

Université de Sfax ★★★★★ Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Sfax		Année Universitaire : 2025 – 2026 ★★★★★ Sections : MP2 – PC2 – PT2
Semestre 1		Date : 16/12/2025
Examen d'Automatique		

Régulation d'un four électrique industriel

Un four électrique industriel doit maintenir une température constante de 120 °C pour certains types de pièces. La stabilité thermique est assurée par des résistances chauffantes commandées par un régulateur. Ce dernier ajuste en continu la boucle de régulation pour garantir une réponse précise et rapide.

Partie I — Modélisation du four

Le four est chauffé par une résistance électrique alimentée par une tension $u(t)$. La température interne du four est notée $\theta(t)$ et la température ambiante est $\theta_a(t)$. Le comportement thermique est régi par les lois suivantes :

- La puissance thermique fournie par la résistance est :

$$q(t) = \alpha_0 u(t) \quad (1)$$

où $\alpha_0 = 8 \text{ W/V}$ est le gain de conversion tension-puissance.

- Les pertes thermiques vers l'extérieur sont :

$$q_{\text{pertes}}(t) = \alpha_1 \theta(t) + \alpha_2 \theta_a(t) \quad (2)$$

où $\alpha_1 = 4 \text{ W/}^\circ\text{C}$ est le coefficient de pertes côté température du four et $\alpha_2 = 0.4 \text{ W/}^\circ\text{C}$ est coefficient de pertes côté température ambiante.

- La dynamique thermique du four suit une équation d'équilibre énergétique :

$$C \frac{d\theta(t)}{dt} = q(t) - q_{\text{pertes}}(t) \quad (3)$$

où $C = 800 \text{ J/}^\circ\text{C}$ est la capacité thermique équivalente du four.

1. Montrer que l'équation reliant $\theta(t)$ et $u(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\tau \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = K u(t) - K_a \theta_a(t). \text{ Exprimer } \tau, K \text{ et } K_a \text{ en fonction de } C, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2.$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, le comportement dynamique du four peut être modélisé dans le domaine de Laplace par la relation suivante :

$$\theta(p) = G(p)U(p) - G_a(p)\theta_a(p).$$

2. Déterminer les fonctions de transfert $G(p)$ et $G_a(p)$.

3. Déterminer la valeur finale de la température $\theta(\infty)$ pour des entrées sous forme d'échelons $u(t) = 250 \Gamma(t)$ et $\theta_a(t) = 20 \Gamma(t)$, où $\Gamma(t)$ est la fonction de Heaviside.

4. Tracer, sans calcul, la réponse à un échelon unitaire sur la tension de chauffe en absence de température ambiante. Placer les paramètres K et τ sur la réponse.

Partie II — Régulation du four

On suppose désormais que la perturbation $\theta_a(t)$ est nulle. Le schéma-bloc de la régulation de température du four est représenté sur la figure 1.

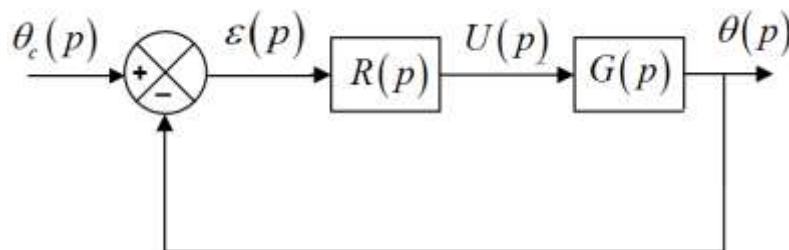


Figure 1 – Schéma-bloc de la régulation de température du four

La fonction de transfert du four est prise sous la forme : $G(p) = \frac{2}{1+200p}$

Le cahier des charges doit respecter les contraintes suivantes :

- La fonction de transfert en boucle fermée doit être du premier ordre.
- Le système bouclé doit être 4 fois plus rapide que le système sans régulateur
- L'erreur statique à une consigne en échelon de 120°C doit être nulle.

5. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_0(p)$ sans régulateur ($R(p)=1$). En déduire le temps de réponse à 5 %, noté T_{R0} .

On utilise d'abord un régulateur de type proportionnel : $R(p) = K_1$.

6. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_1(p)$. Exprimer sa constante de temps τ_1 et son gain statique A_1 en fonction de K_1 .
7. Calculer en fonction de K_1 le temps de réponse à 5 %, noté T_{R1} . Déduire la valeur de K_1 pour que le système bouclé soit 4 fois plus rapide que le système sans régulateur.
8. Calculer en fonction de K_1 l'erreur statique $\varepsilon(\infty)$ pour une consigne en échelon de 120°C . Déduire sa valeur numérique pour la valeur de K_1 déterminée à la question 7.
9. Ce régulateur proportionnel permet-il de satisfaire le cahier des charges ? Justifier.

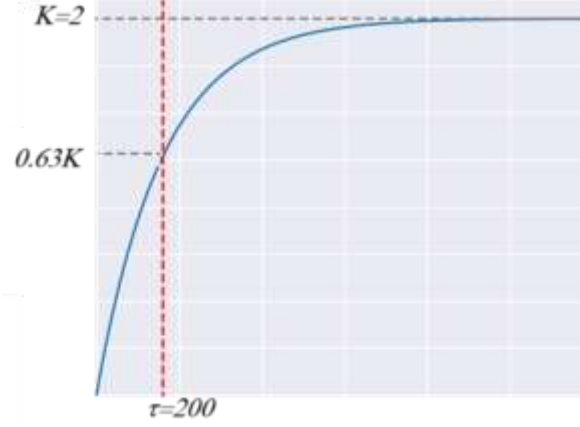
On utilise maintenant un régulateur de type intégral : $R(p) = \frac{K_2}{p}$.

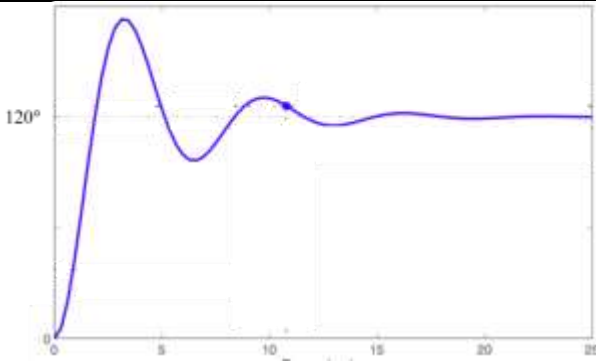
10. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_2(p)$.
11. Quel est l'ordre de ce système ? Donner en fonction de K_2 son gain statique A , sa pulsation propre non amortie ω_n et son facteur d'amortissement ξ .
12. Déterminer la valeur de K_2 permettant d'obtenir la réponse la plus rapide. En déduire le temps de réponse à 5 %, noté T_{R2} .
13. Calculer l'erreur statique $\varepsilon(\infty)$ pour une consigne en échelon de 120°C .
14. Tracer, sans calcul, la réponse à un échelon de consigne de 120° . Préciser les valeurs de $\theta(0)$ et $\theta(\infty)$ sur la réponse.
15. Ce régulateur intégral permet-il de satisfaire le cahier des charges ? Justifier.

Soit finalement un régulateur proportionnel-intégral : $R(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$.

16. Déterminer la valeur de τ_i permettant d'obtenir en boucle fermée une fonction de transfert du premier ordre $H_3(p) = \frac{A_3}{1 + \tau_3 p}$. Déduire A_3 et τ_3 en fonction de K_i .
17. Avec ce réglage pour τ_i , déterminer le gain K_i afin de respecter la contrainte du cahier des charges sur la rapidité.
18. Calculer l'erreur statique $\varepsilon(\infty)$ pour une consigne en échelon de 120°C .
19. Ce régulateur permet-il de satisfaire le cahier des charges ? Justifier.

Correction et Barème

1	$\frac{C}{\alpha_1} \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} u(t) - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \theta_a(t)$ $\tau = \frac{C}{\alpha_1} = 200; \quad K = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = 2; \quad K_a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0.1$	0.5x4
2	$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} \Big _{\theta_a(p)=0} = \frac{K}{1+\tau p} = \frac{2}{1+200p}$ $G_a(p) = \frac{-\theta(p)}{\theta_a(p)} \Big _{U(p)=0} = \frac{K_a}{1+\tau p} = \frac{0.1}{1+200p}$	0.5 0.5
3	$\theta(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p\theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{2}{1+200p} \times \frac{250}{p} - \frac{0.1}{1+200p} \times \frac{20}{p} \right] = 500 - 2 = 498^\circ\text{C}$	1
4		1
5	$H_0(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)} = \frac{\frac{2}{1+200p}}{1+\frac{2}{1+200p}} = \frac{2}{3+200p} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{200}{3}p} \Rightarrow K_0 = \frac{2}{3}; \quad \tau_0 = \frac{200}{3}$ $T_{R0} = 3\tau_0 = 200$	0.5 0.5
6	$H_1(p) = \frac{R(p)G(p)}{1+R(p)G(p)} = \frac{\frac{2K_1}{1+200p}}{1+\frac{2K_1}{1+200p}} = \frac{2K_1}{1+2K_1+200p} = \frac{\frac{2K_1}{1+2K_1}}{1+\frac{200}{1+2K_1}p}$ $A_1 = \frac{2K_1}{1+2K_1}; \quad \tau_1 = \frac{200}{1+2K_1}$	0.5x3
7	$T_{R1} = 3\tau_1 = \frac{600}{1+2K_1}$ $T_{R1} = \frac{600}{1+2K_1} = \frac{T_{R0}}{4} = 50 \Rightarrow K_1 = 5.5$	0.5 0.5

8	$\varepsilon(\infty) = \theta_c(\infty) - \theta(\infty) = \theta_c(\infty) - A_1 \theta_c(\infty) = 120 - \frac{2K_1}{1+2K_1} \times 120 = \frac{120}{1+2K_1}$ Pour $K_1 = 5.5$; $\varepsilon(\infty) = 10$	0.5 0.5
9	Le critère précision n'est pas respecté.	0.5
10	$H_2(p) = \frac{R(p)G(p)}{1+R(p)G(p)} = \frac{\frac{K_2}{p} \cdot \frac{2}{1+200p}}{1 + \frac{K_2}{p} \cdot \frac{2}{1+200p}} = \frac{2K_2}{200p^2 + p + 2K_2}$	0.5
11	$H_2(p) = \frac{1}{\frac{100}{K_2} p^2 + \frac{1}{2K_2} p + 1}$ 2^{ème} ordre; $A=1$; $\omega_n = \frac{\sqrt{K_2}}{10}$; $\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{2K_2} \Rightarrow \xi = \frac{\omega_n}{4K_2} = \frac{1}{40\sqrt{K_2}}$	0.5x4
12	$\xi = \frac{1}{40\sqrt{K_2}} = 0.7 \Rightarrow K_2 = 12.75 \cdot 10^{-4}$ $T_{R2} = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.7 \times 0.00356} = 1205$	0.5 0.5
13	$\varepsilon(\infty) = \theta_c(\infty) - \theta(\infty) = \theta_c(\infty) - A\theta_c(\infty) = 0$	0.5
14	 $\theta(0) = 0$; $\theta(\infty) = 120^\circ$	1
15	Les critères 1 ^{er} ordre et rapidité ne sont pas respectés.	0.5
16	$H_3(p) = \frac{R(p)G(p)}{1+R(p)G(p)} = \frac{K_i \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \cdot \frac{2}{1+200p}}{1 + K_i \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \cdot \frac{2}{1+200p}}$ Si on prend $\tau_i = 200$, alors $H_3(p) = \frac{K_i \frac{1}{200p} \cdot 2}{1 + K_i \frac{1}{200p} \cdot 2} = \frac{2K_i}{2K_i + 200p} = \frac{1}{1 + \frac{100}{K_i} p}$	1

	$A_3 = 1; \tau_3 = \frac{100}{K_i}$	0.5x2
17	$T_{R3} = 3\tau_3 = \frac{300}{K_i} = \frac{T_{R0}}{4} = 50 \Rightarrow K_i = 6$	1
18	$\varepsilon(\infty) = \theta_c(\infty) - \theta(\infty) = \theta_c(\infty) - A_3\theta_c(\infty) = 0$	1
19	Toutes les performances sont respectées.	0.5