

Partie A : Conception Mécanique

A1 -A4. En se référant au texte explicatif du fonctionnement du système (page 6 du document technique) et au schéma cinématique de la figure 3, répondre aux questions suivantes :

A1 - Donner le nom et justifier le choix des liaisons suivantes :

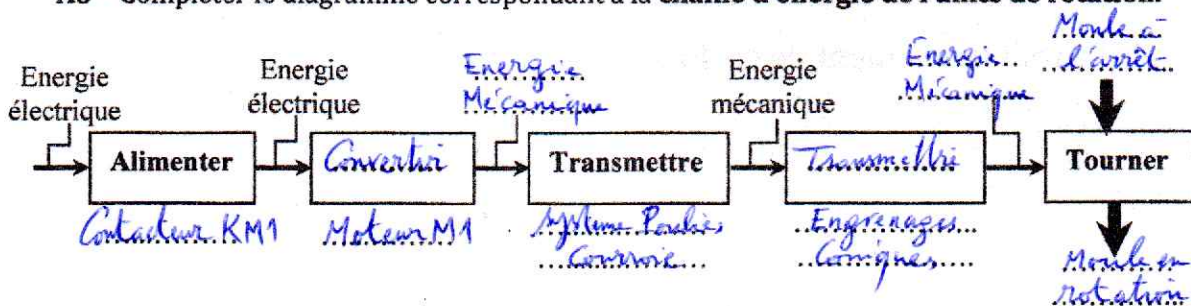
Liaison en B : *hélicoïdale à droite d'axe $(B, \vec{y}_4)$ permet de transformer la rotation de (1) en un mouvement de translation de la vis (2).*

Liaison en C : *glissière d'axe $(C, \vec{y}_4)$ permet le guidage en translation de la vis (2) et donc du couvercle (3).*

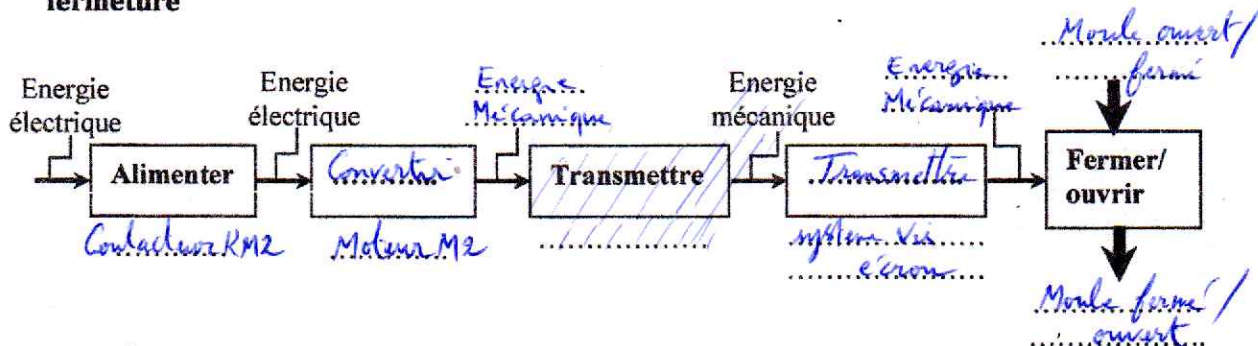
A2 - Compléter le tableau ci-dessous :

	Unité de rotation	Unité de fermeture
Pré-actionneur	<i>Contacteurs K.M.1</i>	<i>Contacteur K.M.2</i>
Actionneur	<i>Moteur M1</i>	<i>Moteur M2</i>
Transmetteur de puissance	<i>système Poulies Courroie (P_1, P_2) + Engrenages Coniques (6, 8)</i>	<i>Système Vis d'axe (1, 2)</i>
Effecteur	<i>Moule (4)</i>	<i>Couvercle (3)</i>

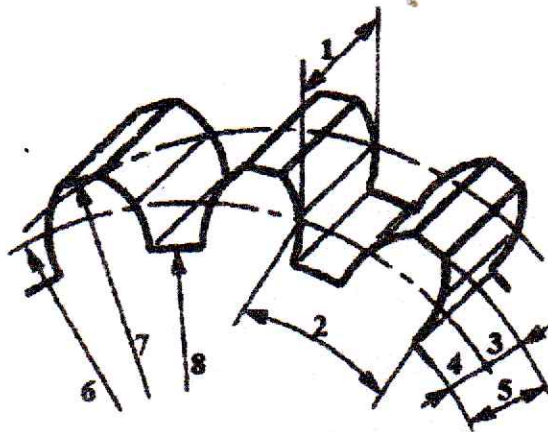
A3 - Compléter le diagramme correspondant à la chaîne d'énergie de l'unité de rotation.



A4 - Compléter le diagramme correspondant à la chaîne d'énergie de l'unité de fermeture



A5 -A11. On considère le dessin ci-dessous d'une partie d'une roue à denture droite.
On donne : le nombre de dents $Z = 21$, le module $m=2\text{mm}$; et un facteur $k = 10$.



On demande de compléter le tableau suivant :

Num	Nom & symbole	Expression	valeur
1	Largeur de la roue (b)	$b = k.m$	$b = 10 \cdot 2 = 20 \text{ mm}$
A5	2	Pas au primitif (p)	$p = \pi.m$ $p = 2\pi = 6,28 \text{ mm}$
A6	3	Saillie (h_a)	$h_a = m$ $h_a = 2 \text{ mm}$
A7	4	Creux (h_f)	$h_f = 1,25.m$ $h_f = 2,5 \text{ mm}$
A8	5	Hauteur de la dent (h)	$h = h_a + h_f$ $h = 4,5 \text{ mm}$
A9	6	Diamètre primitif (d)	$d = m.Z$ $d = 42 \text{ mm}$
A10	7	Diamètre des têtes (d_a)	$d_a = d + 2.h_a = m(Z + 2)$ $d_a = 46 \text{ mm}$
A11	8	Diamètre des pieds (d_f)	$d_f = d - 2.h_f = m(Z - 2,5)$ $d_f = 37 \text{ mm}$

Partie B : Mécanique des Solides Indéformables (M.S.I.)

B-I - Étude de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (figure 4).

❖ Étude statique

L'objectif de l'étude statique est de déterminer l'expression du couple fourni par le moteur (M2) pour la fermeture du moule (4).

On suppose que :

- ✓ Toutes les liaisons sont parfaites,
- ✓ Tous les solides sont homogènes.

- ✓ La notation $\{\tau_{i \rightarrow j}\}_Q = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_Q$ est adoptée pour présenter le torseur des

actions mécaniques de liaison qu'exerce un solide (i) sur un solide (j) en un point Q, exprimé dans la base $\mathcal{B}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$.

- ✓ L'action du moteur (**M2**) sur l'écrou (**1**) (de filetage droit) au point B est modélisée

par le torseur suivant : $\{\tau_{M_2 \rightarrow 1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} \vec{0} & \\ -C_{m2} \bar{y}_0 & \end{array} \right\}_B$.

- ✓ Tous les solides de l'unité de fermeture et/ou d'ouverture du moule (4) sont supposés de masses négligeables.

- ✓ Pendant la **phase de fermeture** du moule (4), les actions exercées par l'ensemble

$\{E_1\}$ sur (4) sont modélisées par le torseur suivant $\{\tau_{E_1 \rightarrow 4}\}_D = \left\{ \begin{array}{c|c} -N_D \bar{y}_0 & \\ \bar{M}_D & \end{array} \right\}_D$.

- ✓ Pendant l'ouverture et la fermeture du moule, l'arbre du moteur M2 tourne à une vitesse de rotation N_{m2} , ($N_{m2}=200\text{tr/mn}$).

B1- B3 - Ecrire les torseurs des actions mécaniques des liaisons suivantes :

B1 - Liaison $\mathcal{L}_{S-E_1}$:

$$\{\tau_{S-E_1}\}_C = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{SE_1} & L_{SE_1} \\ 0 & M_{SE_1} \\ Z_{SE_1} & N_{SE_1} \end{array} \right\}_C$$

B2 - Liaison $\mathcal{L}_{E_1-1}$:

$$\{\tau_{E_1-1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{E_1,1} & L_{E_1,1} \\ Y_{E_1,1} & M_{E_1,1} \\ Z_{E_1,1} & N_{E_1,1} \end{array} \right\}_B$$

(Avec $M_{E_1,1} = -\frac{P}{2\pi} Y_{E_1,1}$)

B3 - Liaison $\mathcal{L}_{1-S}$:

$$\{\tau_{1-S}\}_P = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{1S} & L_{1S} \\ Y_{1S} & 0 \\ Z_{1S} & N_{1S} \end{array} \right\}_P$$

B4 - Pour la liaison $\mathcal{L}_{E_1-1}$, donner l'expression de la composante du moment suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ en fonction de la composante de la force suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$ et du pas de filetage p .

$\mathcal{L}_{E_1-1}$: liaison hélicoïdale à droite d'axe $(B, \vec{y}_0)$ et de pas p .

$$M_{E_1-1} = - \frac{P}{2\pi} Y_{E_1-1}$$

B5 - On suppose que (5) est fixe, écrire l'équation scalaire issue de l'application du théorème du moment statique à l'écrou (1) en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

T.M.S. appliqué à (1) en projection sur $\vec{y}_0 \Rightarrow \vec{M}_{B(1 \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 = 0$

$$\vec{M}_{B(E_1 \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{B(5 \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{B(M_2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 = 0$$

$$M_{E_1-1} + \underbrace{(\vec{R}_{5 \rightarrow 1} \wedge \vec{PB}) \cdot \vec{y}_0}_{= 0 \text{ car } \vec{PB} \text{ est parallèle à } \vec{y}_0} - C_{m_2} = 0$$

$$C_{m_2} = M_{E_1-1}$$

B6 - Le moule est fermé, écrire l'équation scalaire déduite de l'application du théorème de la résultante statique à l'ensemble $\{E_1\}$ en projection sur l'axe $(B, \vec{y}_0)$.

T.R.S. appliquée à $\{E_1\}$ en projection sur $(B, \vec{y}_0) \Rightarrow \vec{R}_{(E_1 \rightarrow E_1)} \cdot \vec{y}_0 = 0$

$$\vec{R}_{(5 \rightarrow E_1)} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{(1 \rightarrow E_1)} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{(4 \rightarrow E_1)} \cdot \vec{y}_0 = 0$$

$$-Y_{E_1-1} + N_D = 0$$

$$N_D = Y_{E_1-1}$$

B7 - Déduire l'expression du couple C_{m_2} du moteur (M_2) en fonction de la force de fermeture du moule N_D .

$$C_{m_2} = M_{E_1-1} = - \frac{P}{2\pi} Y_{E_1-1} \text{ avec } Y_{E_1-1} = N_D$$

$$C_{m_2} = - \frac{P}{2\pi} N_D$$

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer le temps nécessaire pour l'ouverture du moule (4).

B8 – Déterminer le torseur cinématique $\{9(1/5)\}_B$ du solide **(1)** au point B au cours de son mouvement par rapport à (5),

$$\{9(1/5)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\varphi} \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad \left(\vec{0} = \text{colinéaires } \vec{0} \right)$$

B9 – Déterminer le torseur cinématique $\{9(E_1/5)\}_B$ de l'ensemble **(E1)** au point B au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{9(E_1/5)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \lambda \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \quad (\text{gliss. sur } \vec{y}_0)$$

B10 – Déterminer le torseur cinématique $\{9(1/E_1)\}_B$ de l'ensemble **(E1)** au point B au cours de son mouvement par rapport à l'ensemble (5).

$$\{9(1/E_1)\}_B = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\varphi} \vec{y}_0 \\ -\frac{p}{2\pi} \dot{\varphi} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \quad \left(\vec{0} = \vec{R}(1/5) + \vec{R}(5/E_1) \right)$$

B11 – Donner la relation liant la vitesse linéaire de la vis (2) $\dot{\lambda}$ à la vitesse de rotation de l'écrou (1) $\dot{\varphi}$.

$$\vec{V}(B \in 1/2) = \vec{V}(B \in 1/E_1) = \vec{V}(B \in 1/5) + \vec{V}(B \in 5/E_1) = -\vec{V}(B \in E_1/5) = -\dot{\lambda} \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow -\dot{\lambda} \vec{y}_0 = -\frac{p}{2\pi} \dot{\varphi} \vec{y}_0 \quad \dot{\lambda} = \frac{p}{2\pi} \dot{\varphi}$$

B12 – Afin de faciliter l'opération de démoulage, le couvercle **(3)** doit s'éloigner du moule d'une distance $\lambda_0 = 500 \text{ mm}$. Déterminer l'expression du temps t_0 nécessaire à l'ouverture du moule en fonction de λ_0 , ω_{m2} et le pas p .

$$\Delta \lambda = \frac{p}{2\pi} \dot{\varphi} \Delta t \Rightarrow \lambda_0 = \frac{p}{2\pi} \dot{\varphi} t_0 \quad \text{avec } \dot{\varphi} = \omega_{m2}$$

$$t_0 = \frac{2\pi \lambda_0}{p \omega_{m2}}$$

B13 – Calculer le temps t_0 .

$$t_0 = \frac{2\pi \lambda_0}{p \omega_{m2}} = \frac{2\pi \lambda_0}{p \cdot \frac{2\pi N_{m2}}{60}} \Rightarrow t_0 = \frac{60 \cdot \lambda_0}{p N_{m2}} = \frac{60 \times 500}{5 \times 200}$$

$$t_0 = 3 \text{ s}$$

B-II-Etude cinématique et dynamique de l'unité de rotation (figures 3 et 6)

L'objectif de cette partie est de déterminer l'expression du couple, au niveau de l'arbre (9), (noté C_{m7}) nécessaire pour faire actionner l'unité de rotation.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le moyeu principal (7) de masse m_7 et de centre d'inertie G_7 situé sur l'axe $(O, \bar{x}_0)$ est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \bar{x}_0)$ avec le bâti (0). Le repère $R_7(O, \bar{x}_7, \bar{y}_7, \bar{z}_7)$ est lié à (7), on désigne par α (rotation principale) le paramètre de rotation tel que $\alpha = (\bar{y}_0, \bar{y}_7) = (\bar{z}_0, \bar{z}_7)$ (figure 6). La matrice d'inertie du moyeu (7) en O, dans la

$$\text{base } B_7(\bar{x}_7, \bar{y}_7, \bar{z}_7) \text{ est définie par : } [I_O(7)] = \begin{bmatrix} A_7 & 0 & 0 \\ 0 & B_7 & 0 \\ 0 & 0 & C_7 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_7, \bar{y}_7, \bar{z}_7)}$$

- ✓ Le solide (S_4) de masse m_4 et de centre d'inertie G_4 est en liaison pivot parfaite d'axe $(O, \bar{y}_4)$ avec le moyeu principal (7). Le repère $R_4(O, \bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$ est lié à (S_4) , on désigne par θ (rotation secondaire) le paramètre de rotation tel que $\theta = (\bar{z}_7, \bar{z}_4) = (\bar{x}_7, \bar{x}_4)$. $\overrightarrow{OG_4} = a \bar{x}_4$. La matrice d'inertie du solide (S_4) en O, dans

$$\text{la base } B_4(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4) \text{ est définie par : } [I_O(S_4)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)}$$

- ✓ Le couple (au niveau de l'arbre 9) appliqué sur le moyeu principal (7) de la machine est noté : $\vec{C}_{m7} = C_{m7} \bar{x}_0$.
- ✓ Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

B14- Déterminer le torseur cinématique $\{\mathcal{V}(S_4/0)\}_O$ du solide (S_4) au point O au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_4(\bar{x}_4, \bar{y}_4, \bar{z}_4)$) :

$$\vec{\omega}(S_4/0) = \vec{\omega}(S_4/7) + \vec{\omega}(7/0) = \dot{\theta} \bar{y}_4 + \dot{\alpha} \bar{x}_7$$

$$\bar{x}_7 = \bar{x}_0 = \cos \theta \bar{x}_4 + \sin \theta \bar{z}_4$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}(S_4/0) = \dot{\alpha} \cos \theta \bar{x}_4 + \dot{\theta} \bar{y}_4 + \dot{\alpha} \sin \theta \bar{z}_4$$

$$\vec{v}(G_4/0) = \vec{v}$$

$$\{\mathcal{V}(S_4/0)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \cos \theta \bar{x}_4 + \dot{\theta} \bar{y}_4 + \dot{\alpha} \sin \theta \bar{z}_4 \\ \vec{v} \end{array} \right\}_{B_4}^O$$

B15 - Déterminer le moment cinétique du solide (S_4) au point O dans son mouvement par rapport au bâti (0) : $\vec{\sigma}_O(S_4/0)$ (exprimé dans la base $B_4(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$) :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O(S_4/0) &= [\vec{I}_O(S_4)] \cdot \vec{\omega}(S_4/0) \quad (\text{car } \vec{\omega}(S_4/0) = \dot{\theta} \vec{e}_3) \\ &= \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{bmatrix}_{B_4} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}_{B_4}\end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_O(S_4/0) = A_4 \dot{\theta} \cos \theta \vec{x}_4 + B_4 \dot{\theta} \vec{y}_4 + C_4 \dot{\theta} \sin \theta \vec{z}_4$$

B16 - Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide (S_4) au point O dans son mouvement par rapport au bâti (0) : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(S_4/0)$.

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O(S_4/0) \cdot \vec{x}_0 &= \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(S_4/0) \Big|_0 \cdot \vec{x}_0 = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(S_4/0) \cdot \vec{x}_0 \quad (\text{car } \frac{d\vec{x}_0}{dt} \Big|_0 = \vec{0}) \\ &= \frac{d}{dt} (A_4 \dot{\theta} \cos^2 \theta + C_4 \dot{\theta} \sin^2 \theta) \\ &= A_4 (\ddot{\theta} \cos^2 \theta - 2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) + C_4 (\ddot{\theta} \sin^2 \theta + 2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) \\ &= \ddot{\theta} (A_4 \cos^2 \theta + C_4 \sin^2 \theta) + 2(C_4 - A_4) \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(S_4/0) = \ddot{\theta} (A_4 \cos^2 \theta + C_4 \sin^2 \theta) + (C_4 - A_4) \dot{\theta} \sin 2\theta$$

B17 - Déterminer la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique du solide (7) au point O dans son mouvement par rapport au bâti (0) : $\vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(7/0)$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O(7/0) \cdot \vec{x}_0 &= \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(7/0) \Big|_0 \cdot \vec{x}_0 = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_O(7/0) \cdot \vec{x}_0 = \frac{d}{dt} ([\vec{I}_O(7)] \vec{\omega}(7/0)) \cdot \vec{x}_0 \\ \Rightarrow \vec{\sigma}_O(7/0) \cdot \vec{x}_0 &= \frac{d}{dt} (A_7 \dot{\theta})\end{aligned}$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{\sigma}_O(7/0) = A_7 \ddot{\theta}$$

B18 - Déterminer le moment des efforts extérieurs appliqués à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 \cdot \vec{M}_O(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$.

$$\vec{\Sigma} = \{(1), (2), (3), (4), (7)\}; \vec{\Pi}_O(1 \rightarrow 7) \quad \vec{r}_O = 0 \text{ car } HO \text{ est colinéaire à } \vec{x}_0$$

$$\textcircled{*} \vec{\Pi}_O(2 \rightarrow 7) \quad \vec{r}_O = C_{m7} \vec{z}_0$$

$$\textcircled{0} \vec{\Pi}_O(3 \rightarrow S_4) \quad \vec{r}_O = (\vec{R}_1(\vec{g} \rightarrow 4) \wedge C_4 \vec{r}) \cdot \vec{x}_0 = (-m_4 g \vec{y}_0 \wedge (-a \vec{x}_4)) \cdot \vec{x}_0$$

$$= (\vec{x}_0 \wedge (-m_4 g \vec{y}_0)) \cdot (-a \vec{x}_4) = -m_4 g \vec{z}_0 \cdot (-a \cos \theta \vec{x}_4 - m \sin \theta \vec{z}_4)$$

$$= -m_4 g \vec{z}_0 \cdot (-a (\cos \theta \vec{x}_4 - \sin \theta \vec{z}_4)) = m_4 a g \cos \theta \sin \theta$$

$$\textcircled{0} \vec{\Pi}_O(4 \rightarrow 7) \quad \vec{r}_O = (\vec{R}_1(\vec{g} \rightarrow 7) \wedge C_7 \vec{r}) \cdot \vec{x}_0 = 0$$

$$\in \vec{e}_1(\vec{O} \vec{x}_0)$$

$$\vec{x}_0 \cdot \vec{M}_O(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = C_{m7} - m_4 a g \sin \theta \cos \theta$$

B19 - En appliquant le théorème du moment dynamique à l'ensemble $\Sigma = \{S_4, 7\}$ au point O en projection sur $\vec{x}_0$, déduire l'expression du couple C_{m7} en fonction de α, θ , leurs dérivées et des données du mécanisme.

$$\text{I.M.D. appliqué à } \Sigma \text{ au point } O \text{ en projection sur } \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{\Pi}_O(\Sigma \rightarrow \Sigma) \cdot \vec{x}_0 = \vec{S}_O(\Sigma/O) \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{S}_O(\Sigma/O) \cdot \vec{x}_0 = \vec{S}_O(S_4/O) \cdot \vec{x}_0 + \vec{S}_O(7/O) \cdot \vec{x}_0$$

$$= (A_4 \cos^2 \theta + C_4 \sin^2 \theta + A_7) \ddot{\alpha} + (C_4 - A_4) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta + m_4 a g \sin \theta \cos \theta$$

$$C_{m7} = (A_4 \cos^2 \theta + C_4 \sin^2 \theta + A_7) \ddot{\alpha} + (C_4 - A_4) \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin 2\theta + m_4 a g \sin \theta \cos \theta$$

B-III- Étude de la chaîne de transmission (figures 3 et 7)

❖ Étude cinématique

L'objectif de cette étude est de déterminer la relation entre la rotation principale $\dot{\alpha}$ et la rotation secondaire $\dot{\theta}$ du système.

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Le rayon de la roue (6) est noté R_6 .
- ✓ Le rayon de la roue (8) est noté R_8 .

B20 - Déterminer le torseur cinématique $\{9(6/0)\}_F$ de la roue (6) au point F au cours de son mouvement par rapport au bâti (0). (exprimé dans la base $B_7(\bar{x}_7, \bar{y}_7, \bar{z}_7)$) :

$$\vec{r}_{(6/0)} = \vec{r}_{(3/0)} = \dot{\theta} \vec{y}_4 + \dot{\alpha} \vec{x}_7 ; \vec{y}_4 = \vec{y}_7 \Rightarrow \vec{r}_{(6/0)} = \dot{\theta} \vec{y}_7 + \dot{\alpha} \vec{x}_7$$

$$\vec{V}(F \in 6/0) = \frac{d\vec{OF}}{dt} \Big|_0 = \frac{d}{dt} (-R_8 \vec{y}_4) \Big|_0 = -R_8 (\vec{r}_{(3/0)} \wedge \vec{y}_4) = -R_8 \dot{\alpha} \vec{z}_7$$

$$\{9(6/0)\}_F = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{x}_7 + \dot{\theta} \vec{y}_7 \\ -R_8 \dot{\alpha} \vec{z}_7 \end{array} \right\}_{B_7}$$

B21 - En utilisant la condition de roulement sans glissement entre les roues (6) et (8) au point G, déterminer une relation entre la vitesse de rotation principale $\dot{\alpha}$ et la vitesse de rotation secondaire $\dot{\theta}$.

$$CRSG \Rightarrow \vec{V}(G \in 6/8) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(G \in 6/0) - \vec{V}(G \in 8/0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(G \in 6/0) = \vec{0} \quad \text{car (8) est fixe}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(F \in 6/0) + \vec{r}_{(G/0)} \wedge \vec{\omega} = \vec{0} \Rightarrow -R_8 \dot{\alpha} \vec{z}_7 + (\dot{\alpha} \vec{x}_7 + \dot{\theta} \vec{y}_7) \wedge (-R_6 \vec{x}_7) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -R_8 \dot{\alpha} \vec{z}_7 + R_6 \dot{\theta} \vec{z}_7 = \vec{0} \Rightarrow -R_8 \dot{\alpha} + R_6 \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\alpha} = \frac{R_6}{R_8} \dot{\theta}$$

❖ Étude énergétique

L'objectif de cette étude est de déterminer l'expression du couple C_{m1} délivré par le moteur (M_1).

On suppose que :

- ✓ Le repère $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est lié au bâti (0) est supposé galiléen.
- ✓ Les poulies (P_1) et (P_2) sont en liaisons pivots d'axe $\bar{x}_0$ avec le bâti (0) aux points J et I respectivement.
- ✓ L'action mécanique du moteur (M_1) sur la poulie (P_1) est modélisé par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m1} = C_{m1} \bar{x}_0$.
- ✓ L'action mécanique de la partie réceptrice de la machine sur la poulie (P_2) est modélisée par un torseur couple de moment : $\vec{C}_{m7} = -C_{m7} \bar{x}_0$.
- ✓ Les courroies sont supposées inextensibles et de masse négligeables.
- ✓ Toutes les liaisons sont parfaites.

B22 - Déterminer l'énergie cinétique du système $\Sigma_3 = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ dans son mouvement par rapport au bâti (0) en fonction de J_1 , J_2 , r_1 et ω_{m1} (Voir figure 7).

$$E_c(\Sigma_3/0) = E_c(\Sigma_1/0) + E_c(\Sigma_2/0)$$

$$\textcircled{*} E_c(\Sigma_1/0) = \frac{1}{2} J_1 \omega_{m1}^2 \quad (\text{rotation autour de l'axe fixe } (J, \vec{z}_0))$$

$$\textcircled{*} E_c(\Sigma_2/0) = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \quad (\text{rotation autour de l'axe fixe } (J, \vec{z}_1))$$

$$\Rightarrow E_c(\Sigma_3/0) = \frac{1}{2} J_1 \omega_{m1}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 \quad \text{avec } \omega_2 = r_1 \omega_{m1}$$

$$E_c(\Sigma_3/0) = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 r_1^2) \omega_{m1}^2$$

B23 - Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$\bar{\Sigma}_3 = \{M_1, \text{répulsion } (0)\}$$

$$P(M_1 \rightarrow \Sigma_1/0) = C_{m1} \omega_{m1} \quad ; \quad P(\text{répulsion} \rightarrow \Sigma_2/0) = -C_{m2} \omega_2 = -C_{m2} r_1 \omega_{m1}$$

$$P_{0 \rightarrow \Sigma_1/0} = P_{0 \rightarrow \Sigma_2/0} = 0 \quad \text{car liaisons parfaites et } R \text{ linéaire } (0)$$

$$P(\bar{\Sigma}_3 \rightarrow \Sigma_3/0) = (C_{m1} - r_1 C_{m2}) \omega_{m1}$$

B24 - Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures s'exerçant au système Σ_3 au cours de son mouvement par rapport au bâti (0).

$$P_{\text{int}}(\Sigma_3) = 0$$

B25 - Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et déterminer une expression du couple moteur C_{m1} en fonction de C_{m2} , J_1 , J_2 , r_1 et $\dot{\omega}_{m1}$.

$$\text{T.E.C.} \Rightarrow \frac{dE_c(\Sigma_3/0)}{dt} = P(\bar{\Sigma}_3 \rightarrow \Sigma_3/0) + P_{\text{int}}(\Sigma_3)$$

$$\Rightarrow (J_1 + J_2 r_1^2) \dot{\omega}_{m1} \omega_{m1} = (C_{m1} - r_1 C_{m2}) \omega_{m1}$$

$$C_{m1} = (J_1 + J_2 r_1^2) \dot{\omega}_{m1} + r_1 C_{m2}$$