

Partie C : Automatique

Dans cette partie on s'intéresse à l'asservissement de l'angle de braquage de la roue arrière du véhicule. Pour des raisons de simplification, notre étude concernera un prototype de véhicule d'essai en se limitant à des conditions particulières de roulage. La figure n° C1 montre la représentation fonctionnelle simplifiée de l'asservissement de position de l'angle de braquage $\beta(t)$.

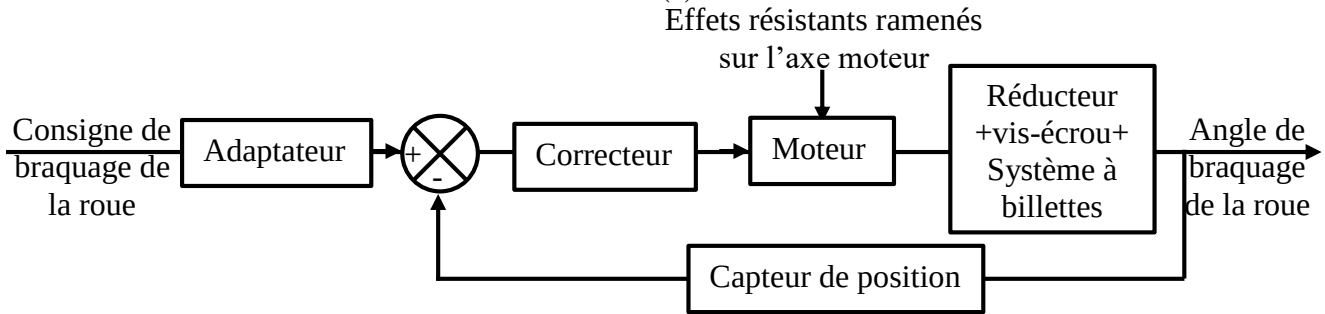


Figure n° C1. Schéma fonctionnel de l'asservissement de l'angle de braquage

La consigne $\beta_c(t)$ est générée par le calculateur du système et l'actionneur braque les roues à travers la transmission mécanique. Les qualités désirées par le cahier des charges sont indiquées dans le tableau suivant :

Tableau n° C1. Extrait du cahier des charges

Rapidité	Temps de réponse à 5% $t_{r5\%} \leq 0,2s$
Dépassement de la consigne	$\leq 3\%$
Précision	Erreur statique de position nulle
Stabilité	Marge de phase : 60° au moins

On donne les relations suivantes

- La vitesse de déplacement de la tige du vérin $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ avec $x(t)$: variable de déplacement de la tige.
- Le rapport de transmission de l'ensemble réducteur et système vis-écrou : $\frac{v(t)}{\omega_m(t)} = q.n$ où 'q' est le pas réduit de la vis et 'n' le rapport des vitesses du réducteur.
- La fonction de transfert du capteur est un gain pur égal à K_1 (constante positive).
- La fonction de transfert de l'adaptateur de consigne est un gain pur égal à K_a (constante positive).
- On admet la relation de linéarité entre le déplacement de la tige et l'angle de braquage $\beta(t)$ de la roue : $x(t) = a.\beta(t)$ (avec a : constante positive).

Pour toute fonction $f(t)$ on pose $F(p)$ sa transformée de Laplace et toutes les conditions initiales des valeurs temporelles sont supposées nulles. On notera $h(t)$ la fonction de Heaviside (= 1 pour $t > 0$ et 0 sinon). La modélisation adoptée abouti au schéma de la figure n° C2.

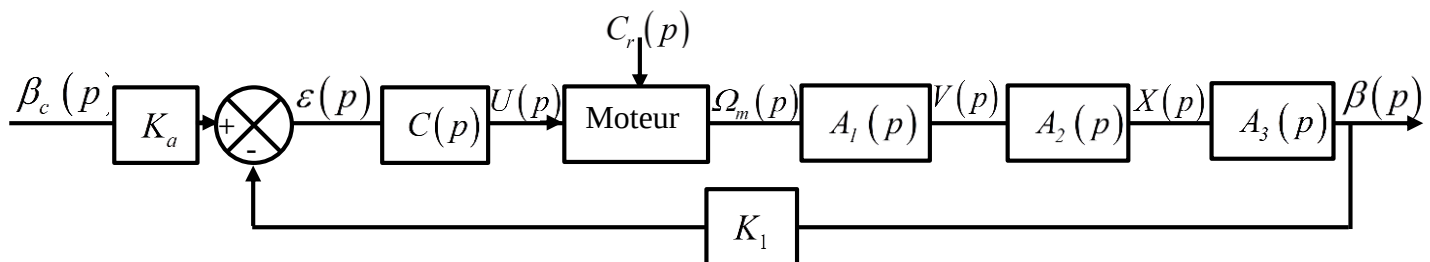


Figure n° C2. Modélisation retenue pour l'asservissement de $\beta(t)$

- C1.** En appliquant la transformée de Laplace sur les équations temporelles données précédemment, donner les fonctions de transferts $A_1(p)$, $A_2(p)$ et $A_3(p)$ indiquées sur le schéma de la figure n°C2.
- C2.** Déterminer la valeur de K_1 , à adopter pour l'asservissement, afin d'avoir une erreur nulle ($\varepsilon=0$) lorsque la réponse atteint la consigne (avec $c_r=0$).

Modélisation du moteur à courant continu :

On représente sur la figure n°C3, le moteur par un schéma fonctionnel.

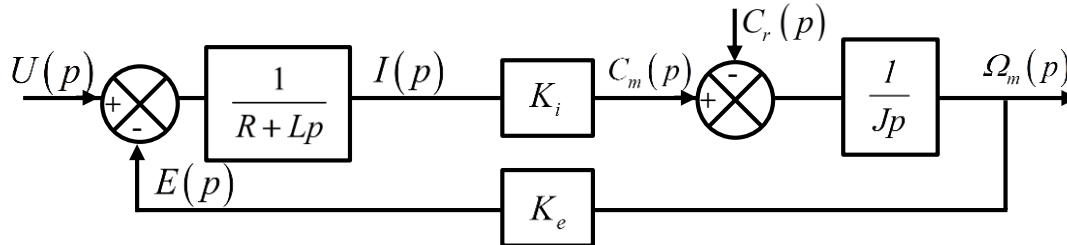


Figure n° C3. Schéma fonctionnel du moteur

On donne, ci-après, les variables du moteur.

$u(t)$: Tension d'alimentation	R : Résistance de l'induit
$i(t)$: Courant du moteur	L : Inductance de l'induit
$\omega_m(t)$: Vitesse de rotation du moteur	K_e : Constante de f.c.é
$c_m(t)$: Couple moteur	K_i : Constante de couple
$c_r(t)$: Couple résistant	J : Moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre du moteur de l'ensemble
$e(t)$: Force contre électromotrice	

On pose $\Omega_m(p) = H_u(p).U(p) - H_c(p).C_r(p)$

- C3.** Déterminer les expressions des fonctions de transferts $H_u(p)$ et $H_c(p)$ en fonction des paramètres du moteur, puis les mettre sous formes canonique en indiquant, pour chacune d'elle, l'ordre, la classe et le gain statique.

Pour la suite on négligera l'inductance du moteur qui sera représenté par le schéma de la figure n° C4.

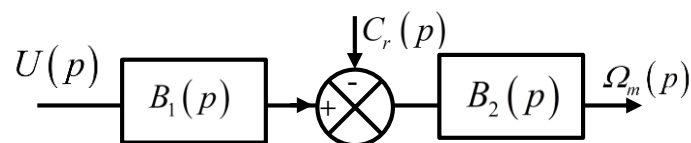


Figure n° C4. Schéma fonctionnel du moteur

- C4.** Déterminer les fonctions de transfert $B_1(p)$ et $B_2(p)$ en fonction de $H_u(p)$ et $H_c(p)$, puis en fonction des paramètres du moteur.

En considérant la perturbation $c_r(t)=0$ et après la simplification effectuée (inductance négligée) sur la fonction $H_u(p)$, on donne sur la figure n° C6, la réponse indicielle de la fonction $H_u(p)$ simplifiée suite à une tension d'alimentation de 12 (Volts).

- C5.** Identifier les paramètres de la fonction $H_u(p)$ puis donner son expression.

Le schéma de l'asservissement global de la figure n° C2 est alors transformé en une chaîne bouclée à retour unitaire représenté par la figure n° C5.

- C6.** En utilisant la figure n° C2, donner les expressions de A et $H_m(p)$ en fonction K_a , $A_1(p)$, $A_3(p)$, $B_1(p)$ et $B_2(p)$, puis donner les expressions de K_m et T_m en fonction des paramètres du système.

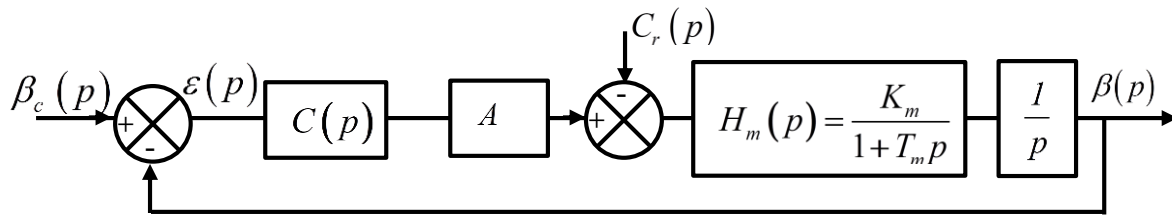


Figure n° C5. Schéma fonctionnel à retour unitaire

On donne pour la suite : $A = 20$, $K_m = 0.2 \text{ (rd.s}^{-1}\text{N}^{-1}\text{m}^{-1}\text{)}$ et $T_m = 0.04\text{s}$

On considère un correcteur proportionnel : $C(p) = K_p$

On pose $\beta(p) = H_1(p) \cdot \beta_c(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$

- C7.** Ecrire, en fonction de K_p , les expressions de $H_1(p)$ et $H_2(p)$ puis les mettre sous formes canoniques et donner les expressions de la pulsation propre non amortie ω_n et le facteur d'amortissement ξ .
- C8.** Pour $c_r(t) = 0$, donner en le justifiant l'erreur statique de position suite à une consigne d'amplitude β_0 .
- C9.** Déterminer, en fonction de K_p , l'expression de l'erreur statique de position $\varepsilon_{1p}(\infty)$ pour une consigne $\beta_c(t) = \beta_0 \cdot h(t)$ et une perturbation $c_r(t) = C_0 \cdot h(t)$ (β_0 et C_0 sont des constantes).
- C10.** Pour $c_r(t) = 0$, déterminer la valeur de K_p pour avoir une réponse la plus rapide. En déduire le temps de réponse à 5% noté $t_{r5\%}$ ainsi que le dépassement noté $D_{1\%}$. (utiliser la relation $t_{r5\%} \cdot \omega_n = 3$ valable uniquement pour cette question).
- C11.** Donner, en fonction de K_p , la fonction de transfert en boucle ouverte $G_1(p)$.

On donne sur la figure n° C7, les diagrammes de Bode de $G_1(p)$ pour $K_p = 1$ et pour K_p calculer dans la question C10.

- C12.** Déterminer graphiquement, la marge de gain et la marge de phase dans les deux cas (donner les tracés).
- C13.** La correction proportionnelle permet-elle de satisfaire le cahier des charges ?

On considère maintenant le correcteur proportionnel intégral $C(p) = K_c \frac{1 + T_c \cdot p}{T_c \cdot p}$

On donne : $T_c = 0.56\text{s}$, $K_m = 0.2 \text{ (rd.s}^{-1}\text{N}^{-1}\text{m}^{-1}\text{)}$ et $T_m = 0.04\text{s}$

- C14.** Déterminer, en fonction de K_c , la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte, notée $G_2(p)$.
- C15.** Déterminer l'erreur statique de position $\varepsilon_{2p}(\infty)$ pour $\beta_c(t) = \beta_0 \cdot h(t)$ et $c_r(t) = C_0 \cdot h(t)$ (β_0 et C_0 sont des constantes).
- On donne sur la figure n° C8, les diagrammes de Bode de $G_2(p)$ pour $K_p = 1$.
- C16.** Déterminer graphiquement la valeur K_{c60} qui permet d'avoir une marge de phase de 60° .
- C17.** On donne sur la figure n° C9 la réponse indicielle du système corrigé avec la valeur de K_{c60} . Déterminer le temps de réponse $t_{r5\%}$ et le premier dépassement $D_{1\%}$.
- C18.** Ce correcteur permet-il de satisfaire le cahier des charges ?

On pose maintenant $K_c = 2.6$ et $T_c = 7.8$. La réponse indicielle du système corrigé par ce dernier correcteur et les diagrammes de Bode de la FTBO sont données, respectivement, par les figures n° C10 et C11.

- C19.** Déterminer le temps de réponse $t_{r5\%}$, le premier dépassement $D_{1\%}$ et la marge de phase (donner les tracés sur le document à rendre).
- C20.** Conclure quant au respect du cahier des charges.

Document à rendre avec les tracés demandés

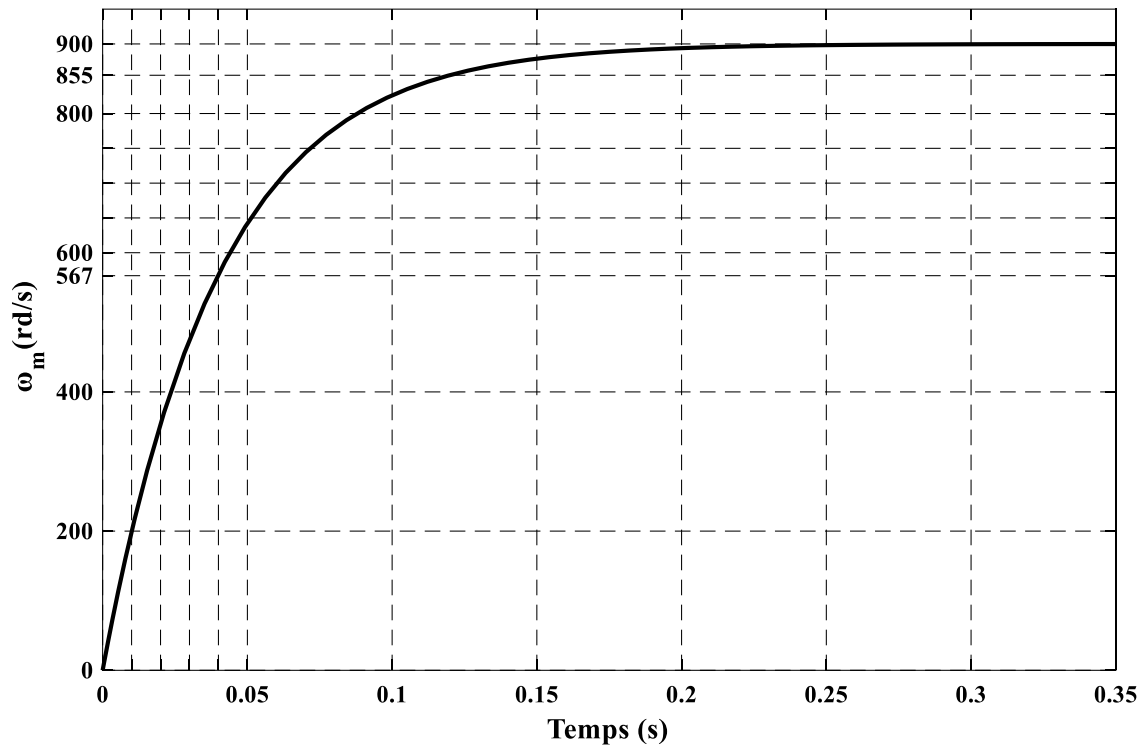


Figure n° C6. Réponse indicielle à un échelon de constante 12 (Volts) de la fonction $H_u(p)$

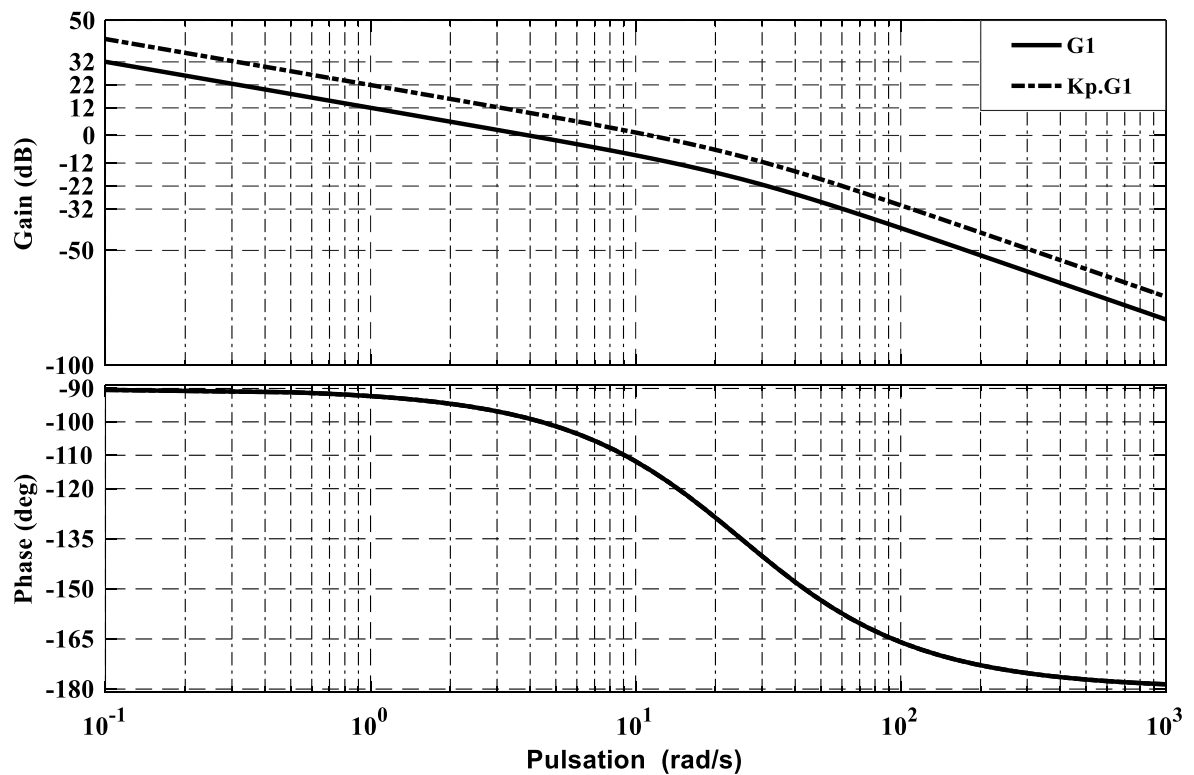


Figure n° C7. Diagrammes de Bode de $G_1(p)$ pour $K_p = 1$

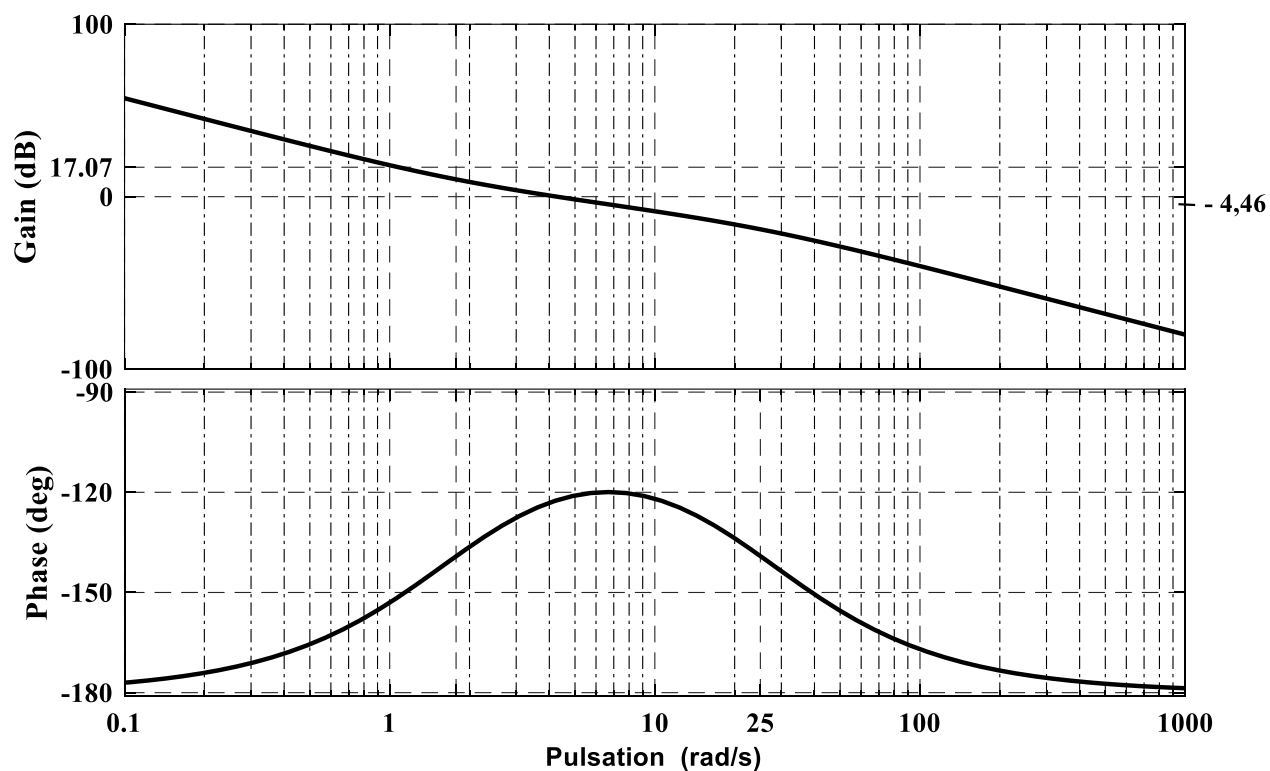


Figure n° C8. Diagrammes de Bode de $G_2(p)$ pour $K_p = 1$

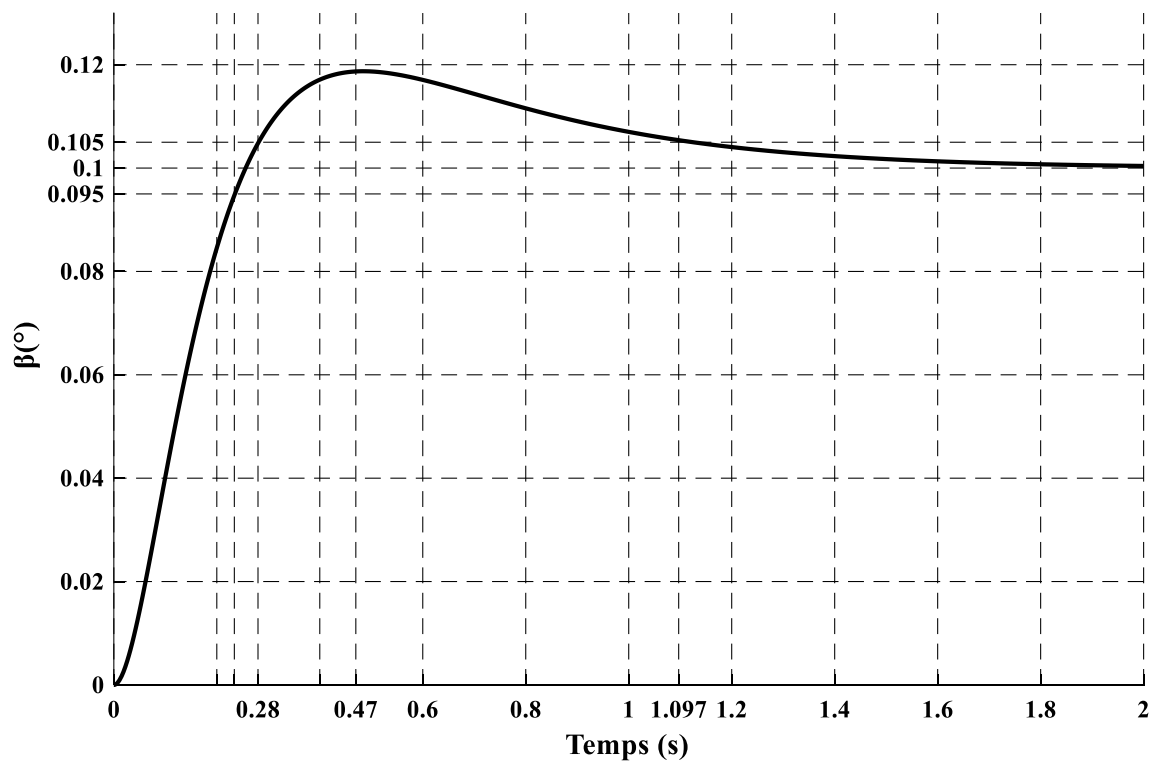


Figure n° C9. Réponse indicielle du système corrigé

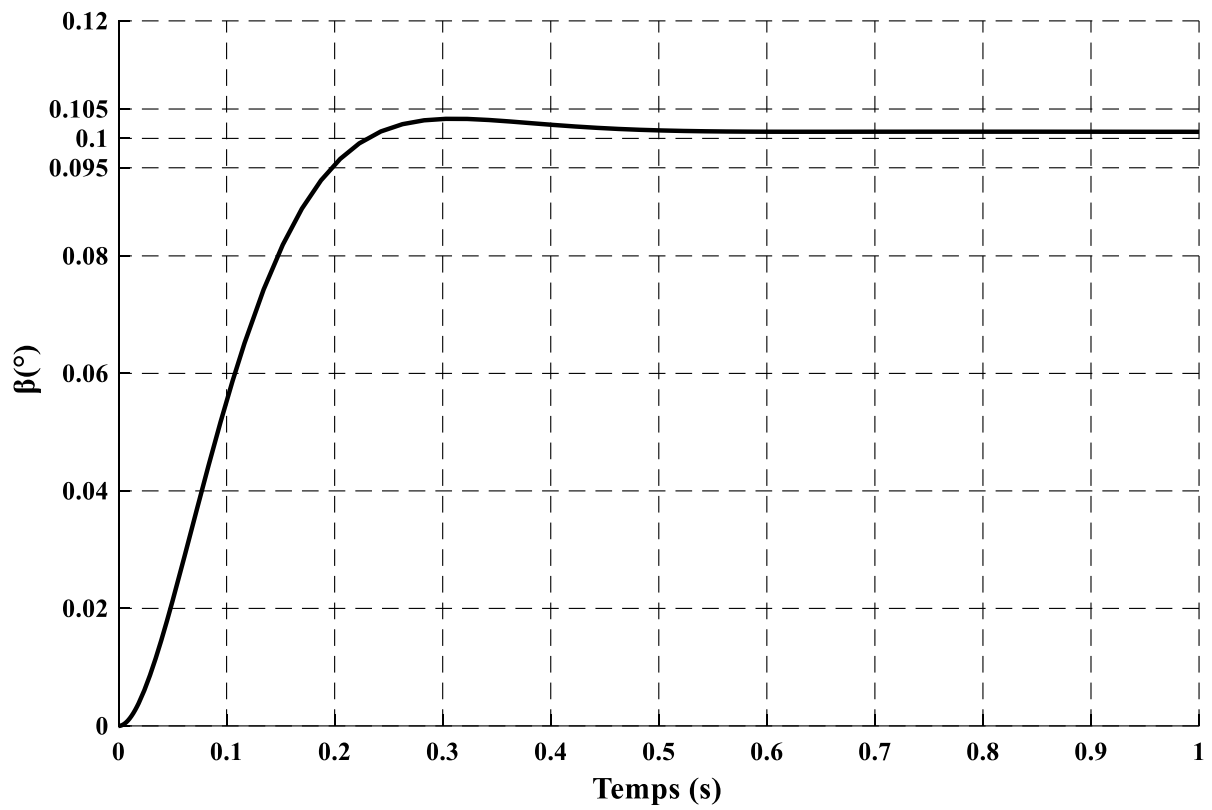


Figure n° C10. Réponse indicielle du système corrigé avec $K_c = 2.6$ et $T_c = 7.8$

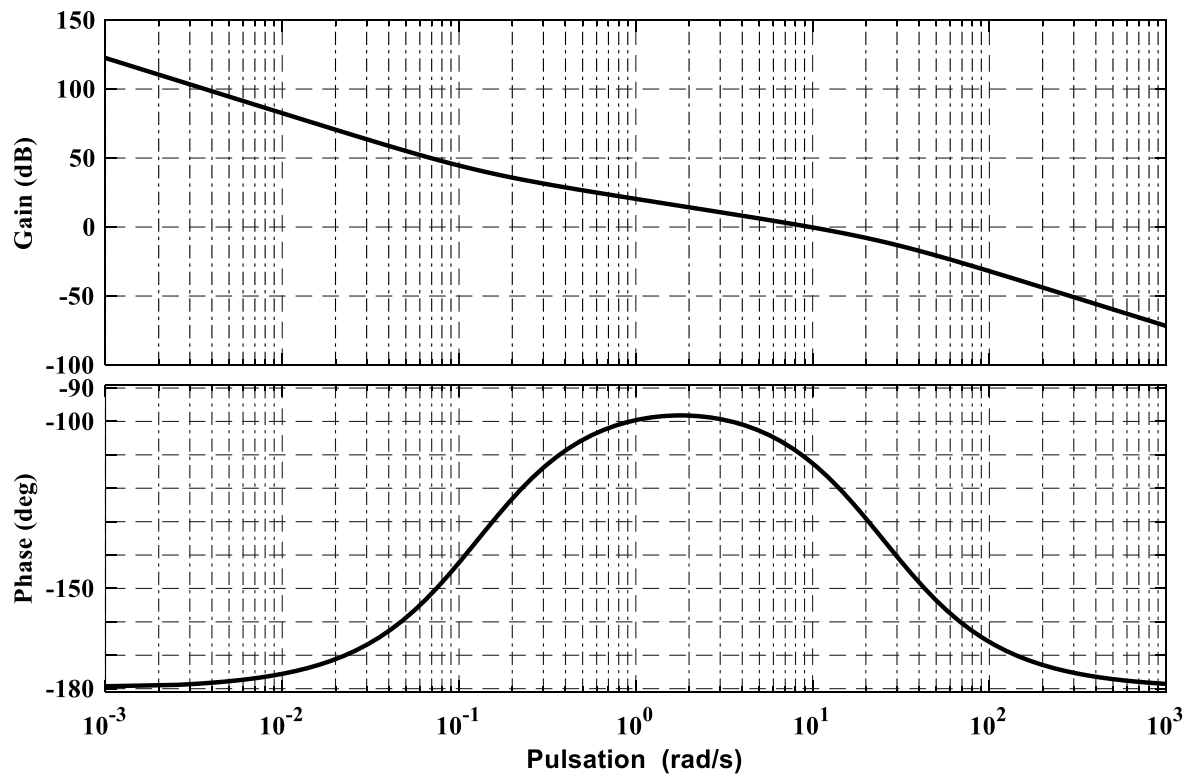


Figure n° C11. Diagrammes de Bode de $G_2(p)$ avec $K_c = 2.6$ et $T_c = 7.8$

Correction EX-S2-IPEIS-06-05-2026

C1.	$A_1(p) = \frac{V(p)}{\Omega_m(p)} = q.n, A_2(p) = \frac{X(p)}{V(p)} = \frac{1}{p}, A_3(p) = \frac{\beta(p)}{X(p)} = \frac{1}{a}$	0.75
C2.	$\varepsilon(p) = K_a \beta_c(p) - K_1 \beta(p) = 0$ donc $K_1 = K_a$	0.5
C3.	$H_u(p) = \frac{K_i}{J.p(R+Lp) + K_i K_e} = \frac{1}{K_e} \frac{1}{\frac{JL}{K_i K_e} \cdot p^2 + \frac{JR}{K_i K_e} \cdot p + 1}, \text{gain} = \frac{1}{K_e}, n=2 \text{ et } \alpha=0$	0.5 0.75
	$H_c(p) = \frac{R+Lp}{J.p(R+Lp) + K_i K_e} = \frac{R}{K_i K_e} \frac{1 + \frac{L}{R} p}{\frac{JL}{K_i K_e} \cdot p^2 + \frac{JR}{K_i K_e} \cdot p + 1}; \text{gain} = \frac{R}{K_e K_i}, n=2 \text{ et } \alpha=0$	0.5 0.75
C4.	D'après la figure C4 on a : $\Omega_m(p) = B_2(p) \cdot (B_1(p) \cdot U(p) - C_r(p))$ Et $\Omega_m(p) = H_u(p) \cdot U(p) - H_c(p) \cdot C_r(p)$ Donc $B_2(p) = H_c(p) = \frac{R}{K_i K_e} \frac{1}{\frac{JR}{K_i K_e} \cdot p + 1}$ et $H_u(p) = B_2(p) \cdot B_1(p)$ donc $B_1(p) = \frac{H_u(p)}{B_2(p)} = \frac{K_i}{R}$	0.5 0.5
C5.	Ordre 1 donc $\text{gain} = \frac{900}{12} = 75$ et $\omega_m(\tau) = 0.63 * 900 = 567 \text{rd} / \text{s}$ donc $\tau = 0.04 \text{s}$ donc $H_u(p) = \frac{75}{1 + 0.04p}$	0.25 0.25 0.25
C6.	$A = K_a \cdot B_1(p) = \frac{K_a \cdot K_i}{R}$ et $H_m(p) = B_2(p) \cdot A_1(p) \cdot A_3(p) = \frac{R}{a K_i K_e} \frac{q.n}{\frac{JR}{K_i K_e} \cdot p + 1}$ $K_m = \frac{Rqn}{a K_i K_e}$ et $T_m = \frac{JR}{K_i K_e}$	0.5 0.5 0.25 0.25
C7.	$H_1(p) = \frac{C(p) A K_m}{p(1 + T_m p) + C(p) A K_m} = \frac{4K_p}{0.04 \cdot p^2 + p + 4K_p} = \frac{1}{\frac{1}{100K_p} \cdot p^2 + \frac{1}{4K_p} p + 1}$ $H_2(p) = \frac{K_m}{p(1 + T_m p) + C(p) A K_m} = \frac{0.2}{0.04 \cdot p^2 + p + 4K_p} = \frac{1}{4K_p} \frac{0.2}{\frac{1}{100K_p} \cdot p^2 + \frac{1}{4K_p} p + 1}$ $\omega_n = 10\sqrt{K_p}$ et $\xi = \frac{5}{4\sqrt{K_p}} = \frac{1.25}{\sqrt{K_p}}$	0.5 0.5 0.5 0.5
C8.	Pour $c_r(t) = 0$, la FTBO est de classe 1 donc l'erreur statique de position est nulle.	0.5
C9.	$\varepsilon(p) = \beta_c(p) - \beta(p) = \beta_c(p) - (H_1(p) \cdot \beta_c(p) - H_2(p) \cdot C_r(p))$ $\varepsilon(p) = \beta_c(p)(1 - H_1(p)) + H_2(p) \cdot C_r(p)$ $\varepsilon_{1p}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} (\beta_0(1 - H_1(p)) + H_2(p) \cdot C_0) = \frac{0.2C_0}{4K_p} = \frac{C_0}{20K_p}$	1 0.5

C10.	Réponse la plus rapide pour $\xi = \frac{5}{4\sqrt{K_p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$ $K_p = \frac{25}{8} = 3,125$	0.5
	$t_{r5\%} \cdot \omega_n = 3$ donne $t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_n} = \frac{3}{10\sqrt{K_p}} = \frac{3 \cdot \sqrt{8}}{10 \cdot 5} = 0,17s$, $D_{1\%} = 100 \cdot e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 4.6\% > 3\%$	0.5 0.5
C11.	$G_1(p) = \frac{4K_p}{p(1+0,04p)}$	0.5
C12.	$G_1(p)$ est d'ordre 2 donc $MG_1 = \infty$ et $M\varphi_1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ pour $K_p = 1$	0.5
	et $M\varphi_1 = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ pour $K_p = 3.125$	0.5 0.5
C13.	Non car l'écart statique n'est pas nul (présence d'un écart suite à la perturbation) et la rapidité n'est pas respecté.	0.25
C14.	$G_2(p) = \frac{4K_c(1+T_c \cdot p)}{T_c \cdot p^2(1+0,04p)} = \frac{7,14K_c(1+0,56 \cdot p)}{p^2(1+0,04p)}$	0.5
C15.	$\varepsilon_{2p}(\infty) = 0$ suite à la présence d'une intégration avant la perturbation	0.5
C16.	$M\varphi = 60^\circ = 180^\circ + \arg G_1(j\omega_{db}) \Leftrightarrow \arg G_1(j\omega_{db}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$	0.5
	$\Rightarrow 20 \log K_{p60} = 4,46_{dB} \Rightarrow K_{c60} = 10^{\frac{4,46}{20}} = 1.67$	0.5
C17.	$t_{r5\%} = 1.097s$ et $D_{1\%} = 100 \frac{0.12-0.1}{0.1} = 100 \cdot 0.2 = 20\%$	0.5 0.5
C18.	Non $t_{r5\%} > 0.2s$	0.5
C19.	$t_{r5\%} = 0.2s = 2\%$, $D_{1\%} = 100 \frac{0.102-0.1}{0.1} = 2\%$, $M\varphi_1 = 180 - 110 = 70^\circ$	0.5 0.5 0.5
C20.	Cahier des charges est respecté	0.25