

Examen de fin du premier semestre de Systèmes Techniques Automatisés

Partie Automatique

Dans ce sujet, on s'intéresse à l'asservissement en vitesse du mouvement de translation d'une base motorisée (Figure n°1) d'une plateforme mobile d'imagerie robotisée. Cette base est constituée :

- d'une structure support, ou châssis, composée du bras vertical et du cadre Y ;
- de deux sous-ensembles roue motrice et motorisation associée (un motoréducteur d'orientation et un motoréducteur de propulsion pour chaque roue) ;
- de deux doubles roues « folles » non motorisées.

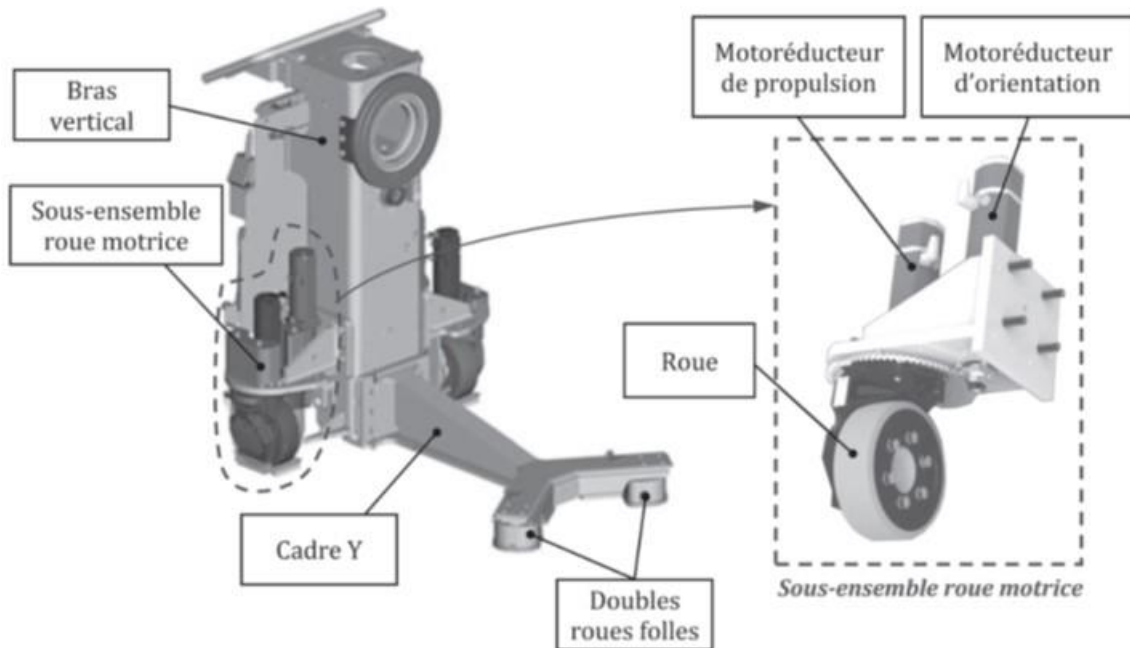


Figure n°1. Éléments de la base motorisée (BM)

Objectif : Vérifier les exigences, d'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la base motorisée, suivantes :

Performances	Valeurs souhaitées
Dépassement	Sans dépassement
Précision	Erreur statique nulle pour une entrée en échelon
Rapidité	Temps de réponse à $\pm 5\%$ inférieur à 2.5 s

Étude préliminaire : moteurs de propulsion

Hypothèses et modélisations :

- la base motorisée (BM) se déplace en ligne droite (consigne de vitesse $v_c(t)$, les roues étant dans la même direction que l'axe de symétrie de la BM) ;
- les roues motrices roulent sans glisser sur le sol ;
- la charge extérieure est supposée équi-répartie sur chacun des deux moteurs. Ainsi, pour une vitesse $v(t)$ de la plateforme, les deux moteurs de propulsion tournent à la même vitesse angulaire $\omega_m(t)$, sont alimentés par une même tension de commande $u(t)$ et fournissent un même couple moteur $c_m(t)$;
- les perturbations sont réparties sur chacun des axes des deux moteurs et sont modélisées par un même couple de perturbation équivalent appliqué sur chacun des axes moteurs $c_r(t)$;
- les caractéristiques inertielles de la plateforme sont représentées au niveau de chaque axe moteur par un moment d'inertie équivalent J_{eq} ;
- le comportement individuel d'un des deux moteurs peut être approché par celui d'un moteur à courant continu avec les équations électromécaniques suivantes :

$$(1) \quad u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e(t)$$

$$(2) \quad c_m(t) = k_c i(t)$$

$$(3) \quad e(t) = k_e \omega_m(t)$$

$$(4) \quad c_m(t) - c_r(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

Symbole	Désignation	Valeurs, unités
$u(t)$	Tension d'alimentation du moteur	[V]
$e(t)$	Tension contre-électromotrice dans un moteur	[V]
$i(t)$	Intensité du courant dans un moteur	[A]
$v(t)$	Vitesse de translation du système	[m/s]
$v_c(t)$	Consigne de vitesse de translation du système	[m/s]
$\omega_m(t)$	Vitesse angulaire de chacun des deux moteurs	[rad/s]
$c_m(t)$	Couple moteur appliqué par chacun des deux moteurs	[N.m]
$c_r(t)$	Couple de perturbation équivalent appliqué à chacun des deux axes moteurs	[N.m]
R	Résistance de l'induit d'un moteur	0,07 Ω
L	Inductance de l'induit d'un moteur	0,15mH
k_e	Constante de vitesse d'un moteur	0,113V/(rad/s)
k_c	Constante de couple d'un moteur	0,113(N.m)/A
J_{eq}	Inertie équivalente de la moitié du système ramenée sur l'axe d'un moteur	5,3 $\times 10^{-3}$ kg.m ²

On note $U(p)$, $E(p)$, $I(p)$, $V(p)$, $V_c(p)$, $\Omega_m(p)$, $C_m(p)$ et $C_r(p)$ les transformées de Laplace respectives de $u(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $v(t)$, $v_c(t)$, $\omega_m(t)$, $c_m(t)$ et $c_r(t)$.

1. En considérant des conditions initiales nulles, déterminer les transformées de Laplace des équations (1) à (4) du moteur. Compléter le schéma-bloc (Figure n°3) du document réponse (à rendre) par les transmittances manquantes.

2. Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert du moteur en poursuite

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \text{ (sans perturbation).}$$

Ecrire $H_1(p)$ sous sa forme canonique en fonction de R , L , k_e , k_c et J_{eq} .

3. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en régulation $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ (consigne nulle) en fonction de R , L , k_e , k_c et J_{eq} .

4. Déterminer l'expression de la sortie $\Omega_m(p)$ en fonction des entrées $U(p)$ et $C_r(p)$.

Le système est étudié en l'absence de perturbation, $c_r(t) = 0$

5. Réaliser l'application numérique de la fonction de transfert du moteur et mettre le résultat sous la forme $H_1(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$. En prenant $\tau_1 > \tau_2$, donner les valeurs de τ_1 , τ_2 et K_m .

Étude de l'asservissement en vitesse de la base motorisée

Pour une consigne de vitesse $v_c(t)$ [m/s], les microcontrôleurs de pilotage génèrent une tension de consigne de rotation à appliquer à chaque moteur $u_c(t)$ [V]. Un traitement numérique de la vitesse relevée sur l'axe de chaque moteur fournit une tension mesurée $u_m(t)$ [V], image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Un correcteur (défini par la suite) adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation $u(t)$ à appliquer aux moteurs.

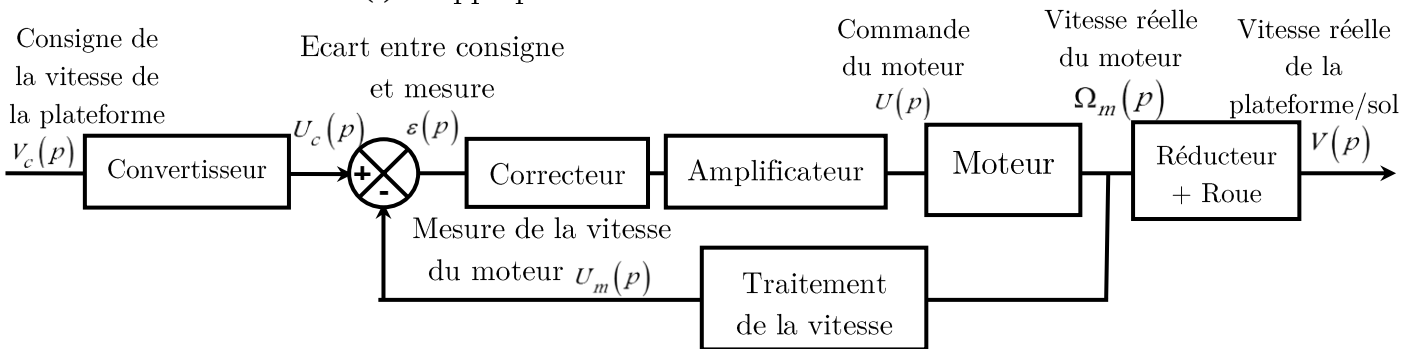


Figure n°2. Schéma de principe de l'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la BM

Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	K_{conv} (à déterminer)
Correcteur	$C(p)$ (réglé par la suite)
Amplificateur	$K_A = 7,9$ (sans unité)
Traitement numérique de la vitesse	$K_{vit} = 1,4 \times 10^{-3} V / (rad / s)$
Réducteur+roue	K_R (à déterminer)

Indépendamment des résultats trouvés précédemment, la fonction de transfert du moteur sera prise égale à :

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \text{ avec } K_m = 8,85, \tau_1 = 0.027s \text{ et } \tau_2 = 0.0023s$$

Le moteur est suivi d'un réducteur à deux étages : le premier avec un rapport de réduction $k_1 = 1/4$ et le second avec un rapport de réduction $k_2 = 1/28,9$. Le rayon des roues motrices est de $r = 0.115m$. Si on suppose qu'il y a roulement sans glissement de la roue sur le sol, on peut écrire $v(t) = r \cdot \omega_{roue}(t) = r \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \omega_m(t)$.

6. Déterminer la valeur numérique du gain K_R (ensemble réducteur et roue).
7. Compléter le schéma-bloc sur le document réponse (Figure n°4), en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles, ainsi que les signes du sommateur.
8. Déterminer l'expression de l'erreur $\varepsilon(p)$ en fonction de K_{conv} , K_{vit} , K_R , $V(p)$ et $V_c(p)$. En sachant que l'écart $\varepsilon(t)$ doit être nul lorsque la vitesse réelle de la BM $v(t)$ est égale à la vitesse de consigne $v_c(t)$, déduire K_{conv} (convertisseur) en fonction de K_{vit} et K_R .

Étude du système non corrigé : $C(p) = 1$ et en supposant que $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_R}$

9. Déterminer, en fonction de K_m , K_A , K_{vit} , τ_1 et τ_2 , l'expression de la fonction de transfert de la boucle de vitesse, notée $G(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)}$, sous la forme canonique d'un système du second ordre. Donner les expressions littérales et numériques du gain statique K , de la pulsation propre non amortie ω_n et du coefficient d'amortissement ξ .
10. Tracer l'allure de la réponse indicielle de constante v_0 en justifiant le régime.
11. À l'aide de l'abaque du document réponse Figure n°5, déterminer le temps de réponse à $\pm 5\%$ de la boucle de vitesse (faire apparaître les tracés sur le document réponse).
12. Déterminer l'erreur en régime permanent $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon d'amplitude v_0 . La commande du système sans correction permet-elle de satisfaire les exigences fixées ?

Étude du système corrigé par $C(p) = K_i \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

13. Déterminer, en fonction de K_i , K_m , K_A , K_{vit} et T_i , l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte sous la forme suivante : $H_{BO}(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K_{BO}(1 + T_i p)}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$.
14. Déduire la classe α et l'expression littérale de K_{BO} .
15. On choisit T_i de façon à compenser (simplifier) le "mode le plus lent". Donner la valeur de T_i ainsi que la nouvelle expression de $H_{BO}(p)$.
16. Déterminer l'erreur en régime permanent $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$ de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon d'amplitude v_0 . Ce correcteur permet-il de répondre à l'exigence de précision ?
17. La Figure n°6 du document réponse présente la réponse à une consigne en échelon d'amplitude $0,3m/s$ obtenue pour $K_i = 0.2$. Déduire graphiquement le temps de réponse à $\pm 5\%$. Conclure vis-à-vis le respect des exigences.

Nom
 Prénom
 Groupe
 ✂

Document réponse d'Automatique

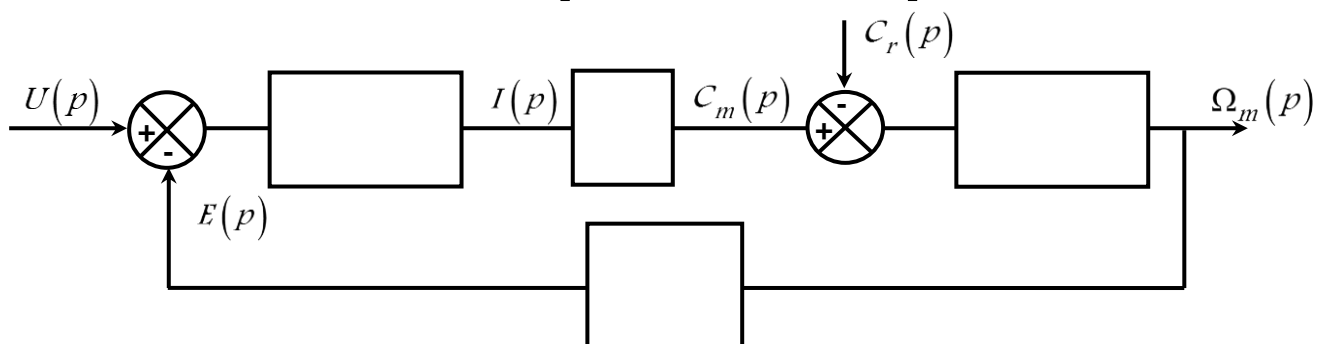


Figure n°3. Schéma-bloc d'un moteur de propulsion

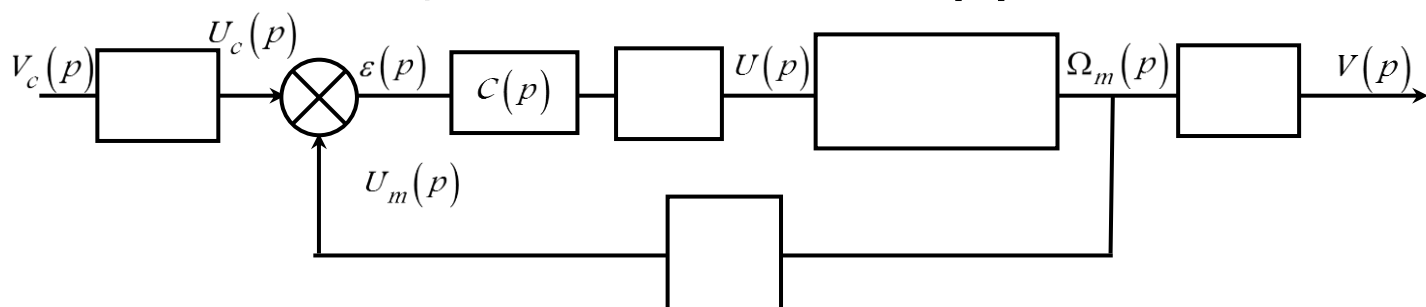


Figure n°4. Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse du mouvement de translation de la BM

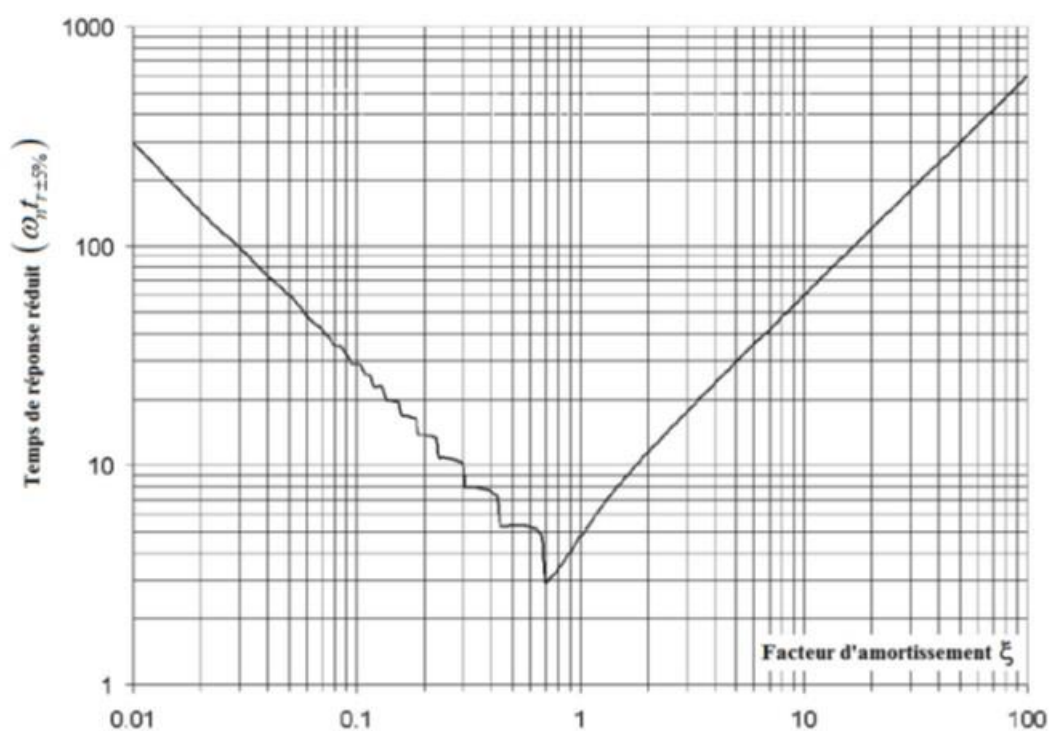


Figure n°5. Abaque du temps de réponse réduit $(\omega_n t_{r\pm 5\%})$ d'un système du second ordre

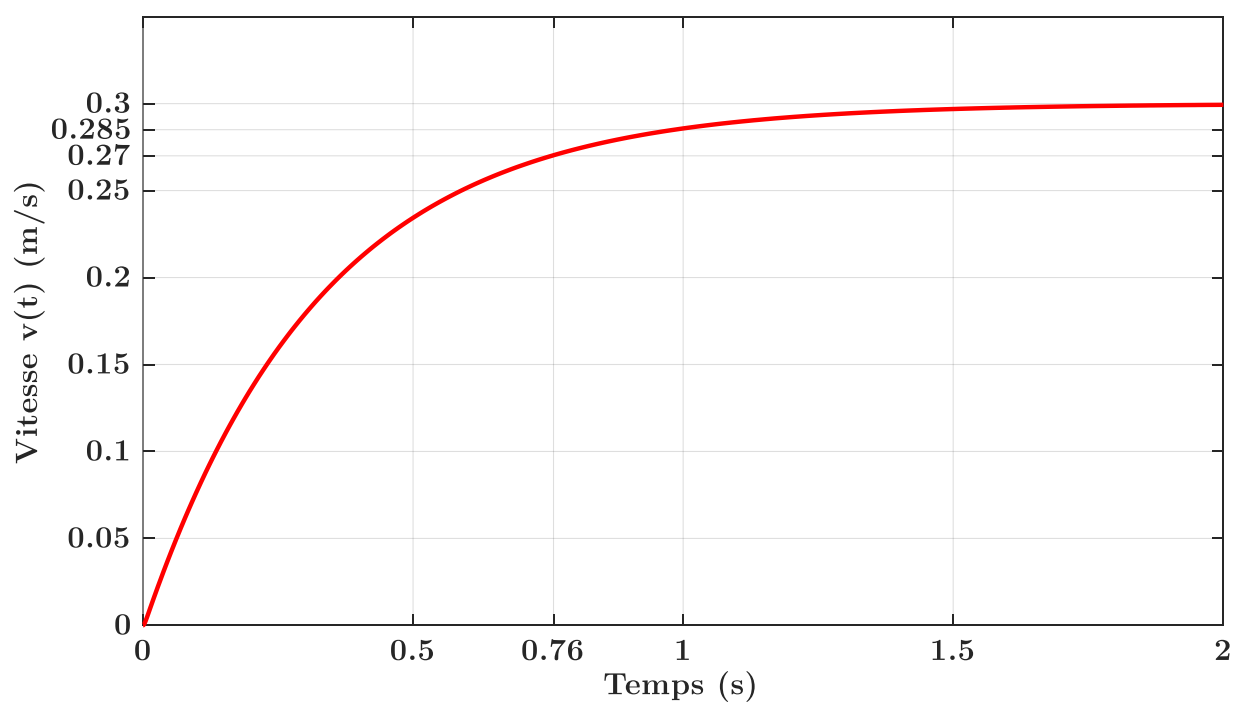
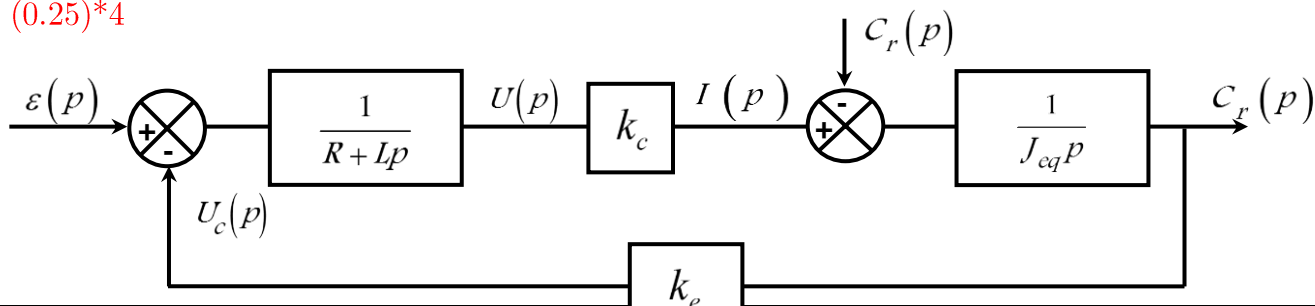


Figure n°6. Réponse indicielle à une consigne d'amplitude 0,3m/s pour $K_i = 0.2$

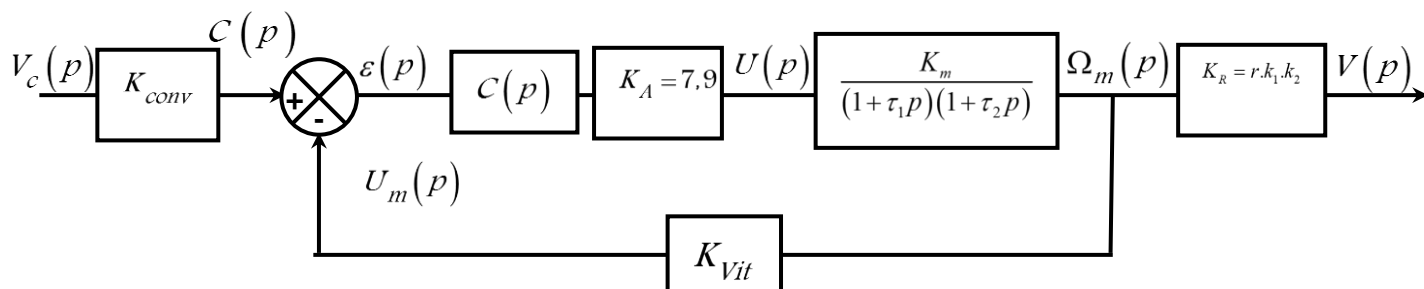
1.	$U(p) = (R + Lp)I(p) + E(p)$	(1)	$C_m(t) = k_c I(p)$	(0.25)
		(2)		(0.25)
	$E(p) = k_e \Omega_m(p)$	(3)		(0.25)
	$C_m(p) - C_r(p) = J_{eq} p \Omega_m(p)$	(4)		(0.25)

(0.25)*4

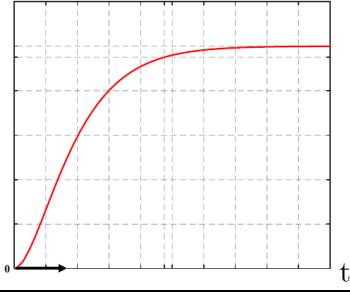


2.	$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{k_c}{J_{eq} p (R + Lp) + k_c \cdot k_e} = \frac{1/k_e}{\frac{LJ_{eq}}{k_e k_c} p^2 + \frac{RJ_{eq}}{k_e k_c} p + 1}$	1
3.	$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{(R + Lp)}{J_{eq} p (R + Lp) + k_c \cdot k_e} = -\frac{\frac{R}{k_e k_c} \left(1 + \frac{L}{R} p\right)}{\frac{LJ_{eq}}{k_e k_c} p^2 + \frac{RJ_{eq}}{k_e k_c} p + 1}$	1
4.	$\Omega_m(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)C_r(p) = \frac{\frac{1}{k_e} U(p) - (R + Lp)C_r(p)}{J_{eq} p (R + Lp) + k_c \cdot k_e}$	1
5.	$H_1(p) = \frac{8,85}{62,26 \times 10^{-6} p^2 + 29 \times 10^{-3} p + 1} = \frac{8,85}{62,26 \times 10^{-6} (p + 428,28)(p + 37,5)}$ $H_1(p) = \frac{8,85}{(0,0023p + 1)(0,026p + 1)}$ avec $\tau_1 = 0,026s$ ou $0,027s$ et $\tau_2 = 0,0023s$	1 1
6.	$V(p) = r \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \Omega_m(p) = K_R \cdot \Omega_m(p)$ donc $K_R = r \cdot k_1 \cdot k_2 = 115 \times 10^{-3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{28,9} = 9,95 \times 10^{-4} m \cdot rad^{-1}$	1

7. (0.25)*5



8.	$\varepsilon(p) = K_{conv} V_c(p) - K_{vit} \Omega_m(p) = K_{conv} V_c(p) - K_{vit} \frac{V(p)}{K_R} = 0 \Rightarrow K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_R} = 1,407 V \cdot m^{-1} \cdot s$	1
----	---	---

9.	$G(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{conv} K_A K_m K_R}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + K_A K_m K_{Vit}} = \frac{K_{Vit} K_A K_m}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) + K_A K_m K_{Vit}}$ $G(p) = \frac{\frac{K_{Vit} K_A K_m}{1 + K_A K_m K_{Vit}}}{\frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_A K_m K_{Vit}} p^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A K_m K_{Vit}} p + 1}$ $\begin{cases} K = \frac{K_{Vit} K_A K_m}{1 + K_A K_m K_{Vit}} = 89,15 \times 10^{-3} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{1 + K_A K_m K_{Vit}}{\tau_1 \tau_2}} = 133 \text{ rad / s} \\ \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2} \sqrt{1 + K_A K_m K_{Vit}}} = 1,77 \end{cases}$	1 0.5 0.5 0.5
10.	$v(t)$ Avec $v(\infty) = v_0 K$ RA car $\xi > 1$ 	1
11.	$T_{r_{\pm 5\%}} = \frac{10}{\omega_n} = 0.075 \text{ s}$	1
12.	$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_{conv} v_0}{1 + \frac{K_A K_m K_{Vit}}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}} \text{ donc } \varepsilon(\infty) = \frac{K_{conv} v_0}{1 + K_{Vit} K_m K_A} \neq 0$ la précision n'est pas respectée, rapidité respectée et réponse sans dépassement	1
13.	$H_{BO}(p) = \frac{U_m(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{C(p) K_A K_m K_{Vit}}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{K_i K_A K_m K_{Vit} (1 + T_i p)}{T_i p (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$	1
14.	$\Rightarrow K_{BO} = \frac{K_i K_A K_m K_{Vit}}{T_i} \text{ (0.5) et } \alpha = 1 \text{ (0.25)}$	0.75
15.	$T_i = \tau_1 = 0.027 \text{ s}$ C'est la constante de temps la plus élevée donc qui correspond au système le plus lent. $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_2 p)}$	1
16.	$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_{conv} v_0}{1 + \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_2 p)}} = 0 \text{ Erreur nulle donc performance respectée}$	0.5
17.	$T_{r_{\pm 5\%}} = 1 \text{ s}$ ce correcteur respecte bien les performances	1