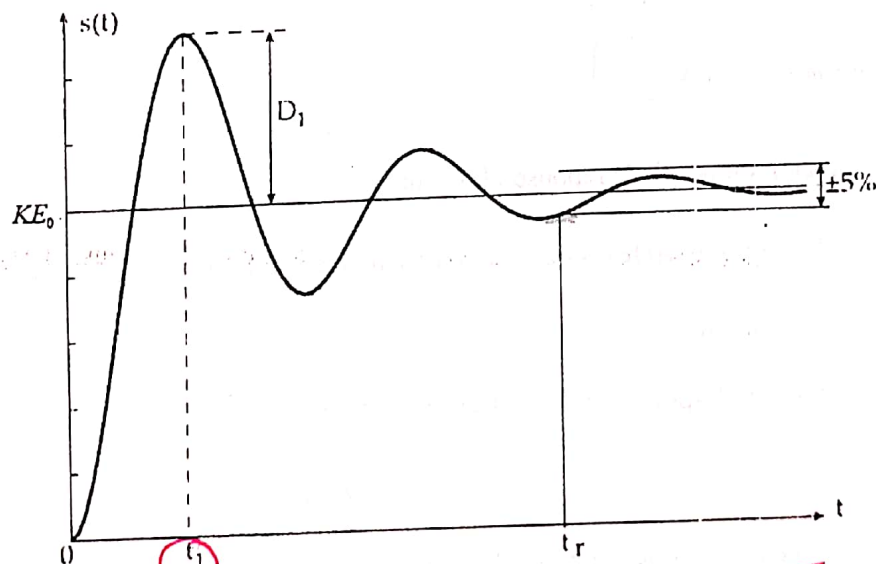


Réponse indicielle d'un système de second ordre pour $\xi < 1$

*oscillatoire
amortie*

Cette réponse indicielle peut être caractérisée par les 3 paramètres suivants:

- L'instant du 1^{er} dépassement (ou temps de pic) : t_1
- L'amplitude du 1^{er} dépassement en % : $D_1(\%) = 100 \cdot \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty)}$
- Le temps de réponse à $\pm 5\%$: t_r



Réponse indicielle d'un système de second ordre pour $\xi < 1$

Ces 3 paramètres peuvent être déterminés graphiquement (voir figure ci-dessus) ou mathématiquement en remarquant que la réponse $s(t)$ présente un maximum à l'instant t_1 .

Par conséquent, en faisant le calcul de $\frac{ds(t_1)}{dt} = 0$, on obtient :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$D_1(\%) = 100 \cdot \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty)} = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Le temps de réponse à $\pm 5\%$ peut être déterminé graphiquement en traçant le tube $\pm 5\%$ (voir figure ci-dessus) ou par l'expression approchée suivante :

$$t_r \approx \frac{3}{\xi \omega_n}$$

Application 6 :

Un système bouclé est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{18}{100p^2 + 60p + 36}$$

Déterminer l'ordre du système en déduire les valeurs du gain statique (K), du coefficient d'amortissement (ξ) et de la pulsation propre (ω_n) du système. Calculer les valeurs, de l'instant de pic (t_{pic}), le dépassement ($D_1(\%)$) et le temps de réponse à $\pm 5\%$ (t_r).

$$H(p) = \frac{0,18}{p^2 + 0,6p + 0,36}$$

$$= \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 0,36 \\ 2\xi\omega_n = 0,6 \\ K \omega_n^2 = 0,18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_n = 0,6 \text{ rad/s} \\ \xi = \frac{0,6}{2 \times 0,6} = 0,5 \\ K = \frac{0,18}{0,36} = 0,5 \end{cases}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{0,6 \sqrt{1-0,5^2}} = 6,048$$

$$D_1(\%) = 100 \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = 16,3\%$$

$$t_r = \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{0,3 \times 0,6} = 10,8$$

V. REPONSE FREQUENTIELLE DES SYSTEMES

V.1. Réponse d'un système à une sinusoïde

Pour un système linéaire d'ordre quelconque, si l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$ alors la sortie sera également une sinusoïde de la forme $s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Cette sortie sera caractérisée par deux paramètres qui sont :

- le gain : $G = S_0 / E_0$
- le déphasage : φ

Dans l'analyse fréquentielle (on dit aussi analyse harmonique), on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$, on obtient l'expression de la fonction de transfert complexe:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \xrightarrow{p=j\omega} H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

Le gain G est égal au module de la fonction de transfert complexe:

$$G(\omega) = |H(j\omega)|$$

Le déphasage φ est égal à l'argument de la fonction de transfert complexe :

$$\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$$

Le gain en décibel est défini par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega))$$

La fonction de sortie est alors de la forme :

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t + \varphi) = E_0 \cdot G \sin(\omega t + \varphi)$$

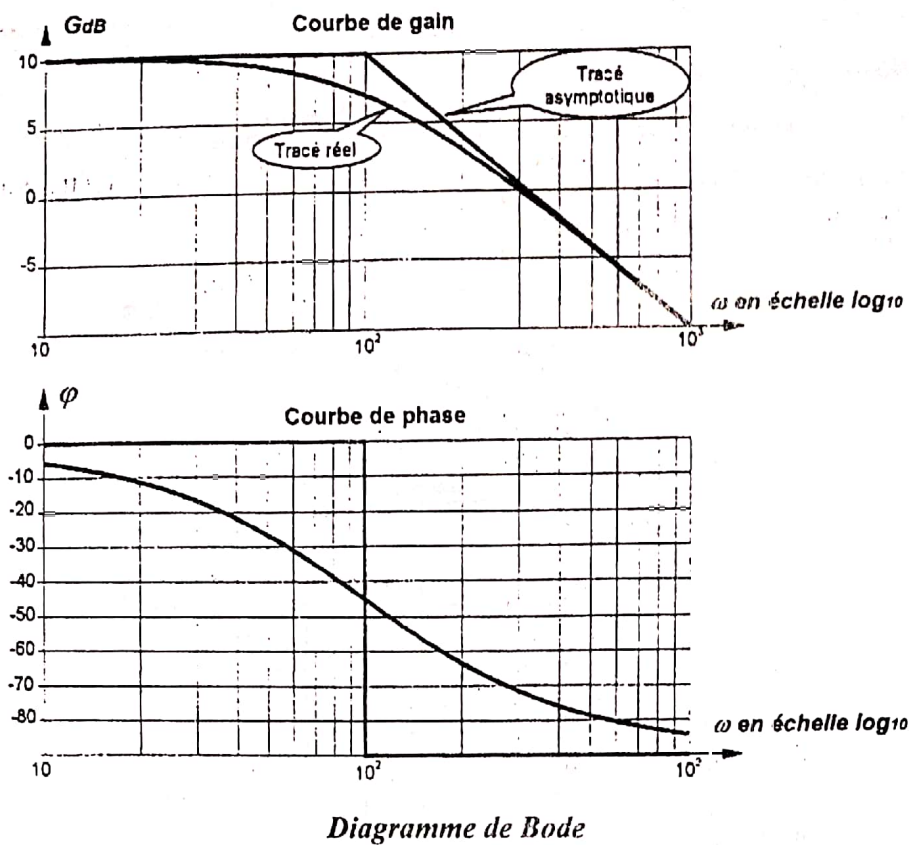
Pour étudier le comportement fréquentiel d'un système, on peut utiliser trois types de représentations graphiques :

- Diagramme de Bode
- Diagramme de Black
- Diagramme de Nyquist

V.1.1. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes :

- **La courbe de gain** : qui exprime le gain en décibels de la fonction de transfert, en fonction de la pulsation ω représentée sur une échelle logarithmique : $G_{dB} = f(\log(\omega))$
- **La courbe de phase** : qui exprime l'argument de la fonction de transfert, en fonction de la pulsation ω représentée sur une échelle logarithmique : $\varphi = f(\log(\omega))$



Le diagramme de Bode permet de mettre en évidence les caractéristiques suivantes :

- **La pulsation de coupure à $-3dB$ ω_c** : c'est la pulsation pour laquelle le gain en décibel a diminué de $3dB$ par rapport à sa valeur maximum (ou encore c'est la pulsation pour laquelle le gain a diminué de $1/\sqrt{2}$ par rapport à sa valeur maximum) :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 20 \log(G(\omega_c)) = 20 \log(G_{\max}) - 20 \log(\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dB_{\max}} - 3dB$$

- **La bande passante à $-3dB$** : C'est l'intervalle de fréquence pour lequel le gain en décibel est compris entre le gain maximale en décibel et le gain maximale en décibel diminué de $3dB$.
- **L'atténuation** : Ce sont les pentes du diagramme de Bode exprimées en $dB/décade$. (une décade est l'intervalle entre les pulsations ω_i et $10\omega_i$). Si la pente est égale à $20n \text{ dB/décade}$ alors on dit qu'elle est d'ordre n .

V.1.2. Diagramme de Black

Le diagramme de Black est constitué de la courbe qui exprime le gain en décibel de la fonction de transfert en fonction de son argument : $G_{dB} = f(\varphi)$. Cette courbe doit être graduée et orientée dans le sens des ω croissants (ω variant de 0 à $+\infty$).

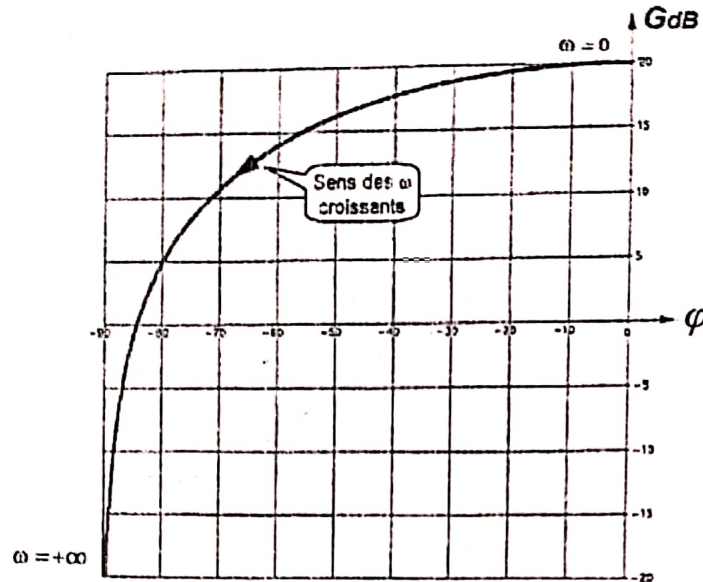


Diagramme de Black

V.1.3. Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est constitué de la courbe qui exprime la partie imaginaire de la fonction de transfert en fonction de sa partie réelle : $\Im m [H(j\omega)] = f[\Re H(j\omega)]$. Cette courbe doit être graduée et orientée dans le sens des ω croissants (ω variant de 0 à $+\infty$). Elle est définie en coordonnées polaires par :

- un rayon égal au module de la fonction de transfert: $r(\omega) = |H(j\omega)|$
- une phase égale à l'argument de la fonction de transfert: $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

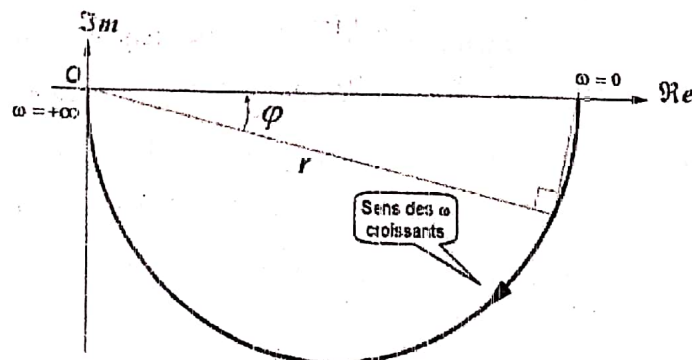


Diagramme de Nyquist

Rappel sur les nombres complexes :

Soit un nombre complexe :

$$Z = a + jb$$

Ce nombre peut être écrit sous la forme polaire suivante :

$$Z = r.e^{j\theta} = r.(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Où :

$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} : \text{est le module de } Z.$$

$$\theta = \text{Arg}(Z) = \text{Arctg}\left(\frac{b}{a}\right) : \text{est l'argument (ou la phase) de } Z.$$

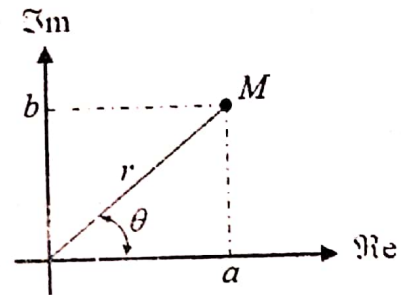
On peut aussi définir le module en décibel de Z par : $|Z|_{dB} = 20 \log|Z|$

Propriétés :

$$- |Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2| ; \quad \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$- \text{Arg}(Z_1 \cdot Z_2) = \text{Arg}(Z_1) + \text{Arg}(Z_2) ; \quad \text{Arg}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \text{Arg}(Z_1) - \text{Arg}(Z_2)$$

$$- \text{Arg}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \pi & \text{si } a < 0 \end{cases} ; \quad \text{Arg}(jb) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

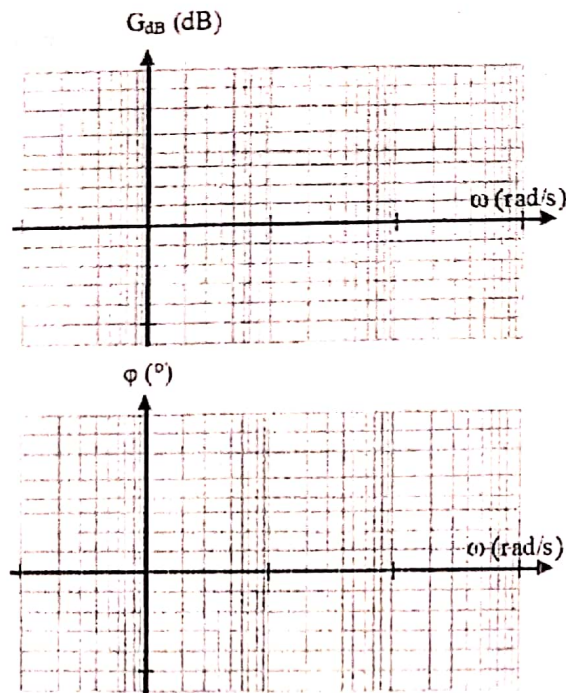
**V.2. Analyse fréquentielle des fonctions simples****V.2.1. La fonction gain pur**

La fonction « gain pur » a pour fonction de transfert :

$$H(p) = K \xrightarrow{p=j\omega} H(j\omega) = K \quad (K > 0)$$

- Son gain est : $G = |H(j\omega)| = K$
- Son gain en décibel est : $G_{dB} = 20 \log(G) = 20 \log(K)$
- Sa phase est : $\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = 0^\circ$

$$\angle H(j\omega)$$



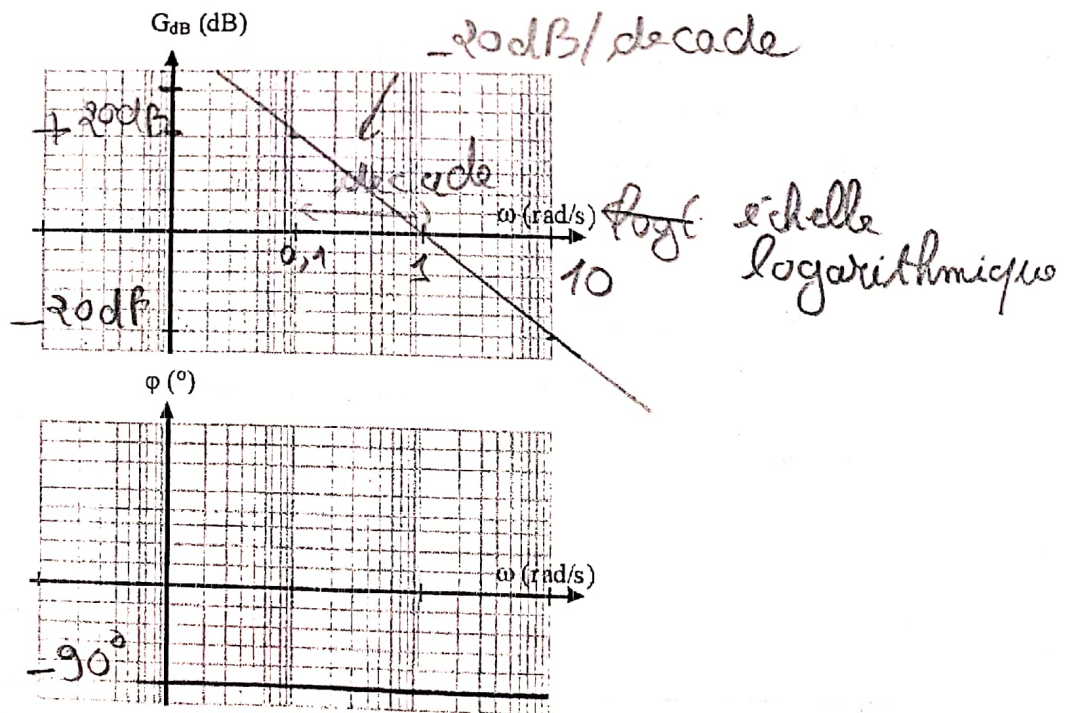
V.2.2. La fonction intégrateur pur

La fonction « intégrateur pur » a pour fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1}{p} \xrightarrow{p=j\omega} H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

- Son gain est : $G = |H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$
- Son gain en décibel est : $G_{dB} = 20 \log(G) = -20 \log(\omega)$
- Sa phase est : $\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = -90^\circ$

$\omega = 1 ; G_{dB} = 0 \text{ dB}$
 $\omega = 10 ; G_{dB} = -20 \text{ dB}$
 $\omega = 0,1 ; G_{dB} = 20 \text{ dB}$

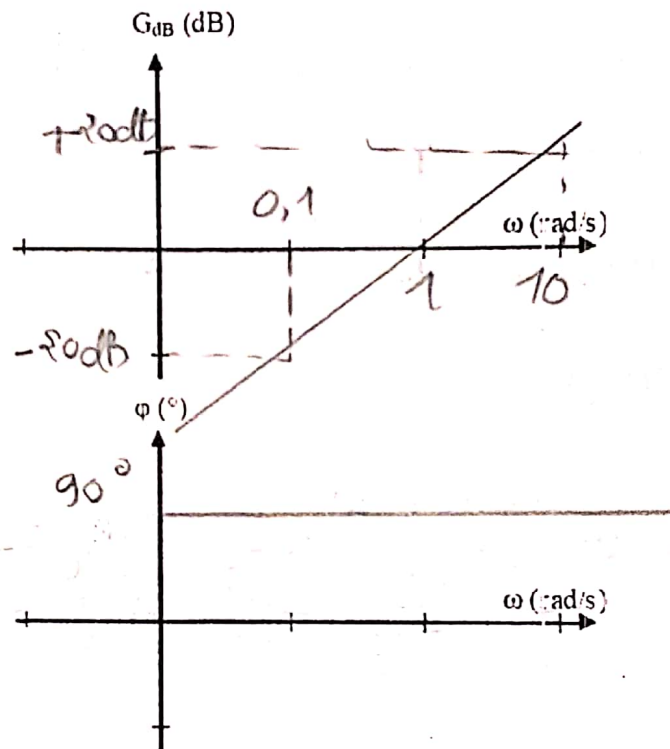


V.2.3. La fonction dérivateur pur

La fonction « dérivateur pur » a pour fonction de transfert :

$$H(p) = p \xrightarrow{p=j\omega} H(j\omega) = j\omega$$

- Son gain est : $G = |H(j\omega)| = \omega$
- Son gain en décibel est : $G_{dB} = 20 \log(G) = 20 \log(\omega)$
- Sa phase est : $\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = 90^\circ$



V.3. Analyse fréquentielle d'un système de 1^{er} ordre

V.3.1. Définition

La fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \xrightarrow{p=j\omega} H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

Cette fonction de transfert complexe peut être mise sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (\text{Avec : } \omega_c = 1/\tau)$$

Le gain et la phase de la fonction de transfert complexe sont donnés par :

$$\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \\ \varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{cases}$$

Le gain en décibel est défini par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(K) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

V.3.2. Diagramme de Bode

Etude de la courbe de gain :

- ☑ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ en basse fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow 0$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log K$
asymptote horizontale

- ☑ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ en haute fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow \infty$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log K - 10 \log\left(\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$
 $= \underbrace{-20 \log \omega}_{-a} + \underbrace{20 \log \omega_c + 20 \log K}_{+b}$

- ☑ Intersection des deux asymptotes :

$20 \log K = -20 \log \omega + 20 \log \omega_c + 20 \log K$
Les 2 asymptotes se coupent en $\omega = \omega_c$

- ☑ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ à la pulsation ω_c :

pour $\omega = \omega_c$; $G_{dB} = 20 \log K - 10 \log 2$
 $= G_{dB} - 3 \text{ dB}$

$\Rightarrow \omega_c$ est la pulsation de coupure à -3dB

Etude de la courbe de phase:

- ☑ Comportement de φ en basse fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow 0$; $\varphi \rightarrow 0^\circ$

- ☑ Comportement de φ en haute fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow \infty$; $\varphi \rightarrow -90^\circ$

- ☑ Comportement de φ à la pulsation ω_c :

pour $\omega = \omega_c$ $\varphi = -45^\circ$

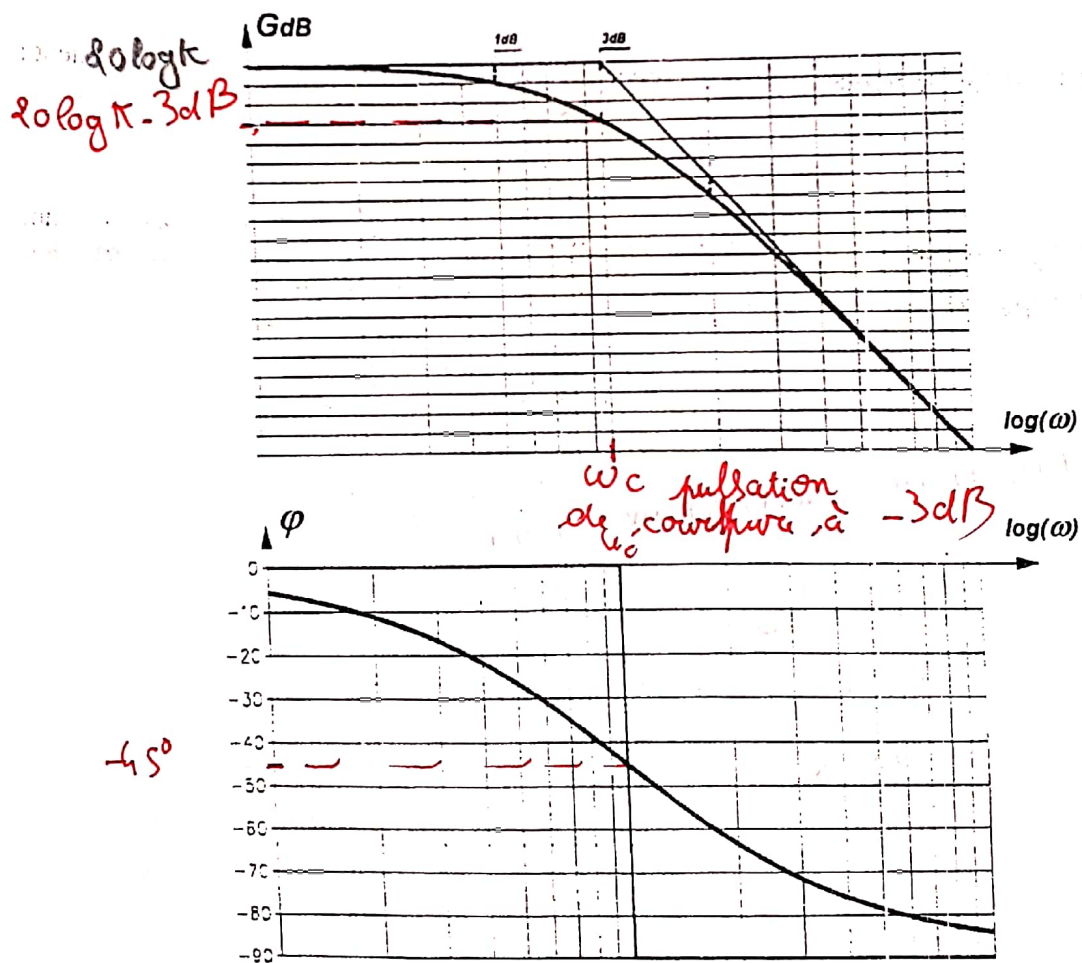


Diagramme de Bode d'un système de 1^{er} ordre

V.4. Analyse fréquentielle d'un système de 2nd ordre

V.4.1. Diagramme de Bode pour $\xi \geq 1$

La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Nous avons vu que lorsque $\xi \geq 1$, la fonction de transfert de 2nd ordre comporte 2 racines réelles p_1 et p_2 . Elle peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Si on pose $\tau_1 = -1/p_1$ et $\tau_2 = -1/p_2$, alors on peut écrire :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2 \tau_1 \tau_2}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{K_1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

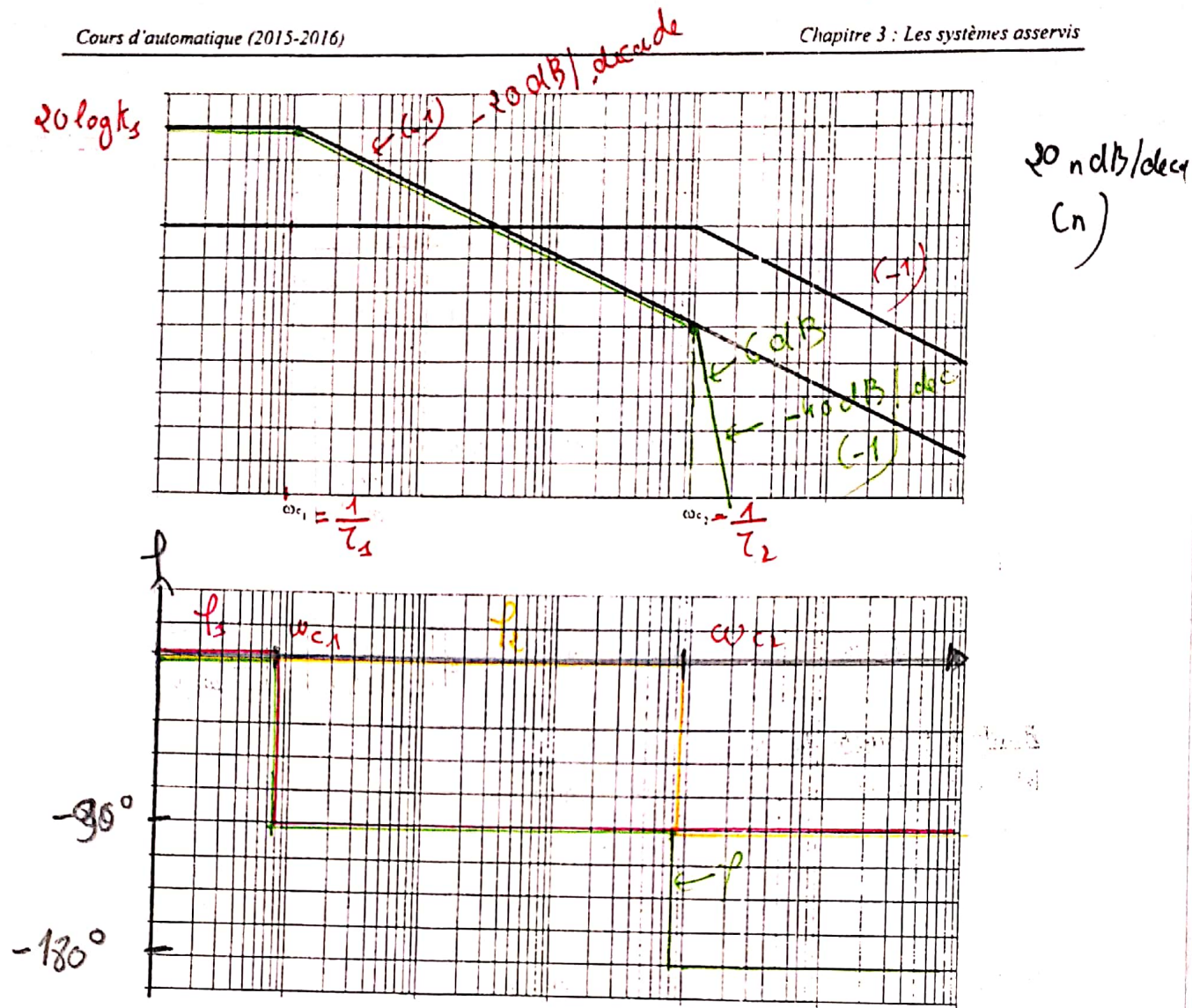
Pour faire l'étude fréquentielle, on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K_1}{(1 + j\tau_1\omega)(1 + j\tau_2\omega)}$$

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert peut donc être obtenu en additionnant les tracés effectués séparément pour les 2 fonctions du 1^{er} ordre suivantes :

$$|H(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{K_1}{1 + j\tau_1\omega} \right|_{dB} + \left| \frac{1}{1 + j\tau_2\omega} \right|_{dB}$$

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{K_1}{1 + j\tau_1\omega}}_{p_1} + \underbrace{\frac{1}{1 + j\tau_2\omega}}_{p_2}$$

Diagramme de Bode d'un système de 2nd ordre lorsque $\xi \geq 1$ V.4.2. Diagramme de Bode pour $\xi < 1$

La fonction de transfert d'un système du second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}p + 1}$$

Nous avons vu que lorsque $\xi < 1$, alors la fonction de transfert comporte 2 racines complexes conjuguées. Pour faire l'étude fréquentielle, on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

Le module et l'argument de la fonction de transfert sont donnés par :

$$\begin{cases} G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \\ \varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arctg} \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \end{cases}$$

Le gain en décibel est défini par :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log(G(\omega)) = 20 \log(K) - 10 \log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right)$$

Etude de la courbe de gain :

- ☒ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ en basse fréquence:

$\omega \rightarrow 0$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log K$: asymptote Horizontale

- ☒ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ en haute fréquence:

$\omega \rightarrow \infty$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log K - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)$
 $= \underbrace{-40 \log \omega}_{-a} + \underbrace{40 \log \omega_n + 20 \log K}_{b}$
 asymptote oblique de pente $-40 \text{ dB/decade} (-2)$

- ☒ Intersection des deux asymptotes :

Les 2 asymptotes se coupent en $\omega = \omega_n$
 pour $\omega = \omega_n \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{2\xi} \right)$

- ☒ Comportement de $G_{dB}(\omega)$ à la pulsation propre ω_n :

On déduit qu'à la pulsation propre ω_n , le gain en décibel dépend du facteur d'amortissement ξ .
 Donc selon la valeur de ξ , on peut avoir une atténuation ou une augmentation (résonance) du gain en décibel. Pour déterminer ce comportement, faisons l'étude de la fonction :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

L'extremum de G_{dB} est lié à celui de sa fonction dénominateur $f(\omega)$ suivante :

$$f(\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

La dérivée de $f(\omega)$ est alors :

$$f'(\omega) = -4 \frac{\omega}{\omega_n} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right) + 8\xi^2 \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$f'(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ à condition que } \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pour un système du 2nd ordre de facteur d'amortissement ξ , on distingue que :

- lorsque $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors G_{dB} présente un maximum à la pulsation $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$, que l'on appelle pulsation de résonance.
- lorsque $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors G_{dB} ne présente pas de maximum (courbe décroissante).

L'amplitude à la résonance est :

$$G(\omega_R) = G(\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}) = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Le facteur de surtension (ou de qualité) est défini par :

$$Q = \frac{G(\omega_R)}{G(0)} = \frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Etude de la courbe de phase:

- ☑ Comportement de φ en basse fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow 0$; $\varphi \rightarrow 0^\circ$

- ☑ Comportement de φ en haute fréquence:

lorsque $\omega \rightarrow \infty$; $\varphi \rightarrow -180^\circ$

- ☑ Comportement de φ à la pulsation propre ω_n :

$\omega = \omega_n$; $\varphi = -90^\circ$

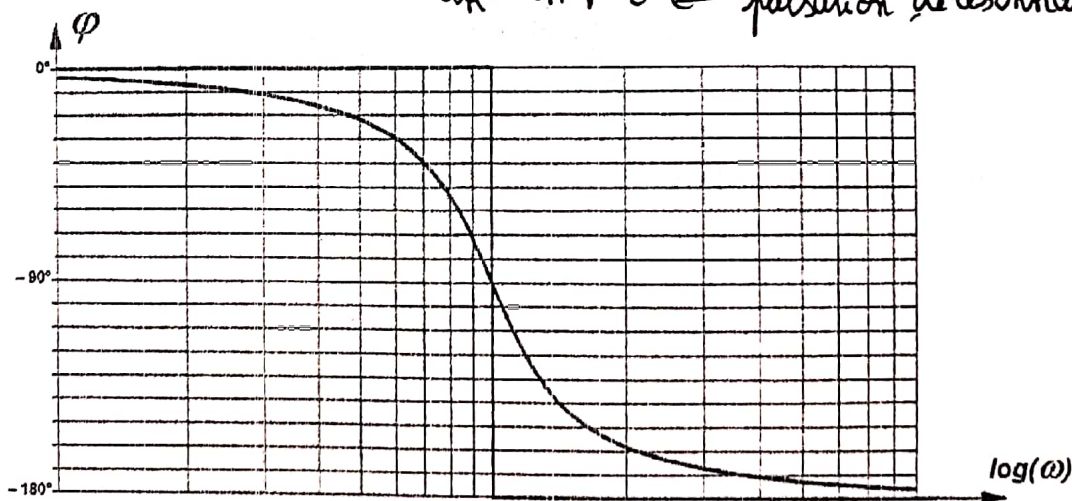
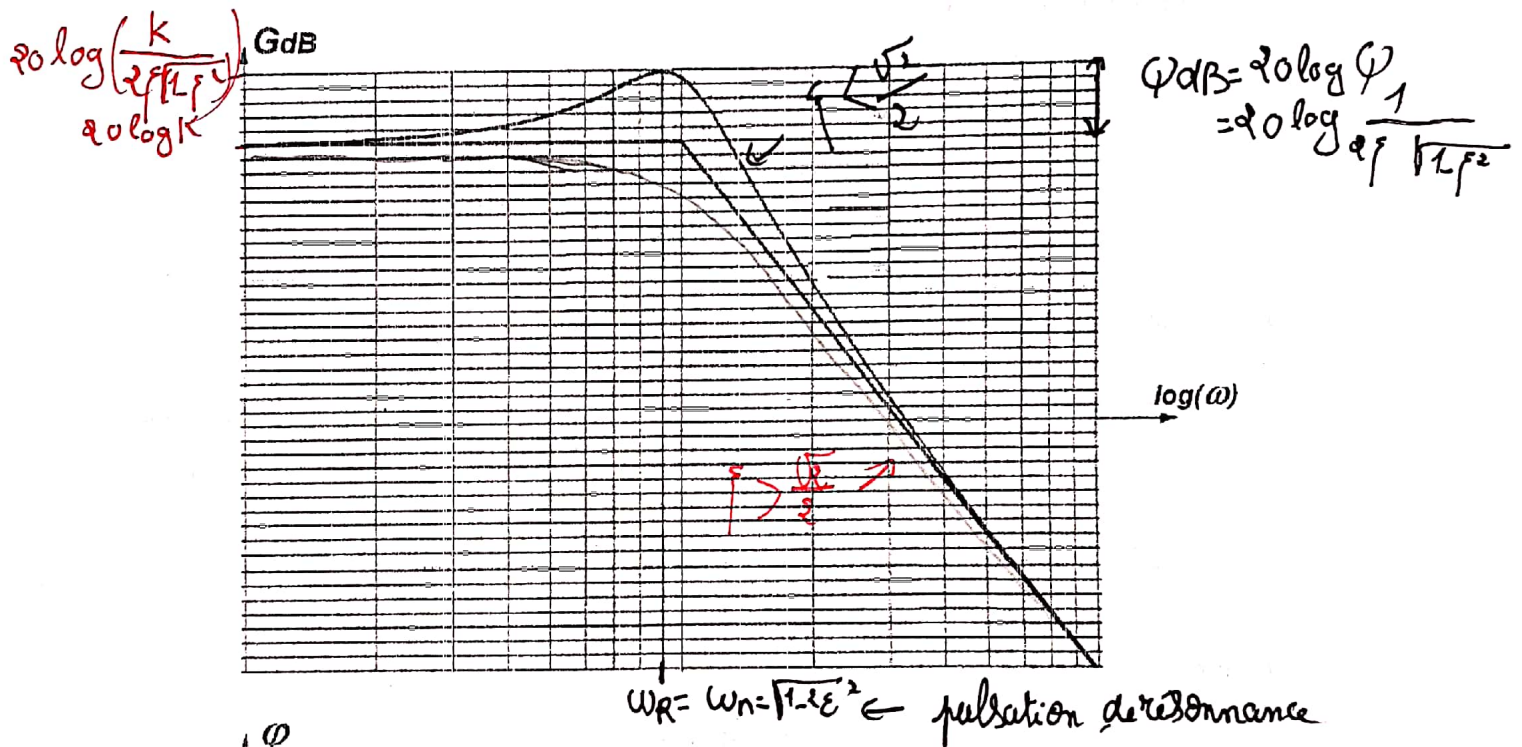


Diagramme de Bode d'un système de 2nd ordre lorsque $\xi < 1$

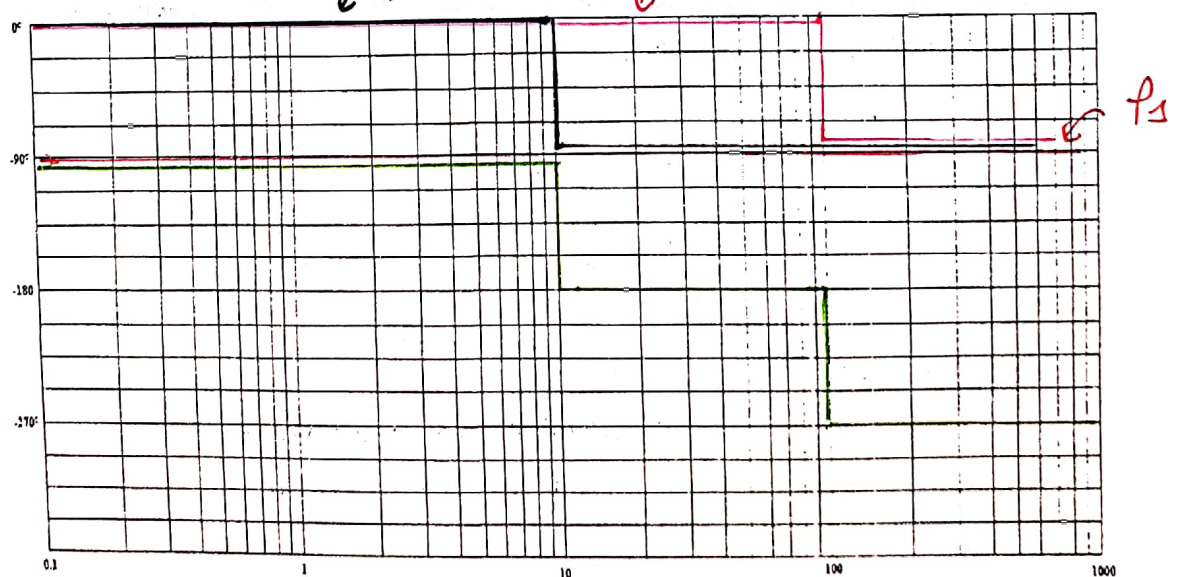
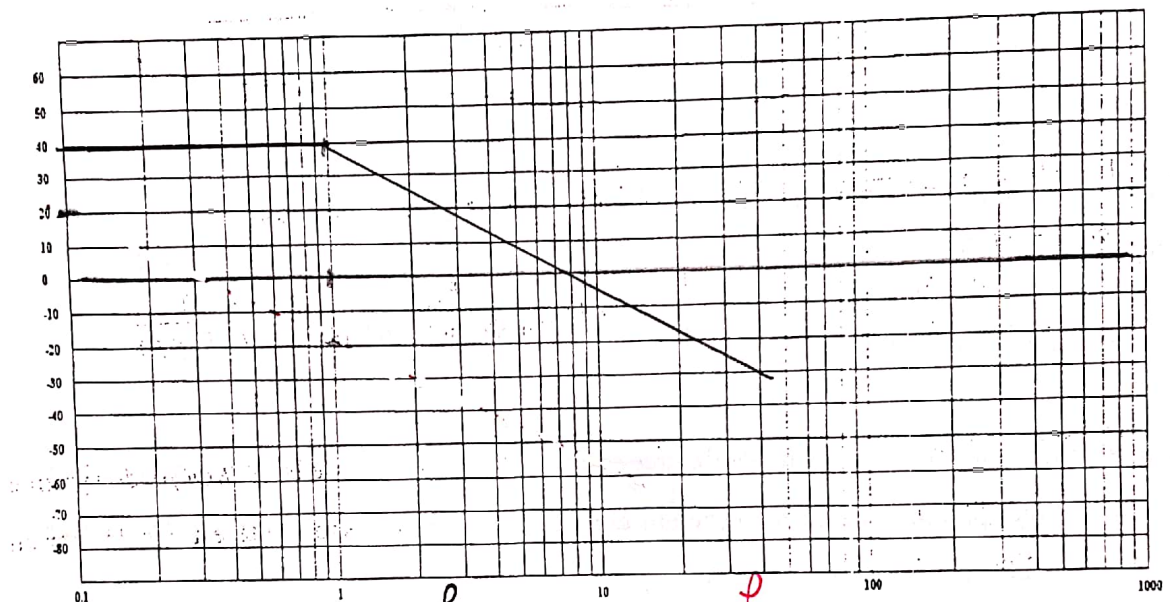
Application 7 :

Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante : $H(p) = \frac{10^5}{p^3 + 110p^2 + 1000p}$

$$H(p) = \frac{10^5}{p^3 + 110p^2 + 1000p} = \frac{10^5}{p(p^2 + 110p + 1000)}$$

$$p = j\omega \Rightarrow H(j\omega) = \frac{10^5}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{10})(1 + \frac{j\omega}{100})}$$

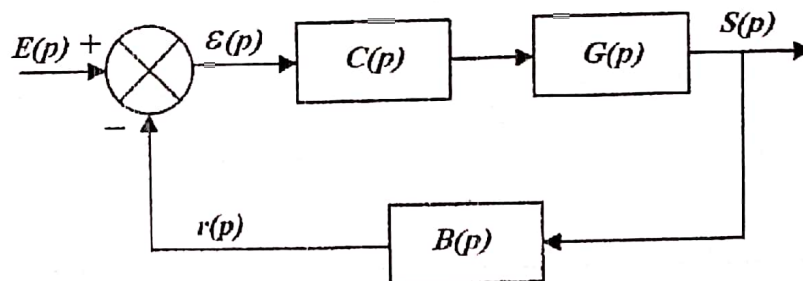
$$|H(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{1}{j\omega} \right|_{dB} + \left| \frac{10^5}{4j\frac{\omega}{10}} \right|_{dB} + \left| \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{100}} \right|_{dB}$$



VI. PRECISION DES SYSTEMES ASSERVIS

VI.1. Erreur statique

On considère le système asservis suivant :



La précision du système est liée à la variable $\varepsilon(p)$. Son expression est :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - r(p) \\ &= E(p) - B(p)S(p) \\ &= E(p) - B(p)C(p)G(p)\varepsilon(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + B(p)C(p)G(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

On remarque que l'erreur dépend de l'entrée appliquée $E(p)$, et de la $FTBO(p)$ du système:

- Si on applique une entrée échelon, alors l'erreur correspondante est appelée erreur statique de position qu'on la note ε_p .
- Si on applique une entrée rampe, alors l'erreur correspondante est appelée erreur statique de vitesse (ou erreur de trainage) ε_v .

On prend le cas général pour lequel la $FTBO$ peut être mise sous la forme :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

- α : est la classe du système.
- K : est le gain.
- $N(p)$: est le polynôme numérateur de degré m tel que $N(0) = 1$
- $D(p)$: est le polynôme dénominateur de degré n tel que $D(0) = 1$

VI.1.1. Erreur statique de position ε_p

Si l'entrée est un échelon, c'est-à-dire $E(p) = \frac{E_0}{p}$, l'erreur statique de position ε_p est alors :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}} \frac{E_0}{p}$$

En se rappelant que $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$, on obtient :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} \frac{E_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0$$

On remarque que l'erreur statique de position dépend de l'amplitude de l'entrée E_0 , du classe

α du système et du gain K . $\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0$

- Si $\alpha = 0$ alors $\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 = \frac{E_0}{1 + K}$

- Si $\alpha \geq 1$ alors $\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 = 0$

VI.1.2. Erreur statique de vitesse (ou erreur de trainage) ε_v

Si l'entrée est une rampe, c'est-à-dire $E(p) = \frac{A_0}{p^2}$, l'erreur statique de vitesse ε_v est alors :

$$\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}} \frac{A_0}{p^2}$$

En se rappelant que $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$, on obtient :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}} \frac{A_0}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} A_0$$

On remarque que l'erreur statique de vitesse dépend de la pente de l'entrée A_0 , du classe α du système et du gain K .

- Si $\alpha = 0$ alors $\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{-1}}{p^0 + K} A_0 = +\infty$

- Si $\alpha = 1$ alors $\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^0}{p^1 + K} A_0 = \frac{A_0}{K}$

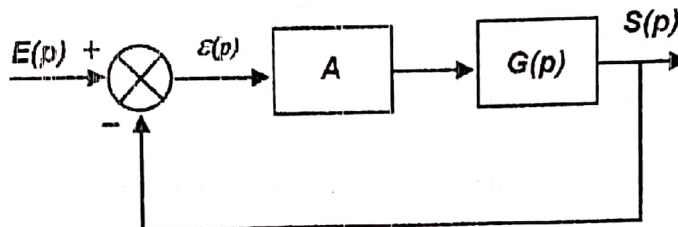
- Si $\alpha \geq 2$ alors $\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} A_0 = 0$

Classe	Entrée échelon : $E(p) = \frac{E_0}{p}$	Entrée rampe : $E(p) = \frac{A_0}{p^2}$
$\alpha = 0$	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$	$\varepsilon_v = +\infty$
$\alpha = 1$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_v = \frac{A_0}{K}$
$\alpha \geq 2$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_v = 0$

Influence de la classe α du système sur l'erreur statique

Application 8:

Un asservissement est réalisé suivant le schéma ci-dessous :



Avec : $G(p) = \frac{12}{p(1+2p)}$

Calculer l'erreur statique de position pour un échelon unitaire et l'erreur statique de vitesse pour une rampe unitaire.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{E}(p) \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + AG(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{12A}{p(1+2p)}} \frac{1}{p} \\
 &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p(1+2p)}{p(1+2p) + 12A} = 0 \quad \text{Car } 0 \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_v &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\tilde{E}(p)}{1 + FTBO(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{1 + \frac{12A}{p(1+2p)}} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{12A}
 \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : $FTBO(p) = AG(p) = \frac{12A}{p(1+2p)} = \frac{12A}{p^2} \frac{1}{1+2p}$

Classe $\alpha = 1$: $\varepsilon_p = 0$

$\varepsilon_v = \frac{1}{12A}$

VII. STABILITE DES SYSTEMES ASSERVIS

VII.1. Introduction

En automatique, un système linéaire est stable lorsque :

- sa réponse à une impulsion de Dirac tend vers zéro.
- sa réponse à un échelon prend une valeur finie.
- sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude finie.

On montre par la suite que la stabilité d'un système est fortement liée aux pôles de sa FTBF.

VII.2. Condition de stabilité

Considérons un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0} \leftarrow \text{eq caractéristique}$$

Avec :

$N(p)$: le polynôme numérateur de la FTBF. Ses racines sont appelées les zéros de la FTBF.

$D(p)$: le polynôme dénominateur de la FTBF (ou équation caractéristique). Ses racines sont appelées les pôles de la FTBF.

Si on note p_i les pôles de $FTBF(p)$, on obtient :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_1) \dots (p - p_n)}$$

La réponse du système à une impulsion de Dirac ($e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$) est alors :

$$S(p) = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_1) \dots (p - p_n)}$$

Ce qui donne après décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i}$$

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle suivante :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

Pour que il système soit stable, il faut que $s(t)$ tends vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. On distingue alors deux cas :

- si les pôles sont réels ($p_i = \alpha_i$), alors $s(t)$ tends vers 0 que si $\alpha_i < 0$.
- si les pôles sont complexes conjugués deux à deux ($p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$)

$$\Rightarrow s(t) = \sum_i A_i e^{(\alpha_i \pm j\beta_i)t} = \sum_i A_i e^{\alpha_i t} (e^{j\beta_i t} + e^{-j\beta_i t}) = \sum_i 2A_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) : s(t) \text{ tends vers } 0$$

que si $\alpha_i < 0$.

CONCLUSION : Un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative.

VII.3. Critère de Routh

Pour étudier la stabilité d'un système linéaire, il faut déterminer la nature des pôles de sa FTBF. Ce travail devient difficile lorsque le degré du polynôme dénominateur de la FTBF est supérieur à 2. Le critère de Routh nous permet de résoudre ce problème en déterminant la nature des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation.

VII.3.1. Définition

Le critère de Routh se compose de deux conditions :

1^{ère} condition :

Pour que le système soit stable il faut que tous les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) de l'équation caractéristique soient tous positifs.

- Si un coefficient a_i est négatif ou nul, alors le système est instable.
- Si les coefficients a_i sont tous positifs, alors on passe à la vérification de la 2^{ème} condition.

2^{ème} condition:

Pour que le système soit stable il faut que tous les éléments de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh soient tous positifs.

Pour vérifier cette condition, on construit d'abord le tableau de Routh de la manière suivante :

- Ce tableau est composé de $(n+1)$ lignes orienté suivant les puissances décroissantes du polynôme caractéristique de p^n à p^0 .
- On place sur les deux premières lignes les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) : la 1^{ère} ligne regroupe les coefficients en a_{n-2k} , la 2^{ème} ligne regroupe les coefficients en $a_{n-(2k+1)}$.
- A partir de la troisième ligne, on calcule les coefficients de chaque ligne à partir d'une combinaison des deux lignes qui la précède selon les formules suivantes :

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}; \quad b_{n-4} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}; \quad b_{n-6} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}; \quad c_{n-5} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_{n-2} & b_{n-6} \end{vmatrix}$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_2	a_0	0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_1	0	0
p^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...		0	
p^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	...		0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		0			
p^1	$\vdots$		0				
p^0	$\vdots$	0					

Tableau de Routh

Après avoir construit le tableau de Routh :

- Si les coefficients de la 1^{ère} colonne sont tous de positifs, alors le système est stable. Dans ce cas, toutes les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative.
- S'il existe des coefficients négatifs dans la 1^{ère} colonne, alors le système est instable. Dans ce cas, l'équation caractéristique possède des racines à partie réelle positive (appelés des pôles instables). Le nombre de pôle instable correspond au nombre de changement de signes dans la 1^{ère} colonne.
- Si les coefficients d'une ligne sont tous nuls, alors le système est à la limite de stabilité (dit aussi oscillant ou marginalement stable). Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède des racines imaginaires pures conjuguées.

Remarque :

- Si le polynôme caractéristique est de degré 1 ou 2, la 1^{ère} condition est suffisante c'est-à-dire que si les a_i ~~aient le même signe~~, alors on peut affirmer directement que le système est stable. *sont tous positifs*

Application 9 :

Etudier la stabilité des systèmes asservis dont la fonction de transfert en boucle fermée sont :

$$H_{BF}(p) = \frac{5p+1}{p^3+2p^2-3p+1}; H_{BF}(p) = \frac{p+1}{p^3+3p+1}; H_{BF}(p) = \frac{3p+5}{p^3+2p^2+3p+4};$$

$$H_{BF}(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^4+p^3+2p^2+3p+1}; H_{BF}(p) = \frac{p+2}{p^3+3p^2+3p+1+K}; H_{BF}(p) = \frac{p+1}{2p^2+3p+1}$$

$$1) H_{BF}(p) = \frac{5p+1}{p^3+2p^2-3p+1}$$

1^{ère} condition : Les coeff ne sont pas tous positifs
 $\Rightarrow$ Le système est instable

$$2) H_{BF}(p) = \frac{p+1}{p^3+3p+1} \quad \text{Le coeff en } p^2 \text{ est nul}$$

$$3) H_{BF}(p) = \frac{3p+5}{p^3+2p^2+3p+4}$$

1^{ère} condition : vérifié

2^{ème} condition :

p^3	1	3	0
p^2	2	4	0
p^1	$b_1=1$	0	
p^0	$b_0=4$	0	

$$b_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$b_0 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Les coeff de la 1^{ère} colonne sont tous positifs
 $\Rightarrow$ Le système est stable

$$4) H_{BF}(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^4+p^3+p^2+3p+1}$$

1^{ère} condition : vérifié

2^{ème} condition :

p^4	1	2	1	0
p^3	1	3	0	0
p^2	$b_2=-1$	$b_0=1$	0	
p^1	$c_1=4$	0		
p^0	$d_0=1$			

$$b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$b_0 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad d_0 = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Les coeff de la 1^{ère} colonne ne sont pas tous positifs $\Rightarrow$ le système est instable
 il y a 2 changements de signe de la 1^{ère} colonne
 $\Rightarrow$ il y a deux pôles instables (à partie réelle positive)

$$H_{BF}(p) = \frac{p+2}{p^3+3p^2+3p+1+K}$$

1^{ère} condition: $1+K > 0 \Rightarrow K > -1$

2^{ème} condition: $b_1 = -\frac{1}{3} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ \hline 3 & 1+K & \end{array} \right| = \frac{2K}{3}$

p^3	1	3	0
p^2	3	$1+K$	0
p^1	$b_1 = \frac{2K}{3}$	0	
p^0	$c_0 = 1+K$		

$$c_0 = -\frac{1}{b_1} \left| \begin{array}{cc|c} 3 & 1+K & \\ \hline b_1 & 0 & \end{array} \right| = 1+K$$

Le système est stable ssi

$$\frac{2-K}{3} > 0 \text{ ET } 1+K > 0$$

système stable si $-1 < K < 2$

$$H_{BF}(p) = \frac{p+1}{3p^2+3p+1}$$

c'est un système d'ordre 2, il suffit de vérifier la 1^{ère} condition. Les coeff a_i sont tous positifs.
 $\Rightarrow$ Le système est stable

Cas particulier N°1: un zéro dans la première colonne

Si lors de la construction du tableau de Routh, on obtient un coefficient nul dans la 1^{ère} colonne alors que les autres coefficients de la ligne sont non nuls. Dans ce cas, on ne peut pas continuer la construction du tableau de Routh car il y aura une division par zéro. Dans ce cas :

- On remplace le coefficient nul par une variable $\varepsilon > 0$ et on continue la construction du tableau de Routh.
- Ensuite, on fait tendre ε vers 0^+ pour déterminer les signes des coefficients de la 1^{ère} colonne et par la suite la nature des pôles.

Application 10 :

Etudier la stabilité du système asservi dont sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H_{BF}(p) = \frac{p^2 + 5p + 7}{p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 6p + 1}$$

1^{ère} condition: vérifiée
2^{ème} condition:

p^4	1	4	4	0
p^3	3	6	0	0
p^2	$b_2=2$	$b_0=4$		
p^1	$c_1=0 \rightarrow 4$	$0 \rightarrow 0$		
p^0	$d_0=4$			

$$b_2 = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

$$b_0 = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$c_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

La ligne en p^1 est nulle; on formule le polynôme auxiliaire $A(p)$ à partir de la ligne $p^2 \Rightarrow A(p) = 2p^2 + 4$
 $\Rightarrow A'(p) = 4p$

$$d_0 = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$\Rightarrow$ Le système est oscillant (à la limite de stabilité)
 Dans ce cas il existe des racines imaginaires pures
 qui sont sol^o de l'éq. $A(p) = 0$
 $\Rightarrow 2p^2 + 4 = 0 \Rightarrow p = \pm j\sqrt{2}$

Cas particulier N°2: une ligne entière nulle

Si lors de la construction du tableau de Routh, on obtient une ligne entière nulle. Alors l'équation caractéristique possède des racines imaginaires pures conjuguées. Dans ce cas, on ne peut pas continuer la construction du tableau car il y aura une division par zéro. Pour continuer la construction et déterminer la nature des autres pôles, on procède comme suit :

- Si la ligne p' est nulle, alors on formule le polynôme auxiliaire $A(p)$ à partir des coefficients de la ligne $p^{'+1}$ non nulle.
- On remplace les coefficients nuls de la ligne p' par les coefficients du polynôme dérivé de $A(p)$ et on continue la construction du tableau.
- Les racines imaginaires pures conjuguées sont solutions de l'équation $A(p) = 0$.

Application 11 :

Etudier la stabilité du système asservi dont sa fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H_{BF}(p) = \frac{p^2 + 5p + 7}{p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 6p + 4}$$

1^{ère} condition vérifiée
2^{ème} condition :

p^4	1	2	1	0	$b_2 = \frac{-1}{3} \left \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{array} \right = 0$
p^3	3	6	0	0	
p^2	$b_2 = 0$ $\rightarrow \frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon}$	$b_0 = 1$	0	0	$b_0 = \frac{-1}{3} \left \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{array} \right = 1$
p^1	$\frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon}$	0	0		
p^0	$d_0 = 1$				$c_3 = \frac{-1}{\varepsilon} \left \begin{array}{cc} 3 & 6 \\ \varepsilon & 1 \end{array} \right = \frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon}$

$$d_0 = \frac{-1}{c_3} \left| \begin{array}{cc} \varepsilon & 1 \\ c_3 & 0 \end{array} \right| = -1 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon} = -\infty$$

$\Rightarrow$ Le système est instable (2 pôles instables)

VII.4. Critère de Revers

Ce critère graphique permet de déterminer la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de l'analyse fréquentielle de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

VII.4.1. Définition du point critique

On sait que la fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi est donnée par :

$$FTBF(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$$

On a vu que l'étude de la stabilité d'un système revient à étudier les solutions de l'équation caractéristique suivante :

$$1 + FTBO(p) = 0 \quad \text{ou encore} \quad FTBO(p) = -1$$

Cela signifie qu'il est possible de déterminer la stabilité d'un système en boucle fermée à partir de l'étude de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

On suppose que le système est à la limite de stabilité, donc l'équation caractéristique admet une solution, et par conséquent, il existe une pulsation ω tel que :

$$FTBO(j\omega) = -1$$

Dans ce cas, le module et l'argument de la FTBO sont :

$$|FTBO(j\omega)| = 1, \quad |FTBO(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \text{Arg}[FTBO(j\omega)] = -180^\circ$$

Pour évaluer la stabilité du système en BF, on étudie la position de la courbe de réponse harmonique en BO par rapport au point critique défini par :

$$|FTBO(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \text{Arg}[FTBO(j\omega)] = -180^\circ$$

VII.4.2. Les marge de stabilité

Pour assurer la stabilité d'un système asservi, il faut que la réponse harmonique de sa FTBO passe suffisamment loin du point critique. On définit alors des marges de sécurité entre le lieu de la FTBO et le point critique. Ces marges sont :

☑ **La marge de gain M_G** : c'est la différence entre 0 dB et la valeur du gain en décibel qui correspond à la phase de -180° :

$$M_G = 0 \text{ dB} - |FTBO(j\omega_{-180})|_{dB}$$

Où : $\omega_{-\pi}$ est appelée pulsation critique, la phase de la FTBO pour cette pulsation est égale à -180° :

$$\text{Arg}[FTBO(j\omega_{-\pi})] = -180^\circ$$

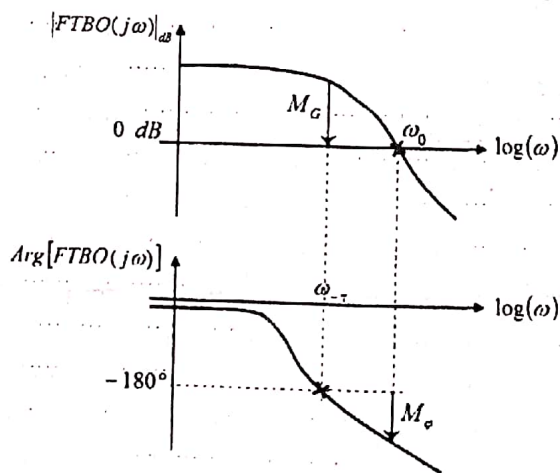
☑ La **marge de phase** M_ϕ : c'est la différence entre la valeur de la phase qui correspond à un gain en décibel égal à 0 dB et -180° :

$$M_\phi = \text{Arg}(FTBO(j\omega_0)) - (-180^\circ)$$

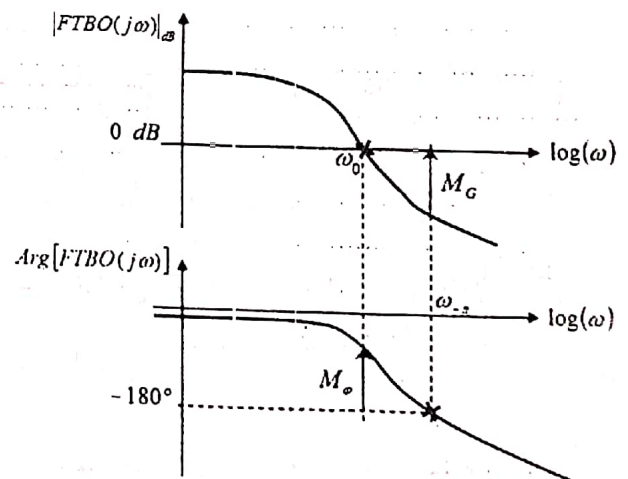
Où : ω_0 est appelée la pulsation de coupure, le gain en décibel de la FTBO pour cette pulsation est nul (ou le gain de la FTBO est égal à 1):

$$|FTBO(j\omega_0)|_{dB} = 0 \text{ dB} \quad \text{ou} \quad |FTBO(j\omega_0)| = 1$$

- Le système est stable si sa marge de gain ou sa marge de phase est positive.
- Le système est instable si sa marge de gain ou sa marge de phase est négative.
- Le système est à la limite de stabilité (oscillant) si sa marge de gain ou sa marge de phase est nulle.



M_G et $M_\phi < 0$: le système est instable

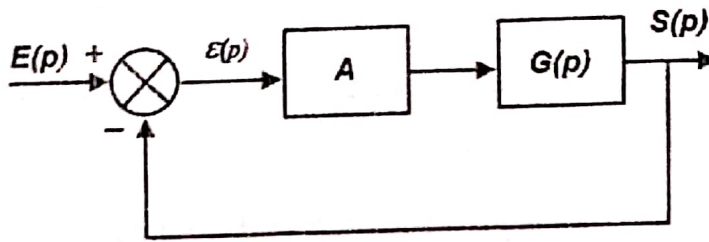


M_G et $M_\phi > 0$: le système est stable

Les marges de stabilité dans le plan de Bode

Application 12 :

Un asservissement est réalisé suivant le schéma ci-dessous :



Avec : $G(p) = \frac{2}{(1+0.1p)(1+0.01p)}$

- 1) Pour $A=1$, calculer la marge de phase du système. Le système est-il stable ?
- 2) Quelle est la valeur de A pour obtenir une marge de phase de 45° ?

$$FTBO(p) = AG(p) = \frac{2A}{(1+0.1p)(1+0.01p)}$$

$$\Rightarrow FTBO(j\omega) = \frac{2A}{(1+j0.1\omega)(1+j0.01\omega)}$$

$$= \frac{2A}{1-0.001\omega^2 + j0.11\omega}$$

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{2A}{\sqrt{(1-0.001\omega^2)^2 + (0.11\omega)^2}}$$

$$1) FTBO(p) = AG(p) = \frac{2}{(1+0.1p)(1+0.01p)}$$

$$\Rightarrow FTBO(j\omega) = \frac{2}{(1+j0.1\omega)(1+j0.01\omega)}$$

$$|FTBO(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(1-0.001\omega^2)^2 + (0.11\omega)^2}}$$

$$\angle FTBO(j\omega) = -\arctan\left(\frac{0.11\omega}{1-0.001\omega^2}\right)$$

Recherche ω_0 : $|FTBO(j\omega)| = 1$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(1-0.001\omega_0^2)^2 + (0.11\omega_0)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow (1-0.001\omega_0^2)^2 + (0.11\omega_0)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 10^{-6}\omega_0^4 + 10^{-3}\omega_0^2 - 3 = 0$$

on pose $\omega_0^2 = X \Rightarrow 10^{-6}X^2 + 10^{-3}X - 3 = 0$

$$X_1 = 288.77 \Rightarrow \omega_0 = 17 \text{ rad/s}$$

$$X_2 = -1.0383$$

$$Mp = \angle FTBO(j\omega_0) + 180^\circ = -\arctan\left(\frac{0.11\omega_0}{1-0.001\omega_0^2}\right) + 180^\circ$$

$$= -\arctan\left(\frac{0.11 \times 17}{1-0.001 \times 17^2}\right) + 180^\circ \approx 110^\circ > 0$$

Le système est stable

Application 13 :

On considère un système asservi dont la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$FTBO(p) = \frac{40}{p(1+p)(8+p)}$$

- 1) Calculer la marge de gain du système. Le système est-il stable ?

VIII. CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

VIII.1. Introduction

Les systèmes asservis peuvent présenter une précision insuffisante, une instabilité, un temps de réponse trop lent. Il est donc nécessaire d'intégrer un correcteur pour améliorer un ou plusieurs de ces paramètres.

VIII.2. Les principes d'analyse de la correction

On considère le système asservi représentée par la figure suivante :

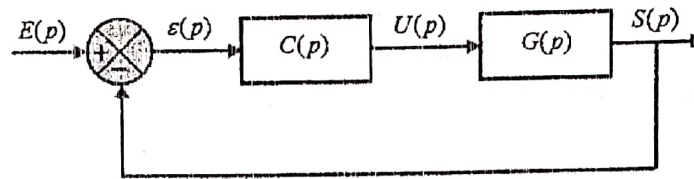
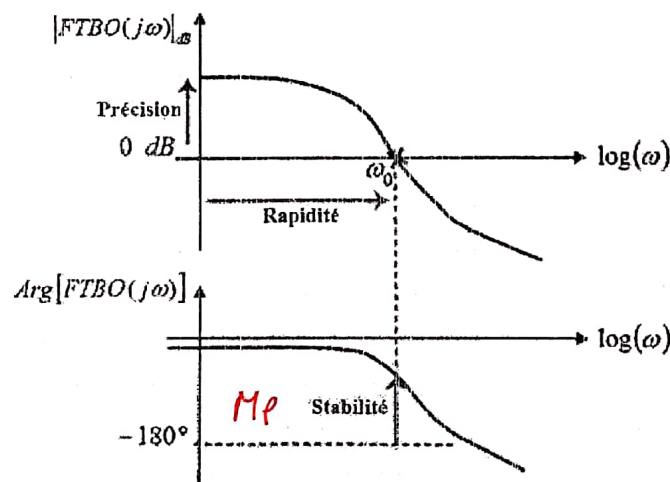


Schéma fonctionnel d'un système bouclé

Le problème est comment analyser un correcteur $C(p)$ tel que le système en boucle fermée réalise le meilleur compromis entre précision, stabilité et rapidité. Cette analyse sera effectuée en travaillant sur la réponse fréquentielle en BO dans le plan de Bode.



Evaluation de la précision, la stabilité et la rapidité dans le plan de Bode

- **La précision** : un système est d'autant plus précis que son gain en basses fréquences est plus élevé.
- **La stabilité** : un système est d'autant plus stable que sa marge de phase M_p est importante.
- **La rapidité** : un système est d'autant plus rapide que sa bande passante $[0; \omega_0]$ est plus grande (ω_0 est la pulsation de coupure).

VIII.2. Les différents types de correcteurs

VIII.2.1. Correcteur Proportionnel (P)

La sortie du correcteur $u(t)$ est proportionnelle à l'erreur $\varepsilon(t)$:

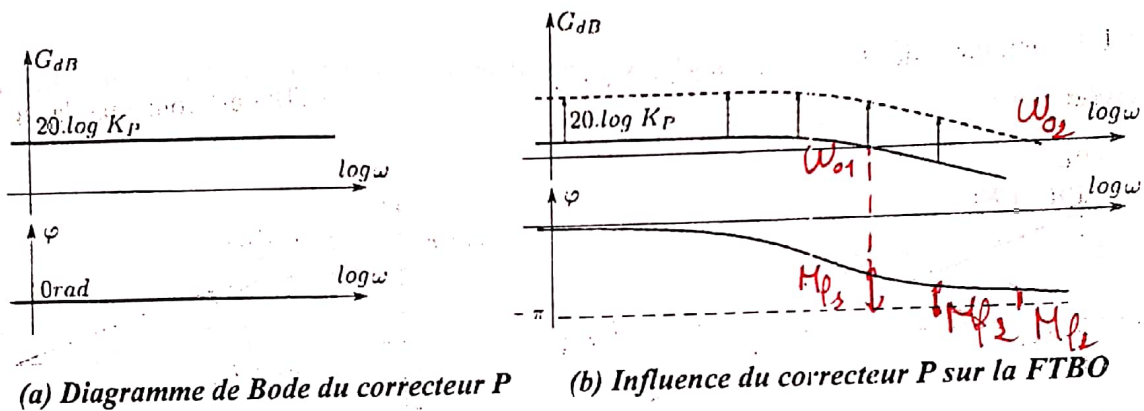
$$u(t) = K_p \varepsilon(t)$$

La fonction de transfert du correcteur proportionnel est alors :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p$$

Avec : K_p est le gain proportionnel

Le diagramme de Bode du correcteur P et son influence sur la FTBO est donné par la figure ci-dessous :



Ce correcteur proportionnel :

- augmente le gain de $20 \log(K_p)$ (lorsque $K_p > 1$)
- ne modifie pas la phase.

On remarque qu'au niveau du diagramme de Bode de la FTBO, le correcteur P engendre :

- une augmentation du gain en basses fréquences $\Rightarrow$ amélioration de la précision.
- une augmentation de ω_0 (élargissement de la bande passante) $\Rightarrow$ amélioration de la rapidité.
- une diminution de la marge de phase $\Rightarrow$ dégradation de la stabilité

$\Rightarrow$ Le correcteur proportionnel rend le système plus précis, plus rapide, mais moins stable.

VIII.2.2. Correcteur Intégral (I)

La sortie du correcteur $u(t)$ est proportionnelle à l'intégral de l'erreur $\varepsilon(t)$:

$$u(t) = K_I \int \varepsilon(t) dt = \frac{1}{T_I} \int \varepsilon(t) dt$$

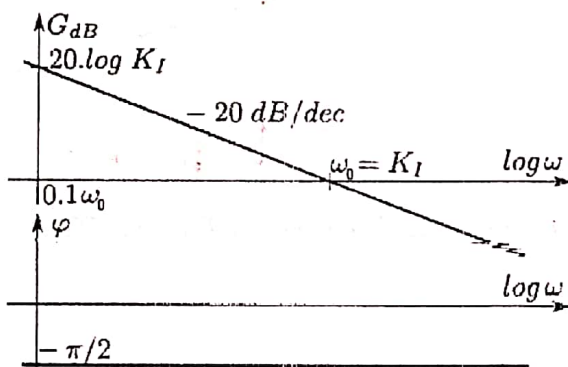
La fonction de transfert du correcteur est alors:

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_I}{p} = \frac{1}{T_I p}$$

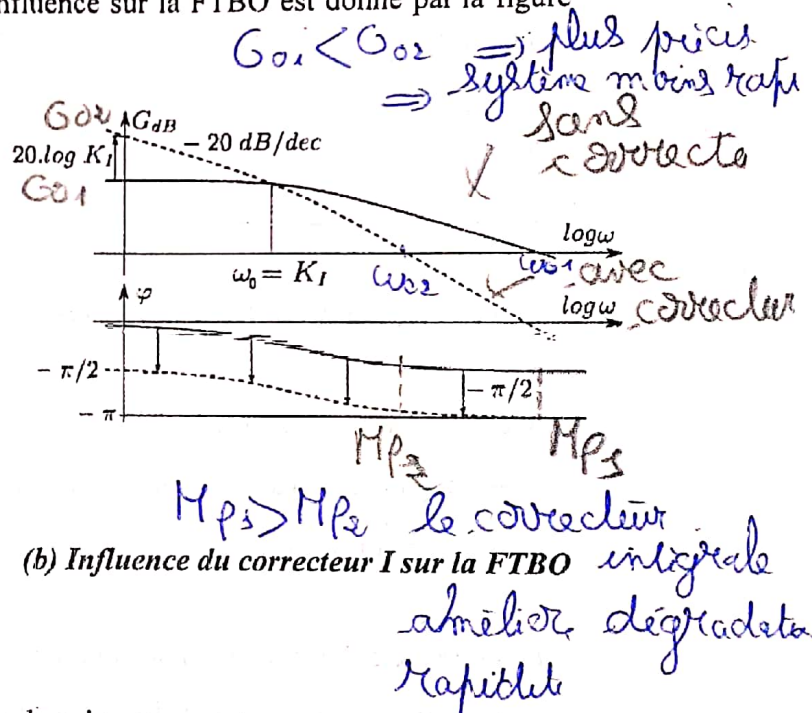
Avec :

- K_I : le gain intégral
- T_I : la constante de temps d'intégration

Le diagramme de Bode du correcteur I et son influence sur la FTBO est donné par la figure ci-dessous :



(a) Diagramme de Bode du correcteur I



(b) Influence du correcteur I sur la FTBO

Ce correcteur intégral:

- augmente le gain pour $\omega \ll K_I$ et diminue le gain pour $\omega \gg K_I$,
- diminue la phase de $\pi/2$

On remarque qu'au niveau du diagramme de Bode de la FTBO, le correcteur I engendre :

- une augmentation du gain en basses fréquences $\Rightarrow$ amélioration de la précision.
- une réduction de la marge de phase $\Rightarrow$ dégradation de la stabilité
- une diminution de ω_0 (diminution de la bande passante) $\Rightarrow$ dégradation de la rapidité.

$\Rightarrow$ Le correcteur intégral améliore que la précision, les autres performances sont dégradées.

VIII.2.3. Correcteur Proportionnel-Intégral (PI)

Le correcteur intégrateur (I) est en général associé au correcteur proportionnel (P). La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \int \varepsilon(t) dt$$

La fonction de transfert du correcteur est alors:

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_i}{K_p p} \right) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} \right) = K_p \left(\frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \right)$$

Avec :

- K_p : le gain proportionnel
- K_i : le gain intégral
- $T_i = \frac{K_p}{K_i}$: la constante de temps d'intégration

On peut démontrer que le correcteur PI, permet de rendre le système plus précis, plus rapide, mais moins stable.

VIII.2.4. Correcteur Proportionnel-Dérivateur (PD)

Le correcteur dérivateur (D) est en général associé au correcteur proportionnel (P). La loi de commande de ce correcteur est alors de la forme :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

La fonction de transfert du correcteur est donc:

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} p \right) = K_p (1 + T_d p)$$

Avec :

- K_p : le gain proportionnel
- K_d : le gain dérivé
- $T_d = \frac{K_d}{K_p}$: la constante du temps de dérivation

On peut démontrer que le correcteur PD peut améliorer la précision, la rapidité et la stabilité du système.

VIII.2.5. Correcteur Proportionnel-Intégrateur-Dérivateur (PID)

La loi de commande de ce correcteur est de la forme :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_I \int \varepsilon(t) dt + K_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

La fonction de transfert du correcteur est donc:

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left(1 + \frac{K_D}{K_p} p + \frac{K_I}{K_p} \frac{1}{p} \right) = K_p \left(1 + T_D \cdot p + \frac{1}{T_I \cdot p} \right)$$

Avec :

- K_p : le gain proportionnel
- K_D : le gain dérivé
- $T_D = \frac{K_D}{K_p}$: la constante du temps de dérivation
- $T_I = \frac{K_p}{K_I}$: la constante du temps d'intégration

On peut démontrer que le correcteur PID peut améliorer la précision, la rapidité et la stabilité du système.