MSI 2021

Énoncé

Partie B - Mécanique des solides indéformables : Mécanisme de transfert parallèle

B.1 Présentation

L'étude mécanique porte sur le système de transfert des rotules à la sortie de la chaîne de montage. Ce système est composé, comme l'illustre la figure 6, d'un moteur d'entrainement, d'une manivelle (1) et de deux coulisseaux (2) et (3). L'ensemble est monté sur un bâti suffisamment rigide pour réduire les vibrations induites par le mouvement rotatif alterné de la manivelle. Ledit mécanisme permet de transformer une rotation périodique alternée imposée par un moteur en une translation circulaire alternée de la pince de préhension de la rotule à évacuer.

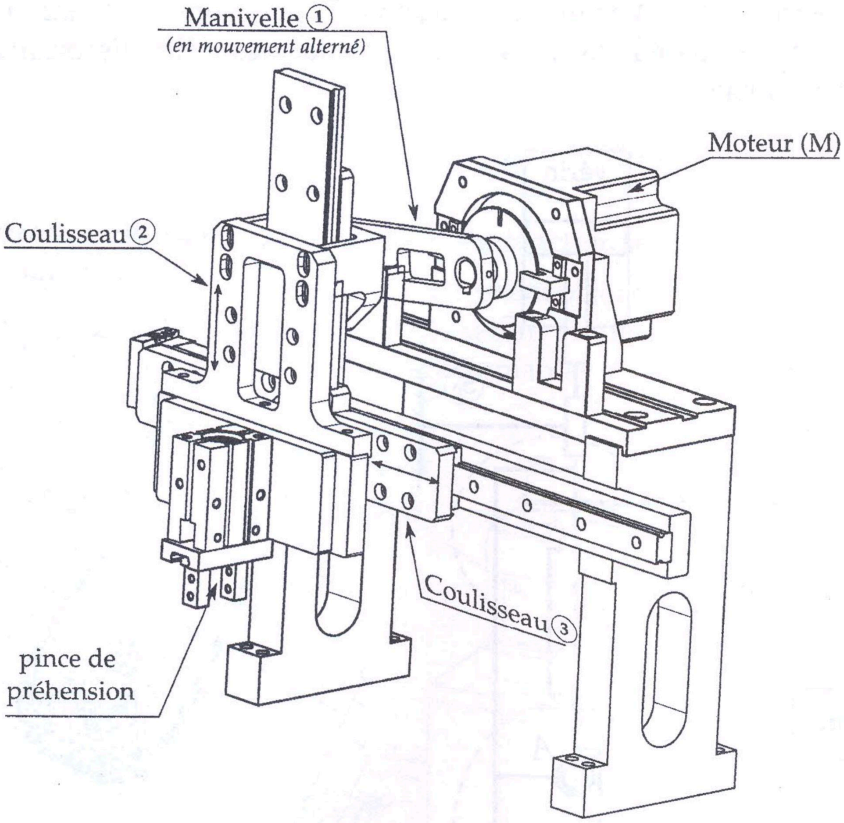
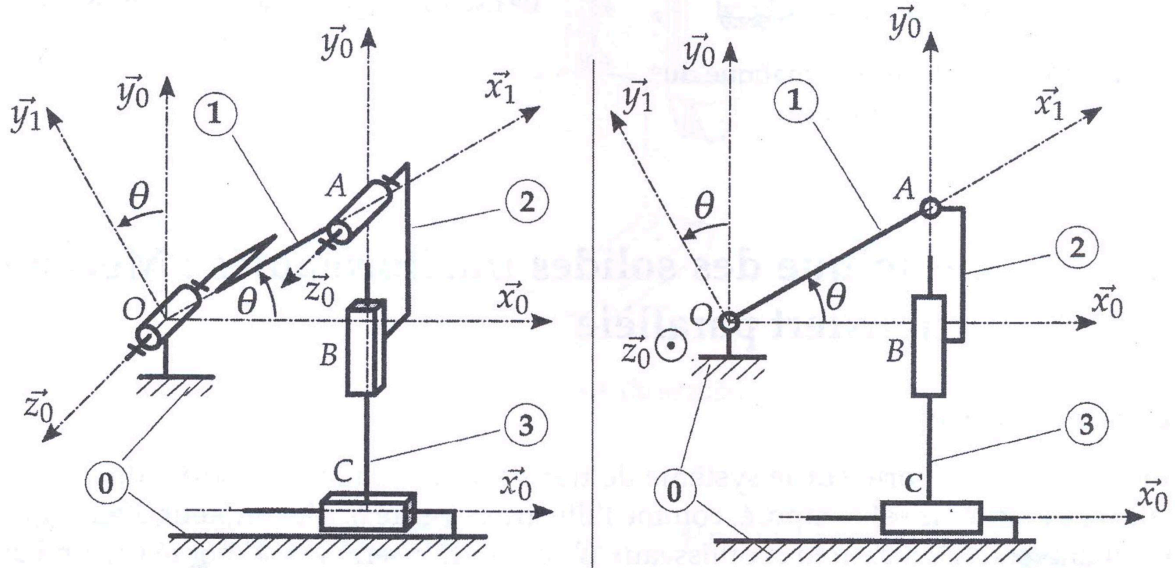


FIGURE 6 – Le système de transfert

Les figures 7.a et 7.b présentent respectivement les schémas cinématiques réduits 3D et 2D du mécanisme, associé au système de transfert, proposé à l'étude.



a - Schématisation dans l'espace (3D) *b - Schématisation plane (2D)*

FIGURE 7 – Schéma cinématique du mécanisme de transfert

B.2 Repères, paramètres et données

Le mécanisme, proposé à l'étude, est constitué des solides suivants :

- Le bâti (0) auquel est lié le repère $\mathcal{R}_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ce repère est considéré galiléen ayant pour axe vertical ascendant $(O, \vec{y}_0)$.
- La manivelle (1) est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti (0). Elle est entrainée en rotation grâce au moteur (M) (voir figure 6). Le repère qui lui est associé est $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ avec $\theta = (\widehat{\vec{x}_0, \vec{x}_1}) = (\widehat{\vec{y}_0, \vec{y}_1})$.
- Le coulisseau (2) est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$ avec la manivelle (1), il est aussi en liaison glissière d'axe $(B, \vec{y}_0)$ avec le coulisseau (3). Sa translation par rapport au coulisseau (3) est paramétrée par λ. $\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère qui lui est associé.
- Le coulisseau (3) est en liaison glissière d'axe $(C, \vec{x}_0)$ avec le bâti (0). Sa translation par rapport à (0) est paramétrée par μ. $\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est le repère qui lui est associé.

Chacun des centres A, B et C des liaisons définies précédemment, décrit une trajectoire située dans un plan parallèle à $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Cela permet de modéliser le système proposé à l'étude par un mécanisme plan en considérant les paramètres et les données géométriques présentés par les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OA} = L\vec{x}_1 \; ; \; \overrightarrow{BA} = a\vec{y}_0 \; ; \; \overrightarrow{OC} = \mu\vec{x}_0 - d\vec{y}_0 \; ; \; \overrightarrow{CB} = \lambda\vec{y}_0$$

Où L, a et d sont des caractéristiques dimensionnelles (constantes). θ, λ et μ sont les paramètres de position du mécanisme, dépendants du temps (variables de configuration).

Partie B : Mécanique des Solides Indéformables

B.1 Étude Cinématique

L'objectif de cette étude cinématique est d'exprimer les vitesses et les accélérations en translation des coulisseaux (2) et (3) en fonction de la vitesse et de l'accélération angulaire à l'entrée du mécanisme de transfert.

B.1: Déterminer les torseurs cinématiques des solides qui suivent dans leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

a. le solide (1) au point A, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en fonction de L, $\dot{\theta}$:

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_A$$

b. le solide (2) au point A, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en fonction de L, $\dot{\theta}$:

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_A$$

c. le solide (3) au point C, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en fonction de $\dot{\mu}$:

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_C$$

B.2: Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le vecteur position de A en fonction de d, μ et λ. En déduire la vitesse de A appartenant au solide (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0) en fonction de $\dot{\mu}$ et $\dot{\lambda}$:

$\overrightarrow{OA} =$ .....

$\overrightarrow{V}_{A\in 2/0} =$ .....

B.3: En déduire les expressions de $\dot{\mu}$ et $\dot{\lambda}$ en fonction de L, $\dot{\theta}$ et θ :

$\dot{\mu} =$ .....

$\dot{\lambda} =$ .....

On se propose d'analyser l'effet de la périodicité de θ, sur le couple C_m développé par le moteur, en considérant la figure B.1 illustrant approximativement la variation de θ en fonction du temps où T est sa période.

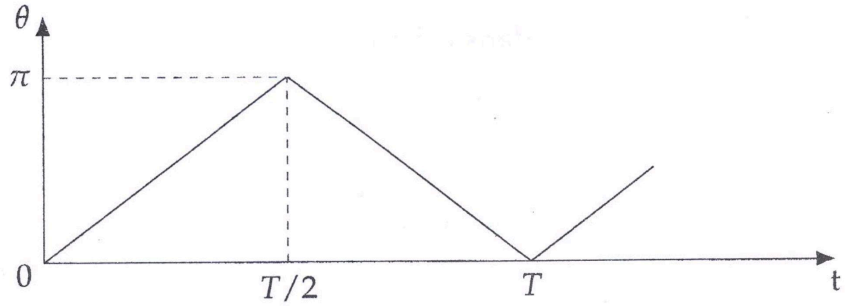


FIGURE B.1 – Évolution de l'angle de rotation θ en fonction du temps

B.4: Déterminer, en fonction de t et de la période T, les expressions de $\theta(t)$ correspondant respectivement à la première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$ et la seconde $(T/2 \leq t \leq T)$.

B.5: En déduire la vitesse $\dot{\theta}$ associée à la première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$ et la seconde $(0 \leq t \leq T/2)$. Déduire que $\ddot{\theta}$ est nulle sur une période.

Erratum :

Veuillez considérer la figure ci-dessous à la place de la figure B.2 de la page 6/19 du document réponses

✓ La manivelle (1) est représentée par le solide de la figure B.2.

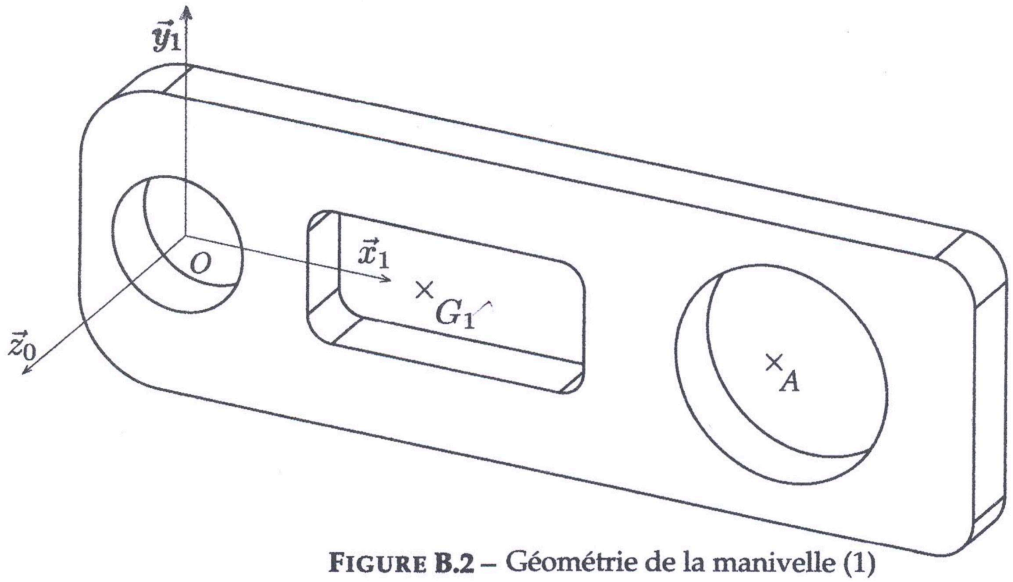


FIGURE B.2 – Géométrie de la manivelle (1)

B.2 Étude dynamique et énergétique

L'étude énergétique et dynamique vise à déterminer le couple développé par le moteur (M) ainsi que les expressions analytiques des actions extérieures s'appliquant au système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

B.2.1 Données et hypothèses

- ✓ $\theta(t)$ est périodique (figure B.1) et $\ddot{\theta}$ est nulle.
- ✓ L'accélération de la pesanteur est définie par : $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec g est une constante positive.
- ✓ L'action du moteur (M) sur (1) est modélisée par le torseur couple :

$$\{\mathcal{T}_{(Moteur \to 1)}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

- ✓ Les masses des solides (1), (2) et (3) sont désignées respectivement par m_i avec i = 1, 2, 3. Sachant que le coulisseau (2) intègre toutes les pièces qui lui sont solidaires y compris le système de préhension (la masse de la rotule est négligée).
- ✓ Les centres d'inertie G_i de ces solides sont définis par les expressions vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1 \; ; \; \overrightarrow{AG_2} = -b\vec{y}_0 \; ; \; \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$$

où b représente une constante dimensionnelle positive.

- ✓ Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- ✓ Il convient de retenir, pour ce problème plan, la notation représentant le torseur des actions mécaniques qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{T}_{(i \to j)}\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_Q^{\mathcal{B}_0}$$

- ✓ La manivelle (1) est modélisée par le solide schématisé par la figure B.2.

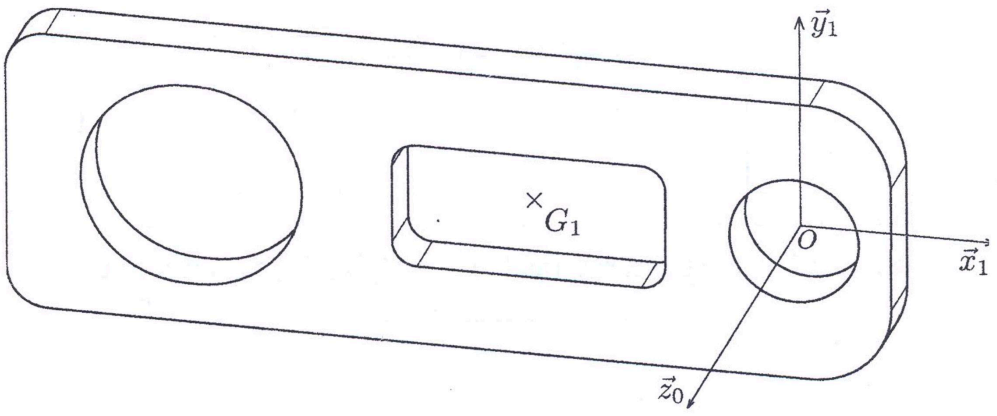


FIGURE B.2 – Modélisation de la manivelle 1

B.6: Donner, après justification, la forme de la matrice d'inertie de la manivelle (1) au point G_1 dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$. Cette matrice sera notée $[I_{G_1}(1)]$.

N.B. Dans la suite on notera par I_z le moment d'inertie de (1) par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z}_0)$.

B.7: Déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques des solides suivants dans leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

a. Le solide (1) au point G_1 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_1, I_z, L, θ et ses dérivées.

$$\{\mathscr{C}_{1/0}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_1}$$

$$\{\mathscr{D}_{1/0}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_1}$$

b. Le solide (2) au point G_2 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_2, L, θ et ses dérivées.

$$\{\mathscr{C}_{2/0}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\{\mathscr{D}_{2/0}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_2}$$

c. Le solide (3) au point G_3 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de m_3 , L, θ et ses dérivées.

$$\{\mathscr{C}_{3/0}\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\{\mathscr{D}_{3/0}\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}_{G_3}$$

B.8: Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$E_c(\Sigma/0) =$ .....

B.9: Compléter sur la figure B.3, l'inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées au système $\Sigma = \{1,2,3\}$.

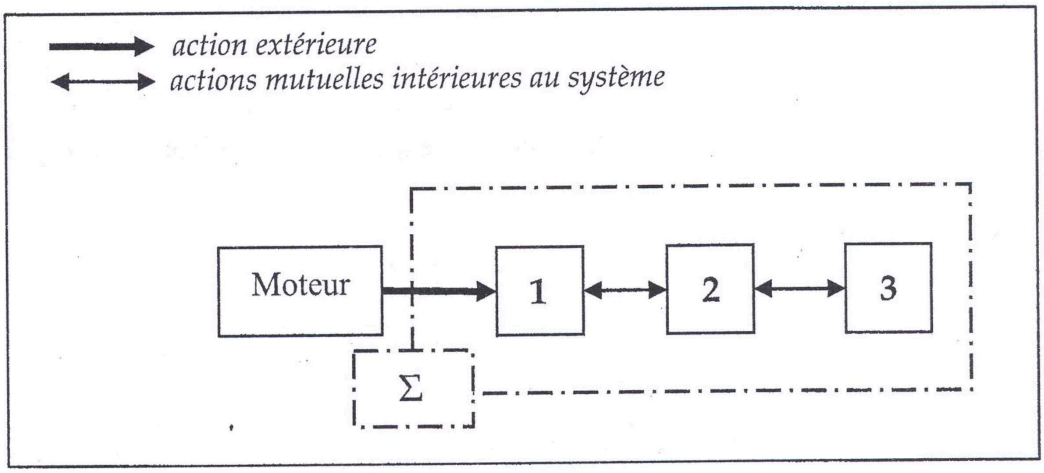


FIGURE B.3 – Diagramme des actions mécaniques

B.10: Écrire les torseurs des actions extérieures et intérieures au système (Σ) en leur point d'application respectif, en les exprimant dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

B.11: Déterminer les puissances développées par les actions mécaniques extérieures et intérieures s'exerçant au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$\mathscr{P}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma/0)} =$ .....

$\mathscr{P}_{int}(\Sigma) =$ .....

B.12: Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0) pour déduire l'expression du couple C_m développé par le moteur.

$C_m =$ .....

B.13: Montrer que les extremums du couple C_m développé par le moteur sont solutions de l'équation : $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin \theta} = \dfrac{(m_1/2) + m_2}{m_3} \dfrac{gT^2}{4\pi^2 L}$

B.14: Écrire les équations scalaires issues de l'application du théorème de la résultante dynamique pour le système (Σ) et les projeter sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$:

B.15: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème de la résultante dynamique appliqué au solide (3) dans son mouvement par rapport à (0) en projection sur $\vec{y}_0$:

B.16: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment dynamique en O appliqué au système (Σ) dans son mouvement par rapport à (0) :

B.17: Utiliser les réponses aux questions B.14, B.15 et B.16 pour déterminer les actions mécaniques, engendrées par les liaisons, sur le système (Σ).

Correction

Partie B : Mécanique des Solides Indéformables

B.1 Étude Cinématique

L'objectif de cette étude cinématique est d'exprimer les vitesses et les accélérations en translation des coulisseaux (2) et (3) en fonction de la vitesse et de l'accélération angulaire à l'entrée du mécanisme de transfert.

B.1: Déterminer les torseurs cinématiques des solides qui suivent dans leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

a. le solide (1) au point A, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en fonction de L, $\dot{\theta}$:

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \\ L\dot{\theta}\vec{y}_1 \end{array} \right\}_A$$

b. le solide (2) au point A, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, en fonction de L, $\dot{\theta}$:

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \\ L\dot{\theta}\vec{y}_1 \end{array} \right\}_A$$

c. le solide (3) au point C, l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en fonction de $\dot{\mu}$:

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \\ \dot{\mu}\vec{x}_0 \end{array} \right\}_C$$

B.2: Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le vecteur position de A en fonction de d, μ et λ. En déduire la vitesse de A appartenant au solide (2) dans son mouvement par rapport au bâti (0) en fonction de $\dot{\mu}$ et $\dot{\lambda}$:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \mu\vec{x}_0 + (\lambda + a - d)\vec{y}_0$

d'où $\overrightarrow{V}_{(A\in 2/0)} = \dot{\mu}\vec{x}_0 + \dot{\lambda}\vec{y}_0$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \mu\vec{x}_0 + (\lambda + a - d)\vec{y}_0} \qquad \boxed{\overrightarrow{V}_{(A\in 2/0)} = \dot{\mu}\vec{x}_0 + \dot{\lambda}\vec{y}_0}$$

B.3: En déduire les expressions de $\dot{\mu}$ et $\dot{\lambda}$ en fonction de L, $\dot{\theta}$ et θ :

L'égalité des deux expressions de $\overrightarrow{V}_{(A\in 2/0)} \Rightarrow L\dot{\theta}\vec{y}_1 = \dot{\mu}\vec{x}_0 + \dot{\lambda}\vec{y}_0$

Ainsi, par projection sur la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, on déduit :

$$\boxed{\dot{\mu} = -L\dot{\theta}\sin\theta} \qquad \boxed{\dot{\lambda} = L\dot{\theta}\cos\theta}$$

On se propose d'analyser l'effet de la périodicité de θ, sur le couple C_m développé par le moteur, en considérant la figure B.1 illustrant approximativement la variation de θ en fonction du temps où T est sa période.

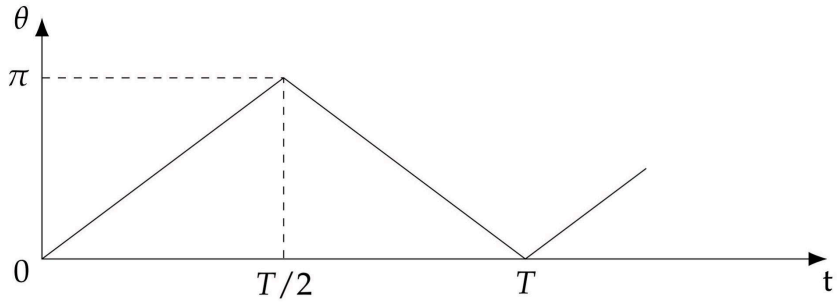


FIGURE B.1 – Évolution de l'angle de rotation θ en fonction du temps

B.4: Déterminer, en fonction de t et de la période T, les expressions de $\theta(t)$ correspondant respectivement à la première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$ et la seconde $(T/2 \leq t \leq T)$.

Première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$: $\theta(t) = \dfrac{2\pi}{T}t$

Deuxième demi-période $(T/2 \leq t \leq T)$: $\theta(t) = 2\pi(1 - \dfrac{t}{T})$

B.5: En déduire la vitesse $\dot{\theta}$ associée à la première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$ et la seconde $(T/2 \leq t \leq T)$. Déduire que $\ddot{\theta}$ est nulle sur une période.

Première demi-période $(0 \leq t \leq T/2)$: $\dot{\theta}(t) = \dfrac{2\pi}{T}$

Deuxième demi-période $(T/2 \leq t \leq T)$: $\dot{\theta}(t) = -\dfrac{2\pi}{T}$,

sur une période $\dot{\theta}(t)$ est constante donc $\ddot{\theta}(t) = 0$.

B.2 Étude dynamique et énergétique

L'étude énergétique et dynamique vise à déterminer le couple développé par le moteur (M) ainsi que les expressions analytiques des actions extérieures s'appliquant au système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

B.2.1 Données et hypothèses

- ✓ $\theta(t)$ est périodique (figure B.1) et $\ddot{\theta}$ est nulle.
- ✓ L'accélération de la pesanteur est définie par : $\vec{g} = -g\vec{y}_0$ avec g est une constante positive.
- ✓ L'action du moteur (M) sur (1) est modélisée par le torseur couple :

$$\{\mathscr{T}(Moteur \to 1)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

- ✓ Les masses des solides (1), (2) et (3) sont désignées respectivement par m_i avec i = 1, 2, 3. Sachant que le coulisseau (2) intègre toutes les pièces qui lui sont solidaires y compris le système de préhension (la masse de la rotule est négligée).
- ✓ Les centres d'inertie G_i de ces solides sont définis par les expressions vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{L}{2}\vec{x}_1 \; ; \; \overrightarrow{AG_2} = -b\vec{y}_0 \; ; \; \overrightarrow{CG_3} = \vec{0}$$

  où b représente une constante dimensionnelle positive.
- ✓ Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- ✓ Il convient de retenir, pour ce problème plan, la notation représentant le torseur des actions mécaniques qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) au point Q "centre géométrique de la liaison", exprimé dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\{\mathscr{T}(i \to j)\}_Q = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_Q^{\mathcal{B}_0}$$

- ✓ La manivelle (1) est représentée par le solide de la figure B.2.

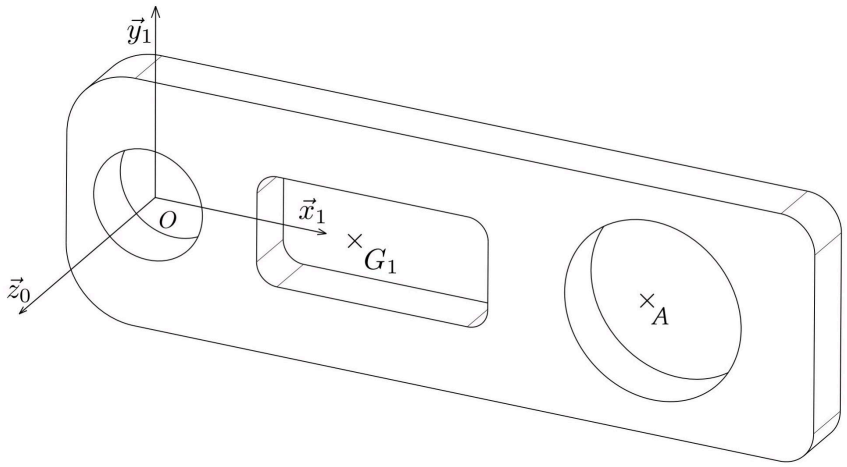


FIGURE B.2 – Géométrie de la manivelle 1

B.6: Donner, après justification, la forme de la matrice d'inertie de la manivelle (1) au point G_1 dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$. Cette matrice sera notée $[I_{G_1}(1)]$.

$$[I_{G_1}(1)] = \begin{bmatrix} I_{G_1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_1z} \end{bmatrix} \text{ car :}$$

$(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ est un plan de symétrie matérielle $\Rightarrow$ $(G_1, \vec{z}_0)$ axe principal d'inertie
$\Rightarrow$ Les produit d'inertie $I_{xz} = I_{yz} = 0$

$(G_1, \vec{x}_1, \vec{z}_0)$ est un plan de symétrie matérielle $\Rightarrow$ $(G_1, \vec{y}_1)$ axe principal d'inertie
$\Rightarrow$ Les produit d'inertie $I_{xy} = I_{yz} = 0$

N.B. Dans la suite on notera par I_z le moment d'inertie de (1) par rapport à l'axe $(G_1, \vec{z}_0)$.

B.7: Déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques des solides suivants dans leurs mouvements par rapport au bâti (0) :

a. Le solide (1) au point G_1 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_1, I_z, L, θ et ses dérivées.

$$\boxed{\{\mathscr{C}_{1/0}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \dfrac{L}{2} \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \\ I_z \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_1}}$$

$$\boxed{\{\mathscr{D}_{1/0}\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 \dfrac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 \\ \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1}}$$

b. Le solide (2) au point G_2 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ en fonction de m_2, L, θ et ses dérivées.

$$\overrightarrow{V}_{(G_2/0)} = \overrightarrow{V}_{(A \in 2/0)} = L\dot{\theta}\vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_{G_2}(2/0) = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{G_2}(2/0) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{G_2}(2/0)}{\mathrm{d}t} \right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

$$\{\mathscr{C}_{2/0}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} m_2 L\dot{\theta}\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

$$\{\mathscr{D}_{2/0}\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 L\dot{\theta}^2\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2}$$

c. Le solide (3) au point G_3 ; l'exprimer dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de m_3 , L, θ et ses dérivées.

$$\{\mathscr{C}_{3/0}\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{c} m_3\dot{\mu}\vec{x}_0 = -m_3 L\dot{\theta}\sin\theta\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

$$\{\mathscr{D}_{3/0}\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{c} m_3\ddot{\mu}\vec{x}_0 = -m_3 L\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3}$$

B.8: Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$E_c(\Sigma/0) = E_c(1/0) + E_c(2/0) + E_c(3/0)$ avec

$$E_c(1/0) = \frac{1}{2}\{\mathscr{V}_{1/0}\}_{G_1}\{\mathscr{C}_{1/0}\}_{G_1} = \frac{1}{2}(I_z + m_1\frac{L^2}{4})\dot{\theta}^2$$

$$E_c(2/0) = \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{V}_{(G_2/0)}{}^2 = \frac{1}{2}m_2 L^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c(3/0) = \frac{1}{2} m_3 \overrightarrow{V}_{(G_3/0)}{}^2 = \frac{1}{2} m_3 L^2 \dot{\theta}^2 (\sin\theta)^2$$

$$\boxed{E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \left(I_z + m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 L^2 + m_3 L^2 (\sin\theta)^2 \right)}$$

B.9: Compléter sur la figure B.3, l'inventaire des actions mécaniques extérieures appliquées au système $\Sigma = \{1, 2, 3\}$.

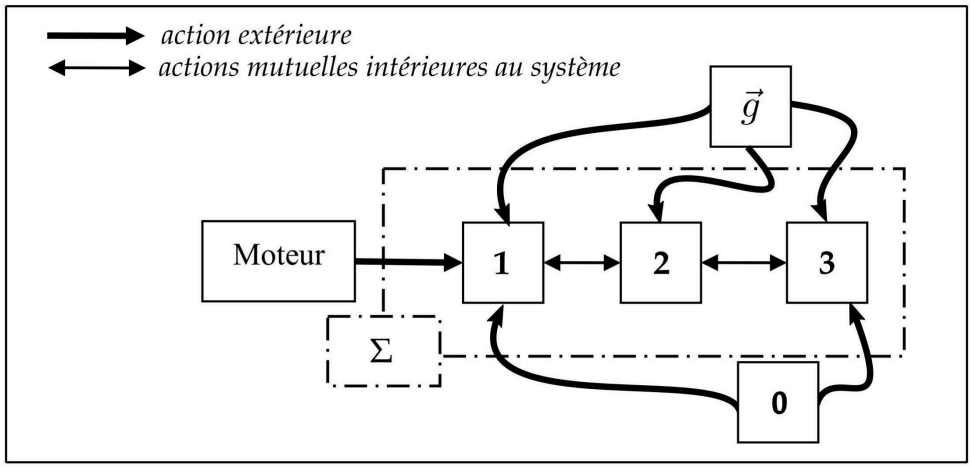


FIGURE B.3 – Diagramme des actions mécaniques

B.10: Écrire les torseurs des actions extérieures et intérieures au système (Σ) en leur point d'application respectif, en les exprimant dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Les torseurs des actions extérieures à (Σ)

$$\{\mathcal{T}(Moteur \to 1)\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} \vec{0} & \\ C_m \vec{z}_0 & \end{array} \right\}_O ; \{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_O^{\mathcal{B}_0} ;$$

$$\{\mathcal{T}(0 \to 3)\}_C = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & - \\ Y_{03} & - \\ - & N_{03} \end{array} \right\}_C^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}(\vec{g} \to 1)\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & - \\ -m_1 g & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{G_1}^{\mathcal{B}_0} ;$$

$$\{\mathcal{T}(\vec{g} \to 2)\}_{G_2} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & - \\ -m_2 g & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{G_2}^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}(\vec{g} \to 3)\}_{G_3} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & - \\ -m_3 g & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{G_3}^{\mathcal{B}_0} ;$$

Les torseurs des actions intérieures de (Σ)

$$\{\mathcal{T}(2 \to 1)\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{21} & - \\ Y_{21} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_A^{\mathcal{B}_0} ; \{\mathcal{T}(2 \to 3)\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & - \\ 0 & - \\ - & N_{23} \end{array} \right\}_B^{\mathcal{B}_0}$$

B.11: Déterminer les puissances développées par les actions mécaniques extérieures et intérieures s'exerçant au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\mathscr{P}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma/0)} = \mathscr{P}_{(Mot\to1/0)} + \mathscr{P}_{(0\to1/0)} + \mathscr{P}_{(0\to3/0)} + \mathscr{P}_{(\vec{g}\to1/0)} + \mathscr{P}_{(\vec{g}\to2/0)} + \mathscr{P}_{(\vec{g}\to3/0)}$$

$$\mathscr{P}_{(Mot\to1/0)} = C_m\dot{\theta}$$

$$\mathscr{P}_{(0\to1/0)} = \mathscr{P}_{(0\to3/0)} = 0 \text{ (Liaisons parfaites de puissances mutuelles)}$$

$$\mathscr{P}_{(\vec{g}\to1/0)} = -m_1 g\vec{y}_0 \cdot \frac{L}{2}\dot{\theta}\vec{y}_1 = -m_1 g\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\mathscr{P}_{(\vec{g}\to2/0)} = -m_2 g\vec{y}_0 \cdot L\dot{\theta}\vec{y}_1 = -m_2 gL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\mathscr{P}_{(\vec{g}\to3/0)} = -m_3 g\vec{y}_0 \cdot \dot{\mu}\vec{x}_0 = 0$$

$$\boxed{\mathscr{P}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma/0)} = \left(C_m - (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta\right)\dot{\theta}}$$

$$\boxed{\mathscr{P}_{int}(\Sigma) = 0}$$

B.12: Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti (0) pour déduire l'expression du couple C_m développé par le moteur.

$$\frac{\mathrm{d}Ec(\Sigma/0)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma/0)} + \mathscr{P}_{int}(\Sigma)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^3 m_3 L^2\cos\theta\sin\theta = \left(C_m - (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta\right)\dot{\theta}$$

$$\text{Soit : } \dot{\theta}^2 m_3 L^2\cos\theta\sin\theta = \left(C_m - (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta\right)$$

$$\text{D'où : } C_m = \dot{\theta}^2 m_3 L^2\cos\theta\sin\theta + (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 m_3 L^2\sin 2\theta + (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta$$

$$\boxed{C_m = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 m_3 L^2 \sin 2\theta + (\frac{m_1}{2} + m_2) g L \cos\theta}$$

B.13: Montrer que les extremums du couple C_m développé par le moteur sont solutions de l'équation : $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{(m_1/2) + m_2}{m_3} \dfrac{gT^2}{4\pi^2 L}$

$$\frac{dC_m}{d\theta} = \dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos 2\theta - (\frac{m_1}{2} + m_2) g L \sin\theta$$

Les extrémums du couple C_m développé par le moteur correspondent aux solutions de $\dfrac{dC_m}{d\theta} = 0$ ce qui donne :

$$\dot{\theta}^2 m_3 L^2 \cos 2\theta - (\frac{m_1}{2} + m_2) g L \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = \frac{(\frac{m_1}{2} + m_2)}{m_3} \frac{g \sin\theta}{\dot{\theta}^2 L}$$

avec $\dot{\theta}^2 = \dfrac{4\pi^2}{T^2}$ D'où : $\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{(m_1/2) + m_2}{m_3} \dfrac{gT^2}{4\pi^2 L}$

B.14: Écrire les équations scalaires issues de l'application du théorème de la résultante dynamique pour le système (Σ) et les projeter sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$:

$$\vec{\mathscr{R}}_{(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = m_1 \vec{\Gamma}_{(G_1/0)} + m_2 \vec{\Gamma}_{(G_2/0)} + m_3 \vec{\Gamma}_{(G_3/0)}$$

En projection sur $\vec{x}_0$: $X_{01} = -\left(\dfrac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) L\dot{\theta}^2 \cos\theta$

En projection sur $\vec{y}_0$: $Y_{01} + Y_{03} - (m_1 + m_2 + m_3) g = -(\dfrac{m_1}{2} + m_2) L\dot{\theta}^2 \sin\theta$

B.15: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème de la résultante dynamique appliqué au solide (3) dans son mouvement par rapport à (0) en projection sur $\vec{y}_0$:

$$\vec{\mathscr{R}}_{(\bar{3}\to 3)} = m_3 \vec{\Gamma}_{(G_3/0)}$$

En projection sur $\vec{y}_0$: $Y_{03} - m_3 g = 0$

B.16: Écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment dynamique en O appliqué au système (Σ) dans son mouvement par rapport à (0) :

$$\vec{\mathscr{M}}_{O(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = \vec{\delta}_{O(\Sigma/0)}$$

tel que :
$\vec{\mathscr{M}}_{O(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = \vec{\mathscr{M}}_{O(Mot\to 1)} + \vec{\mathscr{M}}_{O(0\to 1)} + \vec{\mathscr{M}}_{O(0\to 3)} + \vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 1)} + \vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 2)} + \vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 3)}$
où : $\vec{\mathscr{M}}_{O(Mot\to 1)} = C_m \vec{z}_0 \quad ; \quad \vec{\mathscr{M}}_{O(0\to 1)} = \vec{0}$
$\vec{\mathscr{M}}_{O(0\to 3)} = N_{03}\vec{z}_0 + \overrightarrow{OC} \wedge Y_{03}\vec{y}_0 = N_{03}\vec{z}_0 + (\mu\vec{x}_0 - d\vec{y}_0) \wedge Y_{03}\vec{y}_0 = (N_{03} + \mu Y_{03})\vec{z}_0$
$\vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 1)} = \overrightarrow{OG_1} \wedge (-m_1 g\vec{y}_0) = \frac{L}{2}\vec{x}_1 \wedge (-m_1 g\vec{y}_0) = -m_1 g \frac{L}{2}\cos\theta\vec{z}_0$
$\vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 2)} = \overrightarrow{OG_2} \wedge (-m_2 g\vec{y}_0) = (L\vec{x}_1 - b\vec{y}_0) \wedge (-m_2 g\vec{y}_0) = -m_2 g L\cos\theta\vec{z}_0$
$\vec{\mathscr{M}}_{O(\vec{g}\to 3)} = \overrightarrow{OC} \wedge (-m_3 g\vec{y}_0) = (\mu\vec{x}_0 - d\vec{y}_0) \wedge (-m_3 g\vec{y}_0) = -\mu m_3 g\vec{z}_0$
Soit $\vec{\mathscr{M}}_{O(\bar{\Sigma}\to\Sigma)} = \left[C_m + N_{03} + \mu Y_{03} - gL\cos\theta(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3)\right]\vec{z}_0$
$\vec{\delta}_{O(1/0)} = \vec{\delta}_{G_1(1/0)} + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1\vec{\Gamma}_{(G_1/0)} = \frac{L}{2}\vec{x}_1 \wedge -m_1\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\vec{x}_1 = \vec{0}$
$\vec{\delta}_{O(2/0)} = \vec{\delta}_{G_2(2/0)} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{\Gamma}_{(G_2/0)} = (L\vec{x}_1 - b\vec{y}_0) \wedge -m_2 L\dot{\theta}^2\vec{x}_1 = -m_2 bL\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{z}_0$
$\vec{\delta}_{O(3/0)} = \vec{\delta}_{G_3(3/0)} + \overrightarrow{OG_3} \wedge m_3\vec{\Gamma}_{(G_3/0)} = (\mu\vec{x}_0 - d\vec{y}_0) \wedge -m_3 L\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{x}_0 = -m_3 dL\dot{\theta}^2\cos\theta\vec{z}_0$
In fine

$$C_m + N_{03} + \mu Y_{03} - gL\cos\theta(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) = -(m_2 b + m_3 d)L\dot{\theta}^2\cos\theta$$

B.17: Utiliser les réponses aux questions B.14, B.15 et B.16 pour déterminer les actions mécaniques, engendrées par les liaisons, sur le système (Σ).

D'après ce qui précède :
$X_{01} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right)L\dot{\theta}^2\cos\theta$
$Y_{01} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)L\dot{\theta}^2\sin\theta - Y_{03} + (m_1 + m_2 + m_3)g$
en remplaçant $Y_{03} = m_3 g$
$Y_{01} = \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right)L\dot{\theta}^2\sin\theta + (m_1 + m_2)g$
$N_{03} = -(m_2 b + m_3 d)L\dot{\theta}^2\cos\theta + gL\cos\theta\left(\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right) - \mu Y_{03} - C_m$
avec $\mu = L\cos\theta$
$N_{03} = -(m_2 b + m_3 d)L\dot{\theta}^2\cos\theta + gL\cos\theta\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) - C_m$
En remplaçant le couple moteur par son expression :

$$C_m = \dot{\theta}^2 m_3 L^2\sin\theta\cos\theta + (\frac{m_1}{2} + m_2)gL\cos\theta$$

et après simplification : $N_{03} = -(m_2 b + m_3 d + m_3 L\sin\theta)L\dot{\theta}^2\cos\theta$