MP-PC-PT

RÉSUMÉ MSI & TDS DE TOUT L'ANNÉE

Professional Home Improvement and Repair Services



MY_PREPA

+216 24331941

myprepa27

my__prepa

http://www.myprepa27.wix.com/website

myprepa27@gmail.com

+216 24331941

CHAPITRE 2

ETUDE CINETIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

2.1- NOTIONS DE SYMETRIE

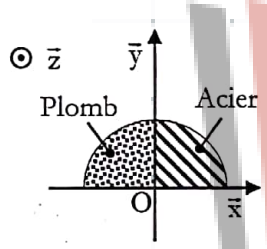
2.1.1- Eléments de symétrie géométrique

On dit qu'un élément géométrique (E) (point, axe ou plan) est un élément de symétrie géométrique si et seulement si :

$\forall M \in \mathcal{D}, \exists M' \in \mathcal{D}'$ *Indépendamment de la matière constitutive*

M' et D' sont le point et le domaine images de M et de D par rapport à l'élément (E).

Exemple :



- *L'axe $(O,\vec{y})$ et le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$ sont 2 éléments de symétrie géométrique ;*

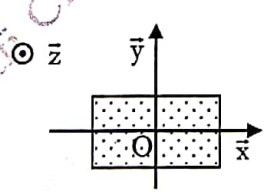
☛ *Si le solide est plan, alors le plan du solide est toujours un plan de symétrie géométrique (et même symétrie matérielle) $\Rightarrow$ le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ est un plan de symétrie matérielle (voir paragraphe suivant).*

2.1.2- Eléments de symétrie matérielle

On dit qu'un élément géométrique (E) (point, axe ou plan) est un élément de symétrie matérielle si et seulement si :

- *(E) est un élément de symétrie géométrique ;*
- *La répartition de la matière de part et d'autre de (E) est symétrique.*

Exemple :



Les axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$, les plans $(O,\vec{x},\vec{y})$, $(O,\vec{y},\vec{z})$ et $(O,\vec{x},\vec{z})$ sont tous des éléments de symétrie matérielle.

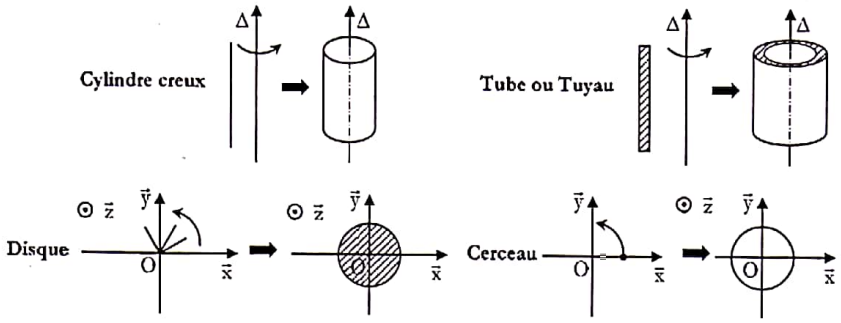
2.1.3- Axes de symétrie de révolution

On dit qu'un axe (Δ) est un axe de symétrie de révolution si et seulement si le solide (S) est obtenu par la révolution d'un élément géométrique (Σ) (point, courbe ou surface) autour de cet axe.

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

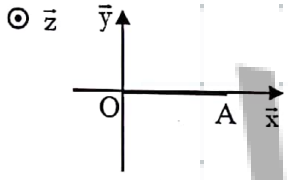
Exemples :



2.2- SOLIDE CONTINU – SOLIDE COMPOSE

On appelle solide continu (S) (intégrable ou élémentaire) si et seulement si, ses caractéristiques géométriques, physiques ou inertielles sont obtenues par intégration simple, double ou triple selon la nature de celui-ci.

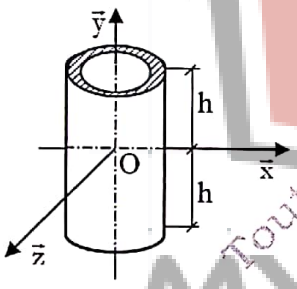
Exemple 1 : Tige



(S) est une tige (OA) composé d'un matériau homogène de longueur ℓ et densité linéique de masse λ.

La masse m du solide (S) est : $m = \int_0^{\ell} \lambda \, dx = \lambda \ell$.

Exemple 2 : Tube (Tuyau)



(S) est un tube de rayon intérieur « r », de rayon extérieur « R » et de hauteur « 2h ».

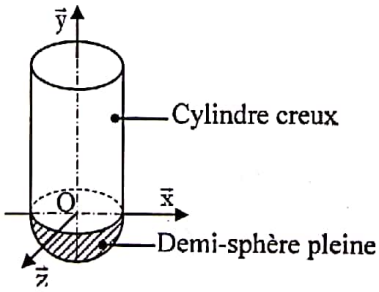
Le volume V du solide (S) est :

$$V = \int_{Solide\ (s)} dV = \int_{Solide\ (s)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dy$$

$$= \int_r^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-h}^{h} dy = 2\pi h(R^2 - r^2)$$

On appelle solide composé (S) (ou ensemble de solides) un solide constitué de n solides élémentaires (Si) : $(S) = \cup_{i=1}^{n}(S_i)$ *et dont les caractéristiques géométriques, physiques ou inertielles sont obtenues par une somme simple ou pondérée des solides élémentaires constitutifs.*

Exemple :



- *La masse totale « M » est la somme « simple » de la masse « m_1 » du cylindre et de la masse « m_2 » de la ½ sphère :* $M = m_1 + m_2$.
- *Le vecteur position du centre d'inertie « $\overrightarrow{OG}$ » du solide est la somme « pondérée » du vecteur position du centre d'inertie « $\overrightarrow{OG_1}$ » du cylindre et du vecteur « $\overrightarrow{OG_2}$ » de la ½ sphère :* $M\,\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\,\overrightarrow{OG_2}$.

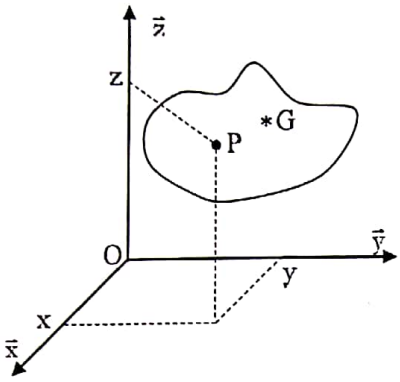
© Lotfi CHEIKH – Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY_PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

2.3- ELEMENTS D'INERTIE D'UN SOLIDE

2.3.1- Centre d'inertie d'un solide

a- Solide continu (ou intégrable)



- *Soit (S) un solide homogène de masse totale m et de centre d'inertie (ou centre de masse) G ;*
- *Soit P un point quelconque du solide (S) de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère* $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Le centre d'inertie G est défini par le vecteur position ((S) est le solide) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm$$

G peut être également défini par ses coordonnées cartésiennes X_G, Y_G et Z_G comme suit :

$$X_G = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} x\, dm\ ;\ Y_G = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} y\, dm\ ;\ Z_G = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} z\, dm$$

Remarque : *Le centre d'inertie G appartient à tout élément de symétrie matérielle (axe ou plan)*

b- Solide composé



Soit (S) un solide composé de n solides (Si) de masse mi et de centre d'inertie Gi chacun.

Le centre d'inertie G est défini par la formule du barycentre suivante :

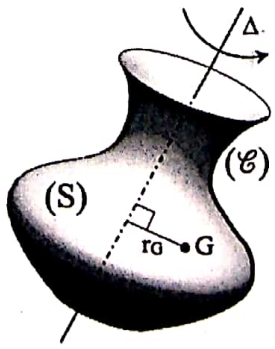
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OG_i} \quad ; \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Théorèmes de Guldin

1ère théorème

La surface (S) engendrée par la révolution de la courbe (𝒞), de longueur L et de centre d'inertie G, autour d'un axe (Δ) situé dans son plan et ne la traversant pas est égale à :

$$S = 2\pi r_G L$$



r_G : est la distance (la plus courte) entre G et Δ (projection orthogonale de G sur Δ).

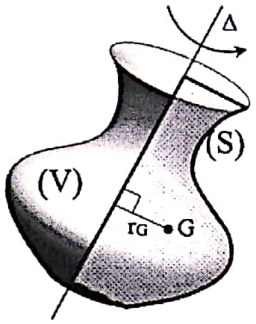
Reproduction interdite © partielle est illicite
MY_PREPA
LOTFI CHEIKH

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

2ème théorème

Le volume (V) engendré par la révolution de la surface (S) de centre d'inertie G, autour d'un axe (Δ) situé dans son plan et ne la traversant pas est égal à :

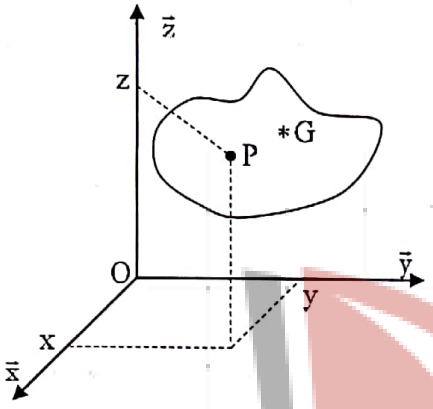
$$V = 2\pi r_G S$$



r_G : est la distance (la plus courte) entre G et Δ (projection orthogonale de G sur Δ).

2.3.2- Matrice d'inertie d'un solide

a- Définition



- *Soit (S) un solide homogène de masse totale m et de centre d'inertie G.*
- *Soit P un point quelconque du solide (S) de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.*

La Matrice (ou tenseur) d'inertie du solide (S) au point O, dans la base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, notée : $[I_O(S)]_{\mathcal{B}}$ est la matrice carrée (3,3), symétrique, définie par :

$$[I_O(S)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

- *Les moments d'inertie du solide (S) par rapport aux axes respectifs $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ sont définis par :*

$$A = \int_{P\in(S)} (y^2+z^2)dm \; ; \; B = \int_{P\in(S)} (x^2+z^2)dm \; ; \; C = \int_{P\in(S)} (x^2+y^2)dm$$

- *Les produits d'inertie du solide (S) par rapport aux plans respectifs $(O,\vec{y},\vec{z})$, $(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{x},\vec{y})$ sont définis par :*

$$D = \int_{P\in(S)} yz\,dm \; ; \; E = \int_{P\in(S)} xz\,dm \; ; \; F = \int_{P\in(S)} xy\,dm$$

b- Influence de la symétrie matérielle sur la simplification de la matrice d'inertie

➢ *Quels sont les éléments de symétrie qui nous intéressent ?*

Pour Déterminer la forme générale de la matrice d'inertie : $[I_O(S)]_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, il n'y a que six éléments de symétrie qui nous intéressent et rien d'autre. Ce sont les 3 axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ pour la symétrie de révolution et les 3 plans $(O,\vec{y},\vec{z})$, $(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{x},\vec{y})$ pour la symétrie matérielle.

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

➢ *Existence d'axes de symétrie de révolution*

✓ *Si l'axe* $(O,\vec{x})$ *est un axe de symétrie de révolution de* $(S) \Rightarrow B = C$;
✓ *Si l'axe* $(O,\vec{y})$ *est un axe de symétrie de révolution de* $(S) \Rightarrow A = C$;
✓ *Si l'axe* $(O,\vec{z})$ *est un axe de symétrie de révolution de* $(S) \Rightarrow A = B$;

Remarque : *S'il existe au moins deux axes de symétrie de révolution, alors*
2 axes de Symétrie de révolution $\Rightarrow A = B = C$

➢ *Existence de plans de symétrie matérielle*

✓ *Si le plan* $(O,\vec{y},\vec{z})$ *est un plan de symétrie matérielle de* $(S) \Rightarrow E = F = 0$; $(x=0)$
✓ *Si le plan* $(O,\vec{x},\vec{z})$ *est un plan de symétrie matérielle de* $(S) \Rightarrow D = F = 0$; $(y=0)$
✓ *Si le plan* $(O,\vec{x},\vec{y})$ *est un plan de symétrie matérielle de* $(S) \Rightarrow D = E = 0$; $(z=0)$

Remarque : *S'il existe au moins deux plans de symétrie matérielle, alors*
2 Plans de Symétrie $\Rightarrow D = E = F = 0$

c – Théorème généralisé de Huygens

Le théorème généralisé de Huygens établit la relation entre les matrices d'inertie d'un solide (S) dans la même base $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *entre les points A et G. Où A est un point quelconque de l'espace et G est le centre d'inertie du solide (S). Ce théorème s'écrit sous la forme :*

$$[I_A(S)]_{\mathcal{B}} = [I_G(S)]_{\mathcal{B}} + m\,[D]_{\mathcal{B}}$$

- *m est la masse totale du solide (S) ;*
- $[D]_{\mathcal{B}}$ *est une matrice déterminée à partir des coordonnées du vecteur position* $\overrightarrow{AG}$ *dans la base* $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *:*

Si $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, *alors :* $[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$

d- Forme simplifiée du théorème de Huygens

Le théorème généralisé s'écrit sous la forme : $[I_A(S)]_{\mathcal{B}} = [I_G(S)]_{\mathcal{B}} + m\,[D]_{\mathcal{B}}$. *Par identification du moment d'inertie « C » (par rapport à l'axe* $(A,\vec{z})$*), par exemple, il vient :*

$$I_{/(A,\vec{z})}(S) = I_{/(G,\vec{z})}(S) + m(a^2+b^2)$$

Or (a^2+b^2) *est la distance qui sépare les deux axes* $(A,\vec{z})$ *et* $(G,\vec{z})$*. Soit « d », cette distance. Le théorème de Huygens s'écrit sous sa forme simplifiée couramment utilisée :*

$$I = I_G + m\,d^2$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

- I est le moment d'inertie par rapport à l'un des axes $(A,\vec{x})$, $(A,\vec{y})$ ou $(A,\vec{z})$;
- I_G est le moment d'inertie par rapport à l'un des axes correspondants $(G,\vec{x})$, $(G,\vec{y})$ ou $(G,\vec{z})$;
- d est la distance qui sépare les deux axes ;
- m est la masse totale du solide (S).

e- Formule de changement de base

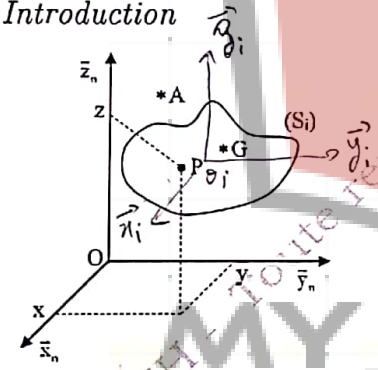
La formule de changement de base permet d'établir la relation entre les matrices d'inertie d'un solide (S), au même point, dans deux bases différentes : Une base dite nouvelle $\mathcal{B}_n(\vec{x_n},\vec{y_n},\vec{z_n})$ et une base dite ancienne $\mathcal{B}_i(\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$. Cette formule s'écrit sous la forme :

$$[I_A(S)]_{\mathcal{B}_n} = [P]_n^i\,[I_A(S)]_{\mathcal{B}_i}\,[P]_i^n$$

- $[P]_i^n$ est la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle ;
- $[P]_n^i$ est la transposée de la matrice $[P]_i^n$;

2.4- TORSEUR CINETIQUE

2.4.1- Introduction



- Soit $(S_i) \equiv (i)$ un solide homogène de masse totale m et de centre d'inertie G en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_n(O_n,\vec{x_n},\vec{y_n},\vec{z_n})$;
- Soit P un point quelconque du solide (i) de coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $\mathcal{R}_i(O_i,\vec{x_i},\vec{y_i},\vec{z_i})$ lié au solide (i) ;

- La Matrice d'inertie du solide (i) au point A, dans une base donnée $\mathcal{B}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est notée : $[I_A(i)]_{\mathcal{B}}$.
- On définit l'opérateur d'inertie, au point A, du solide (i) appliqué au vecteur $\vec{\Omega}(i/n)$ par :

$$\overrightarrow{J_A(i,\vec{\Omega}(i/n))} = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP})\,dm = [I_A(i)]_{\mathcal{B}}.\vec{\Omega}(i/n)$$

2.4.2- Définition du torseur cinétique

Le torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement) au point A, du solide (S_i) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_n(O_n,\vec{x_n},\vec{y_n},\vec{z_n})$ est définit par :

© Tout droit réservé. Toute reproduction intégrale ou partielle est interdite

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

Torseur Cinétique

$$\{\mathcal{C}(i/n)\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{R}(\mathcal{C}) \\ \vec{\sigma}_A(i/n) \end{matrix}\right\}_A$$

- $\vec{R}(\mathcal{C}) = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P/n)dm$: *est la résultante cinétique ou quantité de mouvement du solide (i) dans son mouvement par rapport à (n) ;*
- $\vec{\sigma}_A(i/n) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/n)dm$: *est le moment cinétique, au point A, du solide (i) dans son mouvement par rapport à (n).*

Remarques

✓ $\int_{P\in(S)} \vec{V}(P/n)dm = \int_{(S)} \vec{V}(P \in i/n)dm$;

✓ $\{\mathcal{C}(i/n)\}_A$ *est un torseur. Il devrait alors satisfaire la définition d'un torseur, à savoir :*

(a) $\vec{R}(\mathcal{C})$ *est un invariant vectoriel ;*

(b) $\vec{\sigma}_A(i/n)$ *vérifie la loi de transfert des moments :*

$\forall$ *A et B deux points quelconques :* $\vec{\sigma}_B(i/n) = \vec{\sigma}_A(i/n) + \vec{R}(\mathcal{C}) \wedge \overrightarrow{AB}$

2.4.3- Expression simplifiée de la résultante cinétique

Le centre d'inertie G est défini par : $m\overrightarrow{OG} = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}dm$, *alors :*

$$m\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}_{/\mathcal{R}_n} = \int_{P\in(S)} \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}_{/\mathcal{R}_n} dm \Rightarrow m\vec{V}(G/n) = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P/n)\, dm$$

Résultante Cinétique

$$\hookrightarrow \vec{R}(\mathcal{C}) = m\vec{V}(G/n)$$

➔ *La résultante cinétique est un champ vectoriel uniforme.*

2.4.4- Expression simplifiée du moment cinétique

D'après la Loi de Transfert du Moment cinématique, nous avons :

$$\vec{V}(P \in i/n) = \vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\begin{aligned} Or : \ \vec{\sigma}_A(i/n) &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/n)dm \\ &= \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP}\right] dm \\ &= \left(\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP}\, dm\right) \wedge \vec{V}(A \in i/n) + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP})dm \\ &= m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in i/n) + \vec{J}_A(i, \vec{\Omega}(i/n)) \end{aligned}$$

Moment Cinétique

$$\hookrightarrow \vec{\sigma}_A(i/n) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in i/n) + \vec{J}_A(i, \vec{\Omega}(i/n))$$

Rappels

- $\vec{J}_A(i, \vec{\Omega}(i/n)) = [I_A(i)]_B\ \vec{\Omega}(i/n)$;
- $\vec{V}(A \in i/n)$ *est une vitesse « d'entraînement ».*

Toute reproduction ou partielle est illicite

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

2.5- TORSEUR DYNAMIQUE

2.5.1- Définition

Le torseur dynamique (ou torseur quantité des accélérations) au point A, du solide (Si) dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_n(O_n, \vec{x_n}, \vec{y_n}, \vec{z_n})$ est par définit par :

$$\{\mathcal{D}(i/n)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\mathcal{D}) \\ \vec{\delta_A}(i/n) \end{Bmatrix}_A$$

Torseur Dynamique

- $\vec{R}(\mathcal{D}) = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P/n)dm$: *est la résultante dynamique ou quantité d'accélérations du solide (i) dans son mouvement par rapport à (n) ;*
- $\vec{\delta_A}(i/n) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/n)dm$: *est le moment dynamique, au point A, du solide (i) dans son mouvement par rapport à (n).*

Remarques :

- $\vec{R}(\mathcal{D})$ *est un invariant vectoriel ;*
- $\vec{\delta_A}(i/n)$ *vérifie la loi de transfert des moments :*

  $\forall$ *A et B deux points quelconques :* $\vec{\delta_B}(i/n) = \vec{\delta_A}(i/n) + \vec{R}(\mathcal{D}) \wedge \overrightarrow{AB}$

2.5.2- Expression simplifiée de la résultante dynamique

D'après l'expression de la résultante cinétique : $m\,\vec{V}(G/n) = \int_{P\in(S)} \vec{V}(P/n)\,dm$,

nous avons : $m\,\vec{\gamma}(G/n) = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P/n)\,dm$.

$$\hookrightarrow \vec{R}(\mathcal{D}) = m\,\vec{\gamma}(G/n)$$

Résultante dynamique

➔ *La résultante dynamique est un champ vectoriel uniforme.*

2.5.3- Expression simplifiée du moment dynamique

D'après le moment cinétique, nous avons : $\vec{\sigma_A}(i/n) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/n)dm$

$$\Rightarrow : \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma_A}(i/n)\right)_{/\mathcal{R}_n} = \frac{d}{dt}\left(\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/n)dm\right)_{/\mathcal{R}_n}$$

$$= \int_{P\in(S)} \left(\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_n} \wedge \vec{V}(P/n)\,dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\frac{d\vec{V}(P/n)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_n} dm$$

$$= -\int_{P\in(S)} \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_n} \wedge \vec{V}(P/n)\,dm + \int_{P\in(S)} \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_n} \wedge \vec{V}(P/n)\,dm + \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/n)\,dm$$

$$= -\vec{V}(A/n) \wedge \left(m\,\vec{V}(G/n)\right) + \vec{0} + \vec{\delta_A}(i/n)\Big)$$

moment Dynamique

$$\hookrightarrow \vec{\delta_A}(i/n) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma_A}(i/n)\right)_{/\mathcal{R}_n} + m\,\vec{V}(A/n) \wedge \vec{V}(G/n)$$

Remarque

$\vec{V}(A/n)$ est une vitesse « absolue » obtenue par dérivation.

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction totale ou partielle est interdite
MY_PREPA

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

2.6- CAS DE N SOLIDES

Si (S) est composé de N solides (S_i), alors les torseurs cinétique et dynamique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère ($\mathcal{R}_n$) sont :

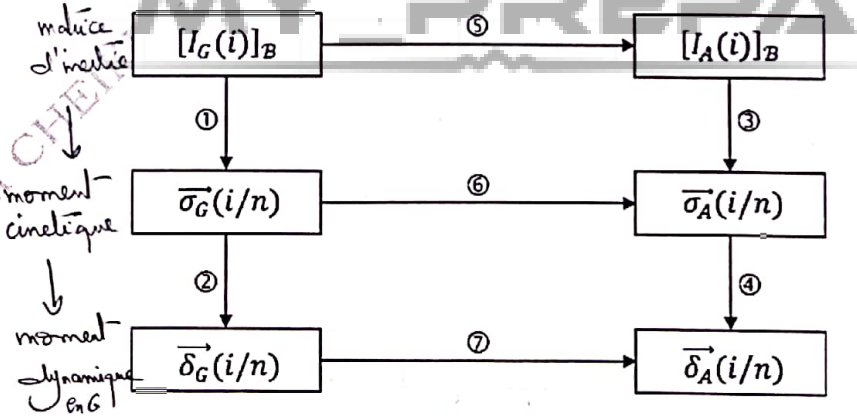
$$\{\mathcal{C}(S/n)\}_A = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{C}(i/n)\}_A \quad et \quad \{\mathcal{D}(S/n)\}_A = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{D}(i/n)\}_A$$

2.7- CAS PARTICULIERS

Cas N°	Désignation	$\{\mathcal{C}(i/n)\}_{A\ ou\ G}$	$\{\mathcal{D}(i/n)\}_{A\ ou\ G}$
1	$m = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$
2	Masse m concentrée au point G	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{V}(G/n) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{\gamma}(G/n) \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$
3	A est confondu avec G	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{V}(G/n) \\ \overrightarrow{J_G}(i,\vec{\Omega}(i/n)) \end{matrix}\right\}_G$	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{\gamma}(G/n) \\ \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_G}(i/n))_{/\mathcal{R}_n} \end{matrix}\right\}_G$
4	A est fixe dans $\mathcal{R}_n$	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{V}(G/n) \\ \overrightarrow{J_A}(i,\vec{\Omega}(i/n)) \end{matrix}\right\}_A$	$\left\{\begin{matrix} m\,\vec{\gamma}(G/n) \\ \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_A}(i/n))_{/\mathcal{R}_n} \end{matrix}\right\}_A$

2.8- METHODE DE RESOLUTION

- *A priori, Il faut connaître la matrice d'inertie de (i) ;*
- *Le passage entre un point quelconque A et le point G (ou éventuellement, avec précaution, tout autre point B) peut se faire à différents niveaux comme l'indique le schéma suivant :*



- *Les relations de passage pour les différents chemins sont les suivants :*
  - ① $\overrightarrow{\sigma_G}(i/n) = [I_G(i)]_B\,\vec{\Omega}(i/n)$
  - ② $\overrightarrow{\delta_G}(i/n) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_G}(i/n))_{/\mathcal{R}_n}$

© Lotfi CHEIKH Tout reproduction ou partage interdit MY PREPA
+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

Les Relations Précédentes

③ $\overrightarrow{\sigma_A}(i/n) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in i/n) + [I_A(i)]\,\vec{\Omega}(i/n)$

④ $\overrightarrow{\delta_A}(i/n) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\sigma_A}(i/n))_{/\mathcal{R}_n} + m\,\vec{V}(A/n) \wedge \vec{V}(G/n)$

⑤ *Huygens* : $[I_A(i)]_B = [I_G(i)]_B + m\,[D]_B$

⑥ *L. T. M. Cinétique* : $\overrightarrow{\sigma_A}(i/n) = \overrightarrow{\sigma_G}(i/n) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G/n)$

⑦ *L. T. M. Dynamique* : $\overrightarrow{\delta_A}(i/n) = \overrightarrow{\delta_G}(i/n) + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(G/n)$

- *Ces diverses relations se simplifient lorsque le point A est fixe dans $(\mathcal{R}_n)$ ou est confondu avec G. Il est alors conseillé de rester le plus longtemps possible en ces points lors du choix des différents passages de la matrice d'inertie au moment dynamique.*

2.9- ENERGIE CINETIQUE

2.9.1- Définition

L'énergie cinétique d'un solide (i) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_n)$ est définie par :

$$E_C(i/n) = \frac{1}{2}\int_{P\in(S)} \left(\vec{V}(P/n)\right)^2 dm$$

2.9.2- Expression simplifiée de l'énergie cinétique

D'après la L. T. Moment Cinématique : $\vec{V}(P \in i/n) = \vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP}$, *nous avons :*

$$\begin{aligned} 2\,E_C(i/n) &= \int_{P\in(S)} (\vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP})\,\vec{V}(P/n)\,dm \\ &= \vec{V}(A \in i/n)\int_{P\in(S)} \vec{V}(P/n)\,dm + \vec{\Omega}(i/n)\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/n)\,dm \\ &= \vec{V}(A \in i/n)(m\,\vec{V}(G/n)) + \vec{\Omega}(i/n)\,\overrightarrow{\sigma_A}(i/n) \\ &= \begin{Bmatrix} m\,\vec{V}(G/n) \\ \overrightarrow{\sigma_A}(i/n) \end{Bmatrix}_A \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(i/n) \\ \vec{V}(A \in i/n) \end{Bmatrix}_A \end{aligned}$$

: *Comement des deux torseurs cinétique et cinématique*

$$\hookrightarrow E_C(i/n) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}(i/n)\}_A\{\mathcal{V}(i/n)\}_A$$

Remarques

1- *L'énergie cinétique obtenue ne dépend ni du point dans lequel on doit définir les torseurs cinétiques et cinématiques ni du repère dans lequel on doit les exprimer ;*
2- *Si (S) est composé de n solides (S_i), alors :* $E_C(S/n) = \sum_{i=1}^{n} E_C(i/n)$.

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction intégrale ou partielle est interdite

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

2.9.3- Cas particuliers

a) $m = 0 \Rightarrow E_C(i/n) = 0$;

b) masse concentrée en $G \Rightarrow \boxed{E_C(i/n) = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}(G/n)\right)^2}$;

c) Lorsqu'on effectue les calculs au centre d'inertie G $(A \equiv G)$, alors :

$$E_C(i/n) = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}(G/n)\right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(i/n) \overrightarrow{J_G}(i, \vec{\Omega}(i/n))$$

$$\Rightarrow E_C(i/n) = \frac{1}{2} m \left(\vec{V}(G/n)\right)^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{{}^t\Omega}(i/n) [I_G(i)] \vec{\Omega}(i/n)$$

Mvt de translation **Mvt de rotation**

d) Si A est fixe dans $(\mathcal{R}_n) \Rightarrow E_C(i/n) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(i/n) \overrightarrow{J_A}(i, \vec{\Omega}(i/n))$

$\Rightarrow E_C(i/n) = \frac{1}{2} \overrightarrow{{}^t\Omega}(i/n) [I_A(i)] \vec{\Omega}(i/n)$: Energie cinétique correspondant à un mouvement de rotation.

© Lotfi CHEIKH - Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY_PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

CHAPITRE 3

RAPPELS SUR LA MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

3.1- DEFINITION D'UNE ACTION MECANIQUE

On appelle action mécanique toute cause physique susceptible de :

- *Maintenir un corps au repos ;*
- *Créer, maintenir ou modifier un mouvement ;*
- *Déformer un corps.*

3.2- PREMIER PRINCIPE DE LA STATIQUE

Toute action mécanique (A,m) qui s'exerce sur un solide (S) peut être représentée, en un point quelconque A, par un torseur. Il s'écrit sous la forme :

Torseur d'action mécanique

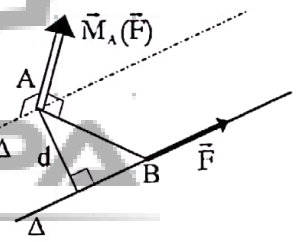
$$\{\tau(A.m \longrightarrow S)\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) \end{matrix}\right\}_A$$

- $\vec{F}$ *est la force (en Newton) appliquée au point B situé sur l'axe* Δ *de la force ;*
- $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$ *est le moment (en Newton-mètre), au point A, de la force* $\vec{F}$*. Il est défini comme suit :*

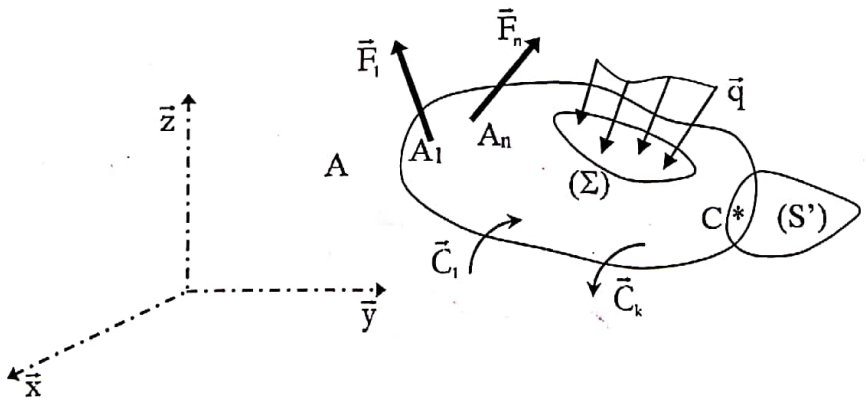
$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

Ce moment obéit à la Loi de Transfert du Moment (L.T.M) :

$$\forall (C,D), \overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_D}(\vec{F}) + \overrightarrow{CD} \wedge \vec{F}$$



3.3- DIFFERENTS TYPES D'ACTIONS MECANIQUES



© Lotfi CHEIKH Toute reproduction commerciale ou partielle est illicite

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

En général, un solide peut être soumis à trois types d'Actions mécaniques :

- *Actions mécaniques concentrées (ou localisée) :*
  - ✓ *Forces concentrées (F.C) ;*
  - ✓ *Moments concentrés ou couples (M.C) ;*
- *Actions mécaniques réparties :*
  - ✓ *Forces réparties ($\vec{q}$) ;*
  - ✓ *Moments répartis ;*
- *Actions mécaniques transmissibles au niveau de la liaison de centre C entre les solides (S) et (S')*

3.3.1-Actions Mécaniques concentrées

- *Forces concentrées ou localisées*

Chacune des « n » forces concentrées $\vec{F_i}$ $(i = 1,n)$ est caractérisée par le vecteur lié ou glissant $(A_i, \vec{F_i})$. Cette force peut être représentée, en un point quelconque A, par le torseur glisseur :

$$\{\tau(A_i,\vec{F_i})\}_A = \left\{\begin{matrix}\vec{F_i}\\ \overrightarrow{M_A}(A_i,\vec{F_i}) = \overrightarrow{AA_i}\wedge\vec{F_i}\end{matrix}\right\}_A$$

L'ensemble des « n » forces concentrées (F.C) exercées sur (S), peut alors être représenté, en un point quelconque A, par le torseur glisseur :

$$\{\tau(F.C\longrightarrow S)\}_A = \sum_{i=1}^{n}\{\tau(A_i,\vec{F_i})\}_A = \left\{\begin{matrix}\sum_{i=1}^{n}\vec{F_i}\\ \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AA_i}\wedge\vec{F_i}\end{matrix}\right\}_A$$

- *Moments concentrés ou couples*

Chacun des « k » couples $\vec{C_j}$ $(j = 1,k)$ peut être représentée, en tout point, par le torseur couple :

$$\{\tau(\vec{C_j}\longrightarrow S)\}_{tout\ point} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{C_j}\end{matrix}\right\}_{tout\ point}$$

L'ensemble des « k » couples (ou M.C) exercés sur (S), peut alors être représenté, en tout point, par le torseur couple :

$$\{\tau(M.C\longrightarrow S)\}_{tout\ point} = \sum_{j=1}^{k}\{\tau(\vec{C_j}\longrightarrow S)\}_{tout\ point} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \sum_{j=1}^{k}\vec{C_j}\end{matrix}\right\}_{tout\ point}$$

© Lotfi CHEIKH - Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY PREPA

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

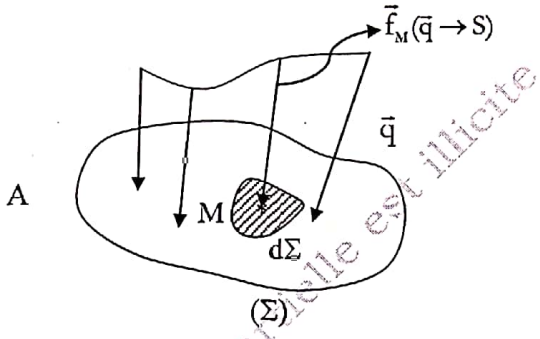
3.3.2- Actions Mécaniques réparties

- Moments répartis

Ce type de chargement n'est pas inscrit dans le programme des deuxièmes années du cycle préparatoire.

- Forces réparties

Le chargement réparti (les forces réparties ou les charges réparties) « $\vec{q}$ » exercé sur un sous domaine (Σ) du solide (S) est caractérisé, en un point quelconque M de (Σ), par une densité (linéique, surfacique ou volumique) de charge : $\overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S)$.



Cette densité est caractérisée, à son tour, par un vecteur lié ou glissant $(M, \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S))$. Elle peut être représentée, en un point quelconque A, par le torseur glisseur :

$$\{\tau(M, \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S))\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S) \\ \overrightarrow{M_A}(M, \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S)) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S) \end{Bmatrix}_A$$

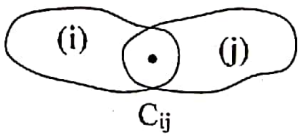
Le chargement réparti $\vec{q}$ exercé sur (S), peut alors être représenté, en un point quelconque A, par le torseur glisseur :

$$\{\tau(\vec{q} \to S)\}_A = \int_{M \in (S)} \{\tau(M, \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S))\}_A = \begin{Bmatrix} \int_{M \in (S)} \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S)\, d\Sigma \\ \int_{M \in (S)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f_M}(\vec{q} \to S)\, d\Sigma \end{Bmatrix}_A$$

3.3.3- Actions Mécaniques transmissibles

a- Définition et notations

Les actions mécaniques transmissibles (appelées aussi actions mécaniques statiques équivalentes ou encore réactions aux appuis) exercées par le solide (i) sur le solide (j) au niveau de la liaison de centre C_{ij} entre les deux solides, sont les inconnues statiques du problème. Ces actions sont représentées, au point C_{ij}, par un torseur de forme générale :



$$\{\tau(i \to j)\}_{C_{ij}} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{C_{ij}}^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$$

$\vec{R}_{(i \to j)}$ ↵ ↳ $\vec{M}_{n(i \to j)}$

Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY_PREPA

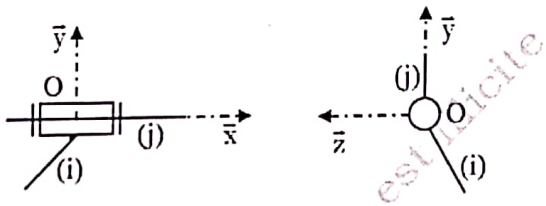
+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

Le torseur statiques équivalents $\{\tau(i \to j)\}_{C_{ij}}$ est le DUAL du torseur cinématique, au point C_{ij}, du solide (j) dans son mouvement par rapport au solide (i) $\{v(j/i)\}_{C_{ij}}$.

Exemple : Liaison pivot d'axe $(O,\vec{x})$

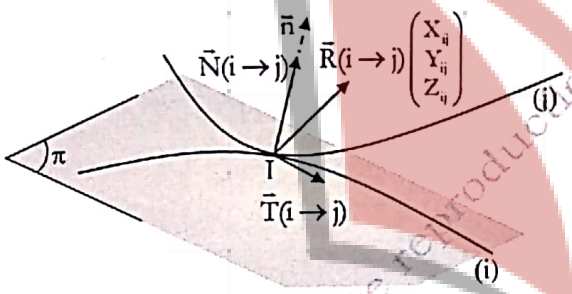
Les degrés de libertés (DDL), se résument comme suit :

$$\{DDL\} = \begin{matrix} Tr & Rot \\ \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$



$$\{v(j/i)\}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j} \qquad \{\tau(i \to j)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$$

b- Frottement de glissement – Loi de Coulomb



On considère une liaison avec frottement de glissement entre les deux solides (i) et (j). En particulier la liaison ponctuelle de centre I et de normale $\vec{n}$.

Soit π le plan tangent commun en I aux deux solides en contact.

$$\vec{R}(i \to j) = \vec{N}(i \to j) + \vec{T}(i \to j)$$

✓ ***1ère loi de Coulomb :*** *s'il y a glissement, c'est-à-dire : $\vec{V}(I \in j/i) \neq \vec{0}$.*

Dans ce cas, on a : $\begin{cases} \vec{V}(I \in j/i) \wedge \vec{T}(i \to j) = \vec{0} \\ \vec{V}(I \in j/i).\vec{T}(i \to j) \leq 0 \end{cases}$ *c'est-à-dire que :*

- *La composante tangentielle $\vec{T}(i \to j)$ est colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{V}(I \in j/i)$ (donc au mouvement) et de sens opposé ;*
- *En plus sa norme est donnée par : $\|\vec{T}(i \to j)\| = f\,\|\vec{N}(i \to j)\|$. Où f est le coefficient de frottement.*

✓ ***2ième loi de Coulomb :*** *s'il n'y a pas de glissement, c'est-à-dire : $\vec{V}(I \in j/i) = \vec{0}$.*

Dans ce cas, on a : $\|\vec{T}(i \to j)\| \leq h\,\|\vec{N}(i \to j)\|$. Où h est le coefficient d'adhérence.

✓ ***3ième loi de Coulomb :*** *si la liaison est parfaite, alors :*

$$\|\vec{T}(i \to j)\| = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{N}(i \to j) = \vec{R}(i \to j)$$

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction même partielle est illicite
MY_PREPA
+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

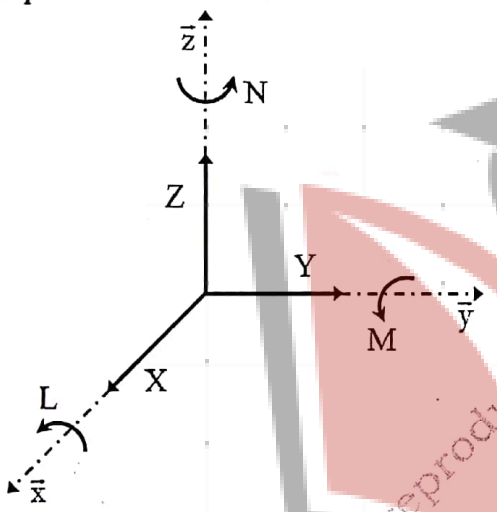
c- Hypothèse du problème plan

On dit que le problème est un problème plan (ou bien que le plan tel est un plan de symétrie du mécanisme et du chargement ou bien le mécanisme admet le plan tel comme plan de symétrie) si et seulement si :

- *Toutes les liaisons sont des liaisons planes ou assimilées à des liaisons planes ;*
- *Tous les mouvements sont des mouvements plans ;*
- *Toutes les actions mécaniques sont situées dans le plan.*

Dans ce cas, on « annule » toutes les composantes non nulles qui sont hors du plan.

Exemple :



Si, par exemple, le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ est un plan de symétrie, alors :

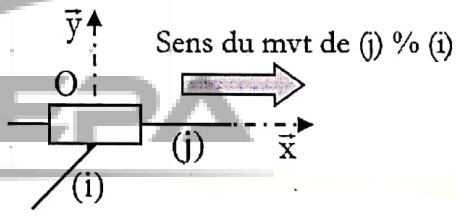
- *Z est hors du plan, alors $Z = 0$;*
- *L est dans le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$ et M est dans le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$, alors : $L = M = 0$.*

En conséquent le torseur s'écrit :

$$\left\{\begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}$$

Exemple d'application :

On considère la liaison glissière d'axe $(O,\vec{x})$ de la figure ci-contre. Déterminer les torseurs des A.m transmissibles avec ou sans hypothèse de problème plan avec ou sans frottement de coefficient « f ».



$\{\tau(i \to j)\}_O$	*Problème tridimensionnel*	*Problème dans le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$*
Liaison parfaite	$\left\{\begin{matrix} 0 & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix}\right\}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & N_{ij} \end{matrix}\right\}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$
Liaison avec frottement de glissement de coefficient « f »	$\left\{\begin{matrix} -f\sqrt{Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{matrix}\right\}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$	$\left\{\begin{matrix} -f\,Y_{ij} & 0 \\ Y_{ij} & 0 \\ 0 & N_{ij} \end{matrix}\right\}_O^{\mathcal{B}_i \text{ ou } \mathcal{B}_j}$

© Lotfi CHEIKH toute reproduction intégrale ou partielle est illicite

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

- *Dans le cas du problème tridimensionnel, la résultante au niveau de la liaison parfaite, s'écrit :* $\vec{R}(i \to j)\begin{pmatrix} 0 \\ Y_{ij} \\ Z_{ij} \end{pmatrix}$, *alors :* $\vec{N}(i \to j) = \vec{R}(i \to j)$, *donc :*

$$\left\|\vec{N}(i \to j)\right\| = \sqrt{Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2}\ ;$$

- *Le mouvement s'effectue suivant* $\vec{x}$, *alors :* $\vec{T}(i \to j)$ *est suivant* $-\vec{x}$ *(1ère loi de Coulomb) ;*
- *En plus :* $\left\|\vec{T}(i \to j)\right\| = f\left\|\vec{N}(i \to j)\right\| = f\sqrt{Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2} \Rightarrow \vec{T}(i \to j) = -f\sqrt{Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2}\,\vec{x}$

© Lotfi CHEIKH – Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY_PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

CHAPITRE 4

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD)

4.1- INTRODUCTION

Le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) a été énoncé à la fin du $17^{ème}$ siècle par Isaac Newton. Il établit la relation entre le mouvement d'un système et le actions mécaniques qui lui sont appliquées. Il est à noter que l'application du PFD dans un repère non Galiléen ne fait pas partie du programme.

4.2- ENONCE DU PFD

Soit un solide (ou un système de solides) (S_n) de masse m et de centre d'inertie G. Ce solide (S_n), en mouvement par rapport à un repère Galiléen $(\mathcal{R}_n)$, est soumis à des actions mécaniques extérieures. Ces actions sont modélisées, en un point quelconque A, par le torseur $\{\tau(\bar{\imath} \to i)\}_A$. Le mouvement du solide (S_n) est représenté, en un point A, par le torseur quantité des accélérations (ou torseur dynamique) $\{\mathcal{D}(i/n)\}_A$. Le PFD s'écrit sous la forme :

PFD

$$\{\mathcal{D}(i/n)\}_A = \{\tau(\bar{\imath} \to i)\}_A$$

L'égalité du torseur d'actions mécaniques et du torseur dynamique réduit au même point se traduit normalement par l'égalité des résultantes et des moments. Cela engendre les deux Théorèmes Généraux de la Dynamique (TGD).

4.2.1- Théorème de la Résultante Dynamique (TRD)

TRD

$$m\vec{\gamma}(G/n) = \vec{R}(\bar{\imath} \to i)$$

Par projection de cette équation vectorielle sur les trois vecteurs d'une base donnée, on obtient trois équations scalaires (ou deux équations scalaires dans le cas d'un problème plan).

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

4.2.2- Théorème du Moment Dynamique (TMD)

T.M.D

$$\overrightarrow{\delta_A(i/n)} = \overrightarrow{M_A(\bar{\imath} \to i)}$$

Par projection de cette équation vectorielle sur les trois vecteurs d'une base donnée, on obtient trois équations scalaires (ou une seule équation scalaire dans le cas d'un problème plan).

Au final, la mise en équation du PFD engendre un maximum de six équations scalaires (dans le cas d'un problème plan, cela se réduit à un maximum de trois équations scalaires). A partir de ces équations, on peut déterminer :

- *Les composantes inconnues des actions mécaniques au niveau des liaisons ;*
- *Les équations différentielles du mouvement.*

4.3- EQUATION DU MOUVEMENT

Une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre, généralement non linéaire, dans laquelle ne figure aucune composante statique inconnue (inconnue de liaison). Elle ne doit comporter que les caractéristiques géométriques et inertielles du mécanisme et les paramètres du mouvement, leurs dérivées premières et secondes. La projection du TRD et du TMD sur les axes relatifs aux degrés de liberté du système étudié permet d'aboutir rapidement à des équations de mouvement.

- *Si le solide est en translation, alors il faut projeter le TRD sur l'axe ou les axes du mouvement de translation ;*
- *Si le solide est en rotation, alors il faut projeter le TMD sur l'axe ou les axes du mouvement de rotation ;*
- *Si le solide est à la fois en translation et en rotation, alors il faut projeter le TRD sur l'axe ou les axes du mouvement de translation et le TMD sur l'axe ou les axes du mouvement de rotation ;*

4.4- EQUILIBRAGE DYNAMIQUE

4.6.1-Introduction

L'équilibrage dynamique des solides en rotation est inévitable dans toutes les machines modernes. Il permet de réduire au mieux les vibrations générées

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

par les effets dynamiques au sein de la machine. Ainsi, les vibrations d'une machine mal équilibrée vont :

- *Générer du bruit,*
- *Dégrader le confort ou la précision de la machine,*
- *User prématurément les liaisons.*

Dès la conception, les géométries sont choisies afin d'assurer un équilibrage optimal. Cependant, lorsque les masses ou les vitesses de rotation sont importantes, les tolérances de fabrication ne permettent pas d'atteindre la précision d'équilibrage requise. Il faut alors équilibrer la machine sur site, lorsqu'elle est prête à fonctionner. Certaines machines nécessitent même un nouvel équilibrage à chaque maintenance.

L'exemple classique est celui de la roue de voiture. Lors d'un changement de pneumatique, la roue est démontée et un nouveau pneu est monté sur la jante du véhicule. Les tolérances de fabrication des pneus et les incertitudes liées au montage sur la jante ne permettent pas d'obtenir une roue suffisamment équilibrée. Le garagiste réalise donc un équilibrage par deux masselottes serties sur le bord de la jante. Une machine spécifique (figure 2) met la roue en rotation, mesure les défauts d'équilibrage et en déduit la position et la masse des masselottes à ajouter (figure 3).

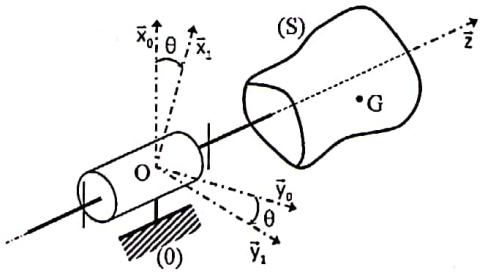


Figure 2 : Équilibreuse de roue de voitures.



Figure 2 : Mise en place au marteau d'une masselotte sur la jante.

4.6.2-Modélisation du problème d'équilibrage



(S) est un solide homogène de masse m, de centre d'inertie G et de matrice d'inertie au point O dans la base $\mathcal{B}_S(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z})$. Ce solide est en rotation par rapport au bâti (0) autour de l'axe $(O, \vec{z})$.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

On donne : $\overrightarrow{OG} = a\,\overrightarrow{x_1} + b\,\vec{z}$, $[I_O(S)]_{B_S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$ *et* $\vec{\Omega}(S/0) = \dot{\theta}\,\vec{z}$.

On se propose de déterminer les composantes « statiques » inconnues au niveau de la liaison pivot au point O (Effort transmis par le solide (S) au bâti (0)). Pour cela, on applique le PFD, au point O, au solide (S) dans son mouvement par rapport au bâti (0) :

$$\{\mathcal{D}(S/0)\}_O = \{\tau(\bar{S} \to S)\}_O$$

4.6.3-Résolution du problème

a- Calcul du torseur dynamique

Le torseur cinétique s'écrit, au point O : $\{\mathcal{C}(S/0)\}_O = \begin{Bmatrix} m\,\vec{V}(G/0) \\ [I_O(S)]\,\vec{\Omega}(S/0) \end{Bmatrix}_O$ *car le point O∈(s) est fixe dans le repère* $(\mathcal{R}_0) \Rightarrow \{\mathcal{C}(S/0)\}_O = \begin{Bmatrix} m\,\dot{\theta}\,\vec{z} \wedge (a\,\overrightarrow{x_1} + b\,\vec{z}) \\ \dot{\theta}\,(-E\,\overrightarrow{x_1} - D\,\overrightarrow{y_1} + C\,\vec{z}) \end{Bmatrix}_O$

On en déduit : que : $\{\mathcal{D}(S/0)\}_O = \frac{d}{dt}(\{\tau(\bar{S} \to S)\}_O)_{/\mathcal{R}_0}$

$$\Rightarrow \{\mathcal{D}(S/0)\}_O = \begin{Bmatrix} m\,a\,(-\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{x_1} + \ddot{\theta}\,\overrightarrow{y_1}) \\ (-E\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\overrightarrow{x_1} - (E\,\dot{\theta}^2 + D\,\ddot{\theta})\overrightarrow{y_1} + C\,\ddot{\theta}\,\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

b- Torseur des Actions mécaniques extérieures

$$\{\tau(\bar{S} \Rightarrow S)\}_O = \{\tau(F_{ext} \to S)\}_O + \{\tau(0 \to S)\}_O = \begin{Bmatrix} F_1 + X_{0S} & C_1 + L_{0S} \\ F_2 + Y_{0S} & C_2 + M_{0S} \\ F_3 + Z_{0S} & C_3 \end{Bmatrix}_O^{B_S}$$

F_1, F_2, F_3, C_1, C_2, et C_3 sont les forces et les moments exercés par le milieu extérieur qui peuvent être quelconques (dans le cas d'une roue de voiture, c'est l'action de la route sur la roue, l'action de la pesanteur, l'action de l'arbre de transmission...).

X_{0S}, Y_{0S}, Z_{0S}, L_{0S} et M_{0S} sont les composantes « statiques » inconnues (Actions mécaniques transmissibles) au niveau de la liaison pivot au point O entre le bâti (0) et le solide tournant (S).

c- Principe Fondamental de la Dynamique

Les équations qui découlent de l'application du PFD, au point O, au solide (S) dans son mouvement par rapport au bâti (0) nous fournissent les composantes « statiques » inconnues :

$$\begin{Bmatrix} -m\,a\,\dot{\theta}^2 & -E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 \\ -m\,a\,\ddot{\theta} & -E\,\dot{\theta}^2 - D\,\ddot{\theta} \\ 0 & C\,\ddot{\theta} \end{Bmatrix}_O^{B_S} = \begin{Bmatrix} F_1 + X_{0S} & C_1 + L_{0S} \\ F_2 + Y_{0S} & C_2 + M_{0S} \\ F_3 + Z_{0S} & C_3 \end{Bmatrix}_O^{B_S}$$

© Lotfi CHEIKH toute reproduction partielle ou totale est illicite MY_PREPA
+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} X_{0S} = -F_1 - m\,a\,\dot{\theta}^2 \\ Y_{0S} = -F_2 - m\,a\,\ddot{\theta} \\ Z_{0S} = -F_3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} L_{0S} = -C_1 - E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 \\ M_{0S} = -C_2 - E\,\dot{\theta}^2 - D\,\ddot{\theta} \\ C_3 = C\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

Remarquons que ces efforts et moments sont variables dans le temps. Il conviendrait mieux de les nommer « composantes statiques équivalentes ». Si la rotation s'effectue à vitesse constante ($\dot{\theta} = \omega$), on peut constater que bien que la norme de cette action reste constante, la direction tourne à la même vitesse que le solide, ce qui génère des vibrations transmises au bâti.

4.6.4- Conditions d'équilibrage

a- Règle générale

Pour éviter les vibrations, il faut que l'action mécanique transmise au bâti soit indépendante de la rotation du solide c'est-à-dire indépendante de $\dot{\theta}$ et de $\ddot{\theta}$.

b- Equilibrage statique

Un solide est statiquement équilibré si aucune composante de la résultante de l'action mécanique transmise au bâti ne dépend de la rotation du solide. Dans ce cas :

$$X_{0S} = -F_1 - m\,a\,\dot{\theta}^2 \text{ et } Y_{0S} = -F_2 - m\,a\,\ddot{\theta}$$

Cette condition est réalisée si $a = 0$. C'est-à-dire : Si le centre d'inertie G se trouve sur l'axe de rotation $(O,\vec{z})$.
Autrement dit, un solide est statiquement équilibré s'il ne présente aucun balourd, qui est généralement la source principale de vibration.

c- Equilibrage dynamique

Un solide est dynamiquement équilibré si aucune composante du torseur de l'action mécanique transmise au bâti ne dépend de la rotation du solide. Dans ce cas :

$$\begin{cases} X_{0S} = -F_1 - m\,a\,\dot{\theta}^2 \text{ et } Y_{0S} = -F_2 - m\,a\,\ddot{\theta} \\ L_{0S} = -C_1 - E\,\ddot{\theta} + D\,\dot{\theta}^2 \text{ et } M_{0S} = -C_2 - E\,\dot{\theta}^2 - D\,\ddot{\theta} \end{cases}$$

Cette condition est réalisée si :

- *$a = 0$, c'est-à-dire : Si le centre d'inertie G se trouve sur l'axe de rotation $(O,\vec{z})$. Ou bien le solide (S) et statiquement équilibré ;*
- *$D = E = 0$, c'est-à-dire que les produits d'inertie de la colonne $\vec{z}$ (axe de rotation) sont nuls. Ainsi, l'axe $(O,\vec{z})$ est un axe principal d'inertie (ou vecteur propre de la matrice d'inertie $[I_O(S)]_{B_S}$).*

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction totale ou partielle est illicite
MY PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

CHAPITRE 5

ETUDE ENERGETIQUE DES SOLIDES INDEFORMABLES

Notations :
Dans ce cours, on notera par (i) un solide (S_i) donné et par ($\bar{i}$) son extérieur. (n) désignera un repère de référence ($\mathcal{R}_n$). « $\hat{a}$ » sera le symbole d'une action mécanique quelconque (Force, couple ou une action mécanique transmissible).

5.1- PUISSANCE

5.1.1- Puissance développée par une action mécanique extérieure à un solide dans son mouvement par rapport à un repère

La puissance d'une action mécanique « $\hat{a}$ » exercée sur le solide (i) dans son mouvement par rapport à un repère de référence (n) est définie par :

$$P(\hat{a} \to i/n) = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{f_P}(\hat{a} \to i)\, \vec{V}(P/n)\, dm$$

Avec : $\vec{V}(P/n) = \vec{V}(P \in i/n) = \vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP}$ *et* $\overrightarrow{f_P}(\hat{a} \to i)$ *est la densité de l'action mécanique.*

Donc :

$$P(\hat{a} \to i/n) = \underbrace{\left[\int_{P\in(S)} \overrightarrow{f_P}(\hat{a} \to i)\, \vec{V}(P/n)\, dm\right]}_{\vec{R}(\hat{a}\to i)} \vec{V}(A \in i/n) + = \underbrace{\left[\int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{f_P}(\hat{a} \to i)\, dm\right]}_{\overrightarrow{M_A}(\hat{a}\to i)} \vec{\Omega}(i/n)$$

$$\Rightarrow \quad P(\hat{a} \to i/n) = \{\tau(\hat{a} \to i)\}_A \{v(i/n)\}_A$$

Comoment du torseur de l'action mécanique exercée sur le solide (i) et du torseur cinématique de (i) dans son mouvement par rapport au repère (n).

Remarque : La puissance dépend du repère par rapport auquel elle est exprimée. Ainsi, $P(\hat{a} \to i/n) = 0$.

5.1.2- Puissance mutuelle

La puissance développée par les actions mutuelles entre deux solides (i) et (j) dans leurs mouvements par rapport au repère (n) est définie par :

$$P(i \leftrightarrow j) = P(i \to j/n) + P(j \to i/n)$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

Remarque : La puissance mutuelle est indépendante du repère, c'est à dire : $P(i \leftrightarrow j/n) = P(i \leftrightarrow j/m)$

5.1.3- Liaison parfaite entre deux solides

Une liaison entre deux solides (i) et (j) est dite parfaite, si et seulement si, la puissance mutuelle entre les deux solides est nulle :

$$P(i \leftrightarrow j) = 0$$

Conséquence : Remarquons d'abord que : $P(i \leftrightarrow j) = P(i \rightarrow j/i) = P(j \rightarrow i/j)$.
Si la liaison est parfaite, alors : $P(i \leftrightarrow j) = P(i \rightarrow j/i) = \{\tau(i \rightarrow j)\}_X \{v(j/i)\}_X = 0$. Cela signifie que $\{\tau(i \rightarrow j)\}_X$ est le dual de $\{v(j/i)\}_X$. Ceci permet donc la détermination du torseur des actions mécaniques transmissibles au niveau de la liaison.

5.2- TRAVAIL

Le travail entre les instants t_1 et t_2 de l'action mécanique « â » exercée sur le solide (i) dans son mouvement par rapport au repère (n) est défini par :

$$W(\hat{a} \rightarrow i/n) = \int_{t_1}^{t_2} P(\hat{a} \rightarrow i/n)\, dt \Rightarrow P(\hat{a} \rightarrow i/n) = \frac{dW(\hat{a} \rightarrow i/n)}{dt}$$

5.3- ENERGIE POTENTIELLE

On appelle énergie potentielle développée par l'action mécanique â exercée sur le solide (i) dans son mouvement par rapport au repère (n) la fonction scalaire $E_p(\hat{a} \rightarrow i/n)$ tel que :

$$P(\hat{a} \rightarrow i/n) = -\frac{dE_p(\hat{a} \rightarrow i/n)}{dt}$$

Remarques :

a- L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance, elle est donc définie à une constante près que l'on choisit arbitrairement ;

b- On dit que la puissance dérive d'une énergie potentielle (au signe près) ;

c- Comme la puissance correspondante, l'énergie potentielle associée à une action mécanique mutuelle entre (i) et (j), notée $E_p(i \leftrightarrow j)$, est indépendante du repère.

$$P(i \leftrightarrow j) = -\frac{dE_p(i \leftrightarrow j)}{dt}$$

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction totale ou partielle est illicite

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

5.4- THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Ce théorème est la traduction énergétique du PFD.

5.5.1- Cas d'un seul solide

$$\frac{dE_C(i/n)}{dt} = P(\bar{\iota} \to i/n)$$

Démonstration :

Le PFD s'écrit : $\{\mathcal{D}(i/n)\}_A = \{\tau(\bar{\iota} \to i)\}_A$. *En multipliant les deux membres de l'égalité par le torseur cinématique, on obtient :*

$$\underbrace{\{\mathcal{D}(i/n)\}_A\{v(i/n)\}_A}_{①} = \underbrace{\{\tau(\bar{\iota} \to i)\}_A\{v(i/n)\}_A}_{②}$$

Par définition : $② = P(\bar{\iota} \to i/n)$

$$① = \left\{ \begin{matrix} \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P/n)\, dm \\ \int_{P\in(S)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P/n)\, dm \end{matrix} \right\}_A \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(i/n) \\ \vec{V}(A \in i/n) \end{matrix} \right\}_A = \int_{P\in(S)} \vec{\gamma}(P/n) \underbrace{\left[\vec{V}(A \in i/n) + \vec{\Omega}(i/n) \wedge \overrightarrow{AP}\right]}_{\vec{V}(P\in i/n)} dm$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in(S)} \left(\vec{V}(P/n)\right)^2 dm\right] = \frac{dE_C(i/n)}{dt}$$

5.5.2- Cas d'un ensemble de solides : $\Sigma = \sum_{i=1}^{n}(S_i)$

$$\frac{dE_C(i/n)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \to \Sigma/n) + \mathcal{P}_{int}$$

$P(\bar{\Sigma} \to \Sigma/n)$: *Puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur* (Σ) *dans son mouvement par rapport au repère* $(\mathcal{R}_n)$;

$\mathcal{P}_{int} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(i \leftrightarrow j)$: *Puissance des actions mécaniques intérieures à* (Σ).

5.5- INTEGRALE PREMIERE DE L'ENERGIE CINETIQUE

D'après le théorème de l'énergie cinétique, nous avons :

$$\frac{dE_C(i/n)}{dt} = P(\bar{\iota} \to i/n).$$

Or, par définition : $P(\bar{\iota} \to i/n) = -\frac{dE_p(\bar{\iota} \to i/n)}{dt}$, *en conséquence :*

$$E_C(i/n) + E_p(\bar{\iota} \to i/n) = C$$

Cette relation s'appelle : Intégrale Première de l'énergie cinétique.

© Lotfi CHEIKH Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY-PREPA
+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941 | myprepa27@gmail.com | http://www.myprepa27.wix.com/website

Remarques :

a- On appelle énergie mécanique totale $E_m(i/n)$, la somme :

$$E_m(\bar{\tau} \rightarrow i/n) = E_C(i/n) + E_p(\bar{\tau} \rightarrow i/n)$$

L'intégrale première de l'énergie cinétique traduit alors la conservation de l'énergie mécanique totale.

b- La constante d'intégration « C » est déterminée en fonction des conditions initiales du mouvement.

© Lotfi CHEIKH - Toute reproduction intégrale ou partielle est illicite
MY_PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

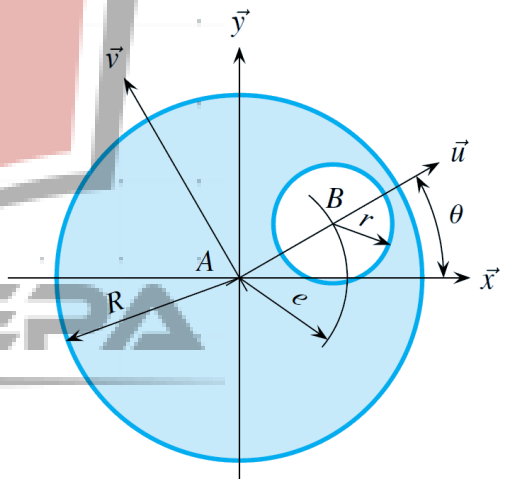
Sommaire

1. Disque percé 1
2. Matrices d'inertie de solide élémentaire 2
3. Parallélépipède percé 2
4. Échelle EPAS 3
5. Chargeur d'outil de centre d'usinage 4
6. Agitateur médical 5
7. Rotor d'hélicoptère 6

1. Disque percé

On s'intéresse à un solide homogène d'épaisseur négligeable et de masse totale m.

Il est schématisé sur la figure ci-contre et est constitué :
- d'un disque plein 1 de centre A et de rayon R ;
- d'un disque creux 2 de centre B et de rayon r, excentré par rapport au premier disque d'une distance e.



1. Déterminer la position du centre de masse G en fonction de r, R et e.

On souhaite ramener le centre de masse de l'ensemble en A. Pour cela, on dispose de deux masses ponctuelles additionnelles $P_3(x_3,y_3)$ et $P_4(x_4,y_4)$, de masses respectives m_3 et m_4.

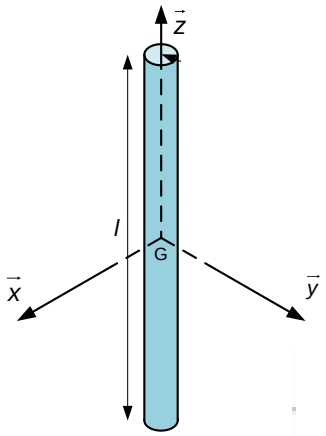
2. Déterminer les conditions à poser sur les coordonnées x_3, y_3, x_4 *et* y_4 de ces deux points dans le repère $(A,\vec{x},\vec{y})$ afin d'atteindre l'objectif proposé.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

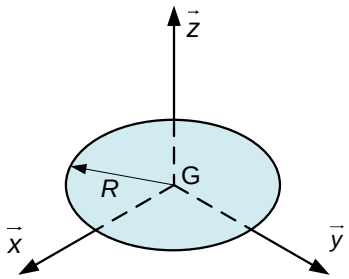
2. Matrices d'inertie de solide élémentaire

1. Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, de chacun des solides suivants :

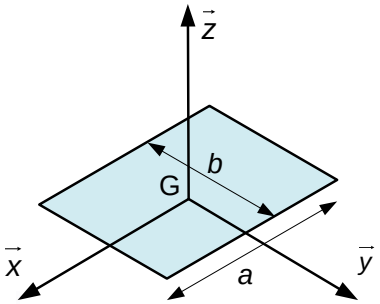
Tige pleine de masse m et de section négligeable



Disque plein de masse m et d'épaisseur négligeable

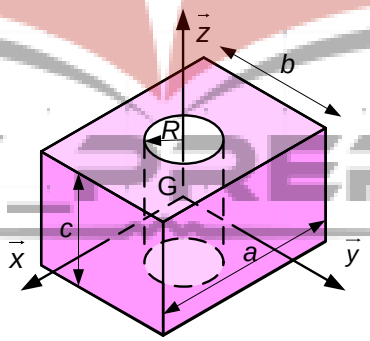


Plaque rectangulaire pleine de masse m et d'épaisseur négligeable

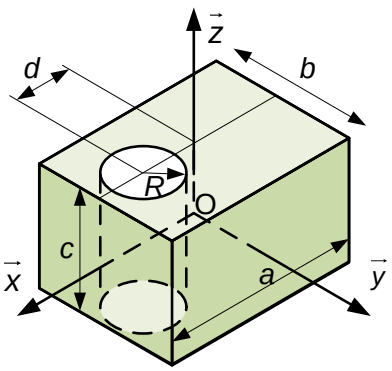


3. Parallélépipède percé

1. Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes sont confondus en G.



2. Déterminer la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes ne sont plus confondus.



+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

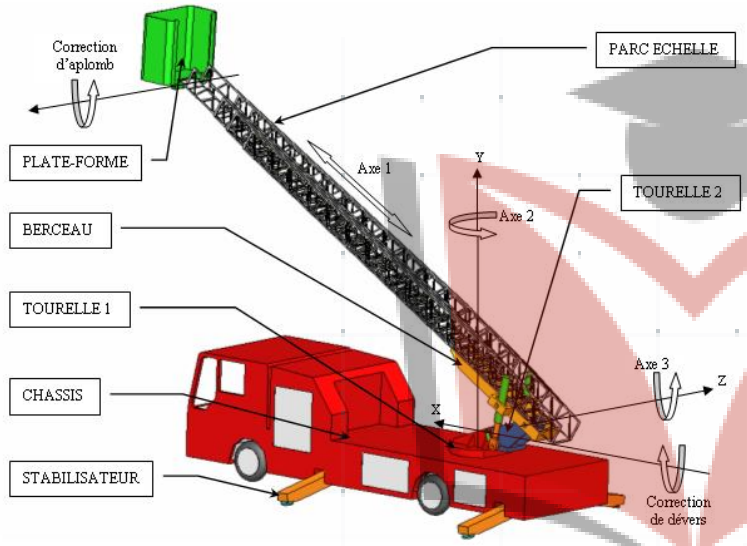
4. Échelle EPAS

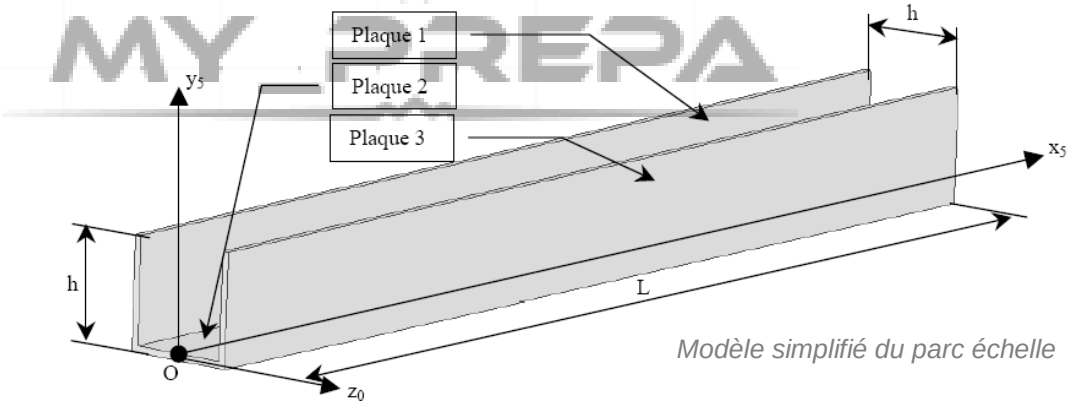
4.1. Présentation

Une E.P.A.S. est une Échelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle (voir vidéo sur site internet).
Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompier. Il permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Dans une première approche, on modélise le parc échelle par un assemblage de trois plaques rectangulaires homogènes d'épaisseur négligeable, de longueur L et de largeur h. Chaque plaque a une masse notée m.





Modèle simplifié du parc échelle

4.2. Objectif

Caractériser les masses en mouvement.

4.3. Travail demandé

Soit le point O', tel que $\overrightarrow{OO'} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_5$.

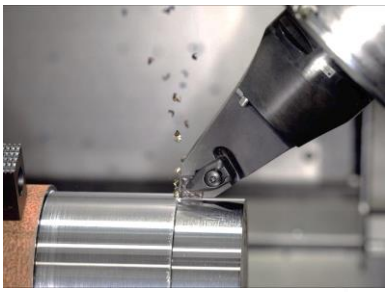
1. Déterminer le vecteur position du centre de masse G_5 du parc échelle, dans le repère $R_5 = (O, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ qui lui est associé.
2. Donner l'expression de la matrice d'inertie du parc échelle au point G_5 dans la base $(\vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

5. Chargeur d'outil de centre d'usinage

5.1. Présentation

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produit dans les industries mécaniques. On appelle le système de production associé à une opération d'usinage une *machine-outil* ou un *centre d'usinage*. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à différents outils munis d'au moins une arête coupante.



Usinage par enlèvement de matière



Outils

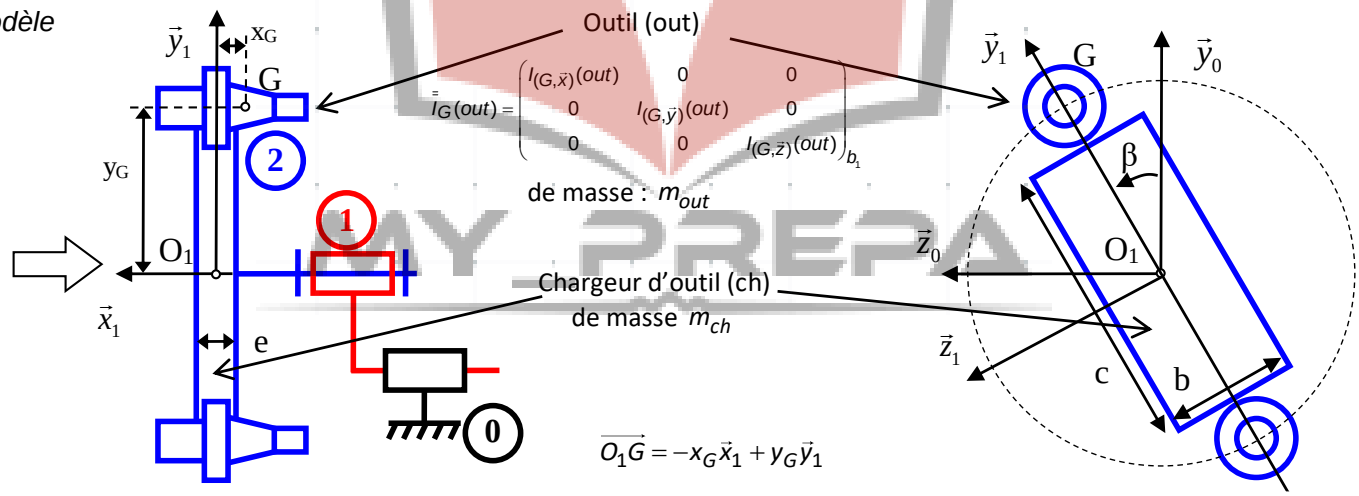


Chargeur d'outils

Un chargeur d'outils est un système permettant de charger automatiquement l'outil utile stocké dans un magasin sur la broche de la machine pour une phase d'usinage donnée. Les différentes formes de la pièce sont ensuite obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce à usiner.

On s'intéresse donc au chargeur d'outils équipant la machine-outil dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modèle cinématique.

Modèle



5.2. Objectif

Caractériser les masses en mouvement.

5.3. Travail demandé

1. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras est équipé de deux outils montés symétriquement.
2. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras n'est équipé que d'un seul outil.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

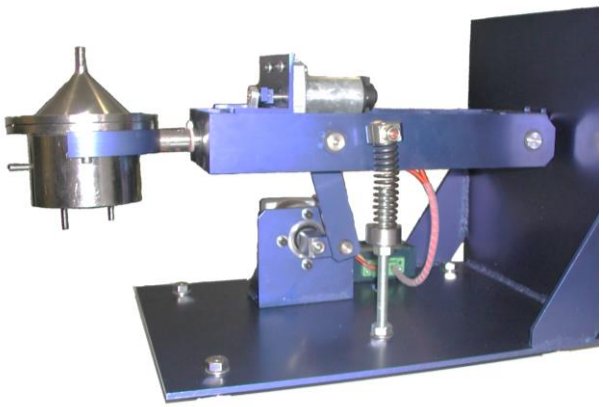
6. Agitateur médical

6.1. Présentation

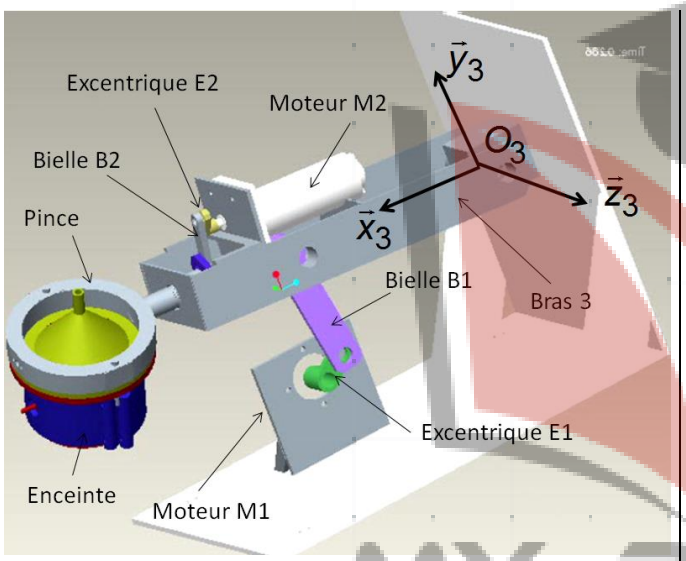
On s'intéresse à un système d'agitation et de chauffage d'une enceinte thermostatée utilisé dans le cadre d'expérimentations pour soigner les malades du diabète (voir vidéo sur site internet).

Le système est composé de deux chaînes cinématiques indépendantes :

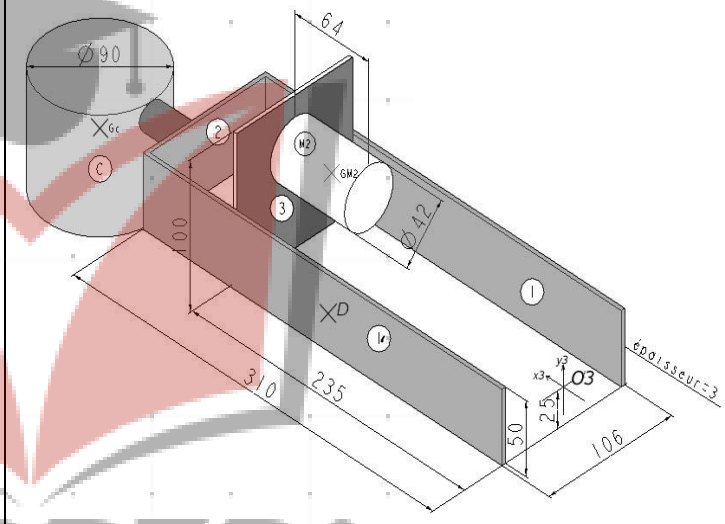
- chaîne n°1 (principale) constituée d'un moteur électrique brushless M1, d'un excentrique E1, d'une bielle B1 et du bras 3 sur lequel est montée la seconde chaîne cinématique ;
- chaîne n°2 (secondaire) constituée d'un moto réducteur électrique M2 solidaire du bras 3, d'un excentrique E2, d'une bielle B2, d'une pince et de l'enceinte.



Agitateur médical



Représentation technique 3D



Modèle de l'ensemble mobile {E}

La chaîne n°2 est à l'arrêt dans la position du modèle ci-dessus, l'enceinte est pleine et considérée comme étant homogène.

La chaîne n°1 est quant à elle en mouvement.

L'ensemble mobile {E} est défini par : {E} = {Bras 3, moteur M2, pince, enceinte}. Les inerties de l'excentrique E2 et de la bielle B2 ont été négligées devant les autres inerties.

Le bras 3 est considéré comme un assemblage de :

- deux plaques ① d'épaisseur $e_3 = 3\text{mm}$, de longueur $L_{31} = 310\text{mm}$, de hauteur $h_{31} = 50\text{mm}$ et de masse $m_{31} = 0{,}1kg$;
- une plaque ② d'épaisseur $e_3 = 3\text{mm}$, de largeur $L_{32} = 100\text{mm}$, de hauteur $h_{32} = 50\text{mm}$ et de masse $m_{32} = 0{,}033kg$;
- une plaque ③ placée à la distance $d_{33} = 235mm$ de O_3, d'épaisseur $e_3 = 3\text{mm}$, de largeur $L_{33} = 100\text{mm}$, de hauteur $h_{33} = 100\text{mm}$ et de masse $m_{33} = 0{,}067kg$.

Le moto réducteur M2 est assimilé à un cylindre de hauteur $h_{M2} = 64mm$ de diamètre $D_{M2} = 42mm$, de masse $m_2 = 1kg$ et de centre de masse G_{M2} tel que $\overrightarrow{O_3G_{M2}} = x_{G_{M2}}\vec{x}_3 + y_{G_{M2}}\vec{y}_3 = 200\vec{x}_3 + 40\vec{y}_3$ (en mm).

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

L'ensemble © = {pince, enceinte} est assimilé à un cylindre de hauteur $h_{cr}=70mm$ de diamètre $D_{cr}=90mm$, de masse $m_{cr}=2,7kg$ et de centre de masse G_c tel que $\overrightarrow{O_3G_C}=x_{Gc}\vec{x}_3+y_{Gc}\vec{y}_3=400\vec{x}_3-30\vec{y}_3$ (en mm). La jonction entre ② et © est négligée.

6.2. Objectifs

Évaluer le moment d'inertie de l'ensemble mobile {E}.

6.3. Travail demandé

1. Déterminer, dans la position du modèle ci-dessus, une valeur numérique approchée du moment d'inertie par rapport à l'axe $(O_3,\vec{z})$ de l'ensemble mobile {E}. On pourra faire l'hypothèse que les épaisseurs des plaques sont négligeables devant leurs autres dimensions.

7. Rotor d'hélicoptère

7.1. Présentation

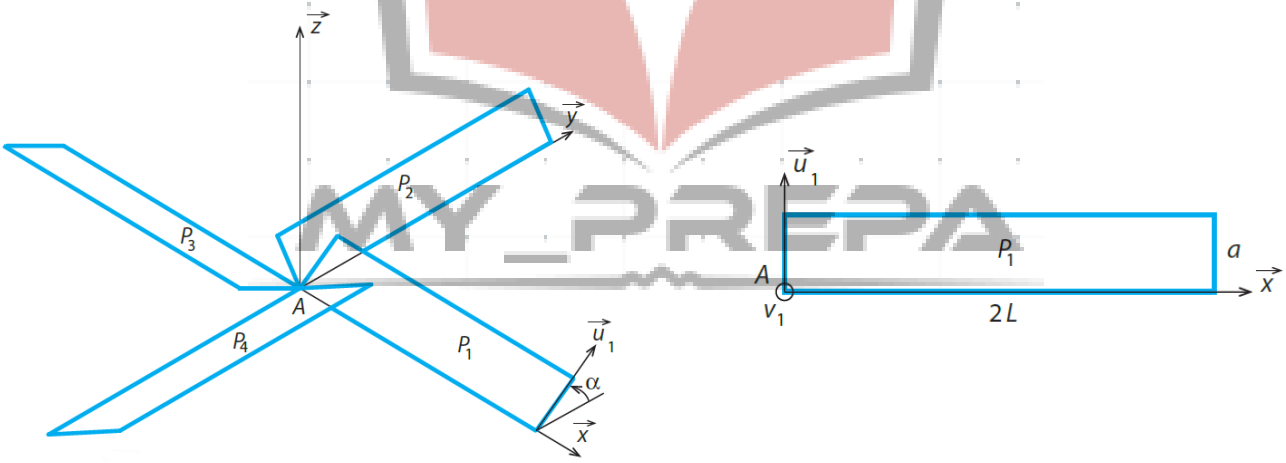
On s'intéresse au rotor d'un hélicoptère.

Dans une première approche, on peut considérer que ce rotor est composée de quatre pales rigides décalées de $\pi/2$ et inclinées d'un angle α par rapport à l'horizontale.

On note $\alpha=(\vec{y},\overrightarrow{u_1})=(\vec{z},\overrightarrow{v_1})$

Chacune de ces pales est considérée comme d'épaisseur négligeable et a une masse notée M, une longueur $2L$ et une largeur a.





Modèle du rotor

7.2. Objectifs

Caractériser les masses en mouvement

7.3. Travail demandé

1. Déterminer la matrice d'inertie de la pale $P1$ au point A dans la base $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$.
2. Montrer que la matrice d'inertie en A de quatre masses ponctuelles m, positionnées de la même manière sur chacune des pâles (avec $\overrightarrow{Ap_1}=b\cdot\vec{x}+c\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$), est diagonale dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. En déduire que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point A.
3. Déterminer la matrice d'inertie du rotor (les 4 pâles) au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

Éléments de correction

1. Disque percé

1. Déterminer la position du centre de masse G.

$$\overrightarrow{AG}=\frac{-r^2e}{R^2-r^2}\vec{u}=\frac{-r^2e}{R^2-r^2}(\cos\theta\vec{x}+\sin\theta\vec{y})$$

2. Déterminer les conditions à poser sur les coordonnées de ces deux points dans le repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ afin d'atteindre l'objectif proposé.

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-mr^2e}{R^2-r^2}\cos\theta+m_3x_3+m_4x_4=0\\ \dfrac{-mr^2e}{R^2-r^2}\sin\theta+m_3y_3+m_4y_4=0\end{cases}$$

3. Parallélépipède percé

1. Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes sont confondus en G.

$$\overline{\overline{I_G}}(S)=\begin{bmatrix}\rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & \rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{a^2+c^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & \rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{2}\right)\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2. Déterminer la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes ne sont plus confondus.

$$\overline{\overline{I_G}}(S)=\begin{bmatrix}\rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & \rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{a^2+c^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}+d^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \rho\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)-\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot c\cdot\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right)\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4. Échelle EPAS

1. Déterminer le vecteur position du centre de masse G_5 du parc échelle, dans le repère $R_5(O,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$ qui lui est associé.

$$\overrightarrow{OG_5}=\frac{L}{2}\cdot\vec{x}_5+\frac{h}{3}\cdot\vec{y}_5$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

2. Donner l'expression de la matrice d'inertie du parc échelle au point G_5 dans la base $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$.

$$\overline{\overline{I}}_{G_5}(5)=m\cdot\begin{bmatrix}\frac{11\cdot h^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & \frac{L^2}{4}+\frac{7\cdot h^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{h^2}{3}+\frac{L^2}{4}\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$$

5. Chargeur d'outil de centre d'usinage

1. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras est équipé de deux outils montés symétriquement.

$$\overline{\overline{I}}_{O_1}(2)=\begin{bmatrix}\frac{m_{ch}\cdot(b^2+c^2)}{12}+2\cdot(I_{G_x}+m_{out}\cdot {y_G}^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{m_{ch}\cdot(e^2+b^2)}{12}+2\cdot(I_{G_y}+m_{out}\cdot {x_G}^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_{ch}\cdot(c^2+e^2)}{12}+2\cdot\left(I_{G_z}+m_{out}\cdot({x_G}^2+{y_G}^2)\right)\end{bmatrix}_{b_1}$$

2. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras n'est équipé que d'un seul outil.

$$\overline{\overline{I}}_{O_1}(2)=\begin{bmatrix}\frac{m_{ch}\cdot(b^2+c^2)}{12}+I_{G_x}+m_{out}\cdot {y_G}^2 & m_{out}\cdot x_G\cdot y_G & 0\\ m_{out}\cdot x_G\cdot y_G & \frac{m_{ch}\cdot(e^2+b^2)}{12}+I_{G_y}+m_{out}\cdot {x_G}^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_{ch}\cdot(c^2+e^2)}{12}+I_{G_z}+m_{out}\cdot({x_G}^2+{y_G}^2)\end{bmatrix}_{b_1}$$

7. Rotor d'hélicoptère

1. Déterminer la matrice d'inertie de la pale $P1$ au point A dans la base $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$.

On est dans le cas d'une plaque, donc d'un parallélépipède dont une des dimensions est négligeable devant les autres :

$$\overline{\overline{I}}_A(P_1)=M\cdot\begin{bmatrix}\frac{a^2}{3} & \frac{-a}{2}\cdot L & 0\\ \frac{-a}{2}\cdot L & \frac{4\cdot L^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{a^2+4\cdot L^2}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

2. Montrer que la matrice d'inertie en A de quatre masses ponctuelles m, positionnées de la même manière sur chacune des pâles (avec $\overrightarrow{Ap_1}=b\cdot\vec{x}+c\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$), est diagonale. En déduire que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point A.

3. Déterminer la matrice d'inertie du rotor (les 4 pâles) au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

$$\overline{\overline{I}}_A(rotor)=\begin{pmatrix}\frac{2M}{3}\left(a^2(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{2M}{3}\left(a^2(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{4M}{3}\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

1. Disque percé

1. Déterminer la position du centre de masse G.

Les plans $(A,\vec{u},\vec{z})$ et $(A,\vec{u},\vec{v})$ sont plans de symétrie, donc le centre de masse est situé sur $(A,\vec{u})$, intersection des plans de symétrie : $\boxed{\overrightarrow{AG}=u_G\,\vec{u}}$

On a : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{S_\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\left(S_i\,\overrightarrow{AG_i}\right)$ notamment pour la composante sur l'axe $(A,\vec{u})$:

Donc $u_G=\frac{1}{S_\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\left(S_i\,u_{G_i}\right)=\frac{1}{S_1-S_2}\left(S_1\,u_{G_1}-S_2\,u_{G_2}\right)=\frac{-S_2\,e}{S_1-S_2}$ avec S_1 surface disque plein et S_2 surface disque vide

Donc $\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{-r^2e}{R^2-r^2}\vec{u}=\frac{-r^2e}{R^2-r^2}(\cos\theta\vec{x}+\sin\theta\vec{y})}$

2. Déterminer les conditions à poser sur les coordonnées de ces deux points dans le repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ afin d'atteindre l'objectif proposé.

On souhaite que :

$$\overrightarrow{AG'}=\vec{O}=\frac{1}{m+m_3+m_4}\cdot\left(\frac{-mr^2e}{R^2-r^2}(\cos\theta\vec{x}+\sin\theta\vec{y})+m_3(x_3\vec{x}+y_3\vec{y})+m_4(x_4\vec{x}+y_4\vec{y})\right)$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\frac{-mr^2e}{R^2-r^2}\cos\theta+m_3x_3+m_4x_4=0\\ \frac{-mr^2e}{R^2-r^2}\sin\theta+m_3y_3+m_4y_4=0\end{cases}}$$

2. Matrices d'inertie de solide élémentaire

1. Donner l'expression de la matrice d'inertie, au centre d'inertie dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, de chacun des solides suivants :

Tige pleine de masse m et de section négligeable

Cylindre avec $R\ll h$

$$\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix}m\frac{h^2}{12}&0&0\\0&m\frac{h^2}{12}&0\\0&0&0\end{bmatrix}_b$$

Disque plein de masse m et d'épaisseur négligeable

Cylindre avec $h\ll R$

$$\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix}m\frac{R^2}{4}&0&0\\0&m\frac{R^2}{4}&0\\0&0&m\frac{R^2}{2}\end{bmatrix}_b$$

Plaque rectangulaire pleine de masse m et d'épaisseur négligeable

Parallélépipède rectangle avec $c\ll a$ et $c\ll b$

$$\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix}m\frac{b^2}{12}&0&0\\0&m\frac{a^2}{12}&0\\0&0&m\frac{a^2+b^2}{12}\end{bmatrix}_b$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

3. Parallélépipède percé

1. Déterminer la matrice d'inertie au point G dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes sont confondus en G.

Les plans $(G,\vec{x},\vec{y})$, $(G,\vec{x},\vec{z})$ et $(G,\vec{y},\vec{z})$ sont plans de symétrie, la matrice est donc diagonale : $\boxed{D=E=F=0}$.

Le solide S peut se décomposer en deux solides de forme simple : un parallélépipède 1 et un cylindre 2.

On a : $\bar{\bar{I}}_G(S)=\bar{\bar{I}}_G(1)-\bar{\bar{I}}_G(2)$ avec $m_1=\rho V_1=\rho abc$ et $m_2=\rho V_2=\rho\pi R^2 c$:

$$\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix}\rho abc\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & \rho abc\left(\frac{a^2+c^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0\\ 0 & 0 & \rho abc\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{2}\right)\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

2. Déterminer la matrice d'inertie au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, d'un parallélépipède de dimension $a\times b\times c$, percé d'un cylindre de rayon R et de masse volumique ρ. Les deux centres d'inertie des deux volumes ne sont plus confondus.

Les plans $(O,\vec{x},\vec{y})$ et $(O,\vec{x},\vec{z})$ sont plans de symétrie, la matrice est donc diagonale : $\boxed{D=E=F=0}$.

Le solide S peut se décomposer en deux solides de forme simple : un parallélépipède 1 et un cylindre 2.

On a : $\bar{\bar{I}}_O(S)=\bar{\bar{I}}_O(1)-\bar{\bar{I}}_O(2)$.

Le théorème de Huygens permet d'écrire :

$$\bar{\bar{I}}_O(2)=\bar{\bar{I}}_{G_2}(2)+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \rho\pi R^2 c\cdot d^2 & 0\\ 0 & 0 & \rho\pi R^2 c\cdot d^2\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{car } \overrightarrow{OG_2}=d\vec{x}$$

Donc :

$$\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix}\rho abc\left(\frac{b^2+c^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0\\ 0 & \rho abc\left(\frac{a^2+c^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{4}+\frac{c^2}{12}+d^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \rho abc\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)-\rho\pi R^2 c\left(\frac{R^2}{2}+d^2\right)\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

Remarque : Attention pour un cylindre creux, la soustraction des matrices de 2 cylindres de rayon R et r, donne une matrice avec des termes visiblement sommés !!!

Démonstration :

Soit un tube homogène de masse m, de diamètre extérieur R, de diamètre intérieur r et de hauteur h orientée suivant $\vec{z}$.

Soit 1 un cylindre plein de rayon *R* et de hauteur *h.*

Soit 2 un cylindre plein de rayon *r* et de hauteur *h.*

$$\bar{\bar{I}}_{G_1}(1)=\begin{bmatrix} m_1\frac{R^2}{4}+m_1\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_1\frac{R^2}{4}+m_1\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_1\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_b \quad \text{et} \quad \bar{\bar{I}}_{G_2}(2)=\begin{bmatrix} m_2\frac{r^2}{4}+m_2\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_2\frac{r^2}{4}+m_2\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_2\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_b$$

On a : $\bar{\bar{I}}_G(S)=\bar{\bar{I}}_G(1)-\bar{\bar{I}}_G(2)$

Donc $\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix} m_1\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)-m_2\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m_1\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right)-m_2\left(\frac{r^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_1\frac{R^2}{2}-m_2\frac{r^2}{2} \end{bmatrix}_b$

Écrivons m_1 et m_2 en fonction de m.

$$m_1=\rho V_1=\frac{m}{V_1-V_2}V_1=\frac{m}{\pi(R^2-r^2)h}\cdot\pi R^2 h \quad\Rightarrow\quad m_1=\frac{mR^2}{R^2-r^2}$$

De même $m_2=\frac{mr^2}{R^2-r^2}$

Donc $\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{R^2-r^2}\left(\frac{R^4}{4}+\frac{R^2h^2}{12}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^2h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{R^2-r^2}\left(\frac{R^4}{4}+\frac{R^2h^2}{12}-\frac{r^4}{4}-\frac{r^2h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{R^2-r^2}\left(\frac{R^4}{2}-\frac{r^2}{2}\right) \end{bmatrix}_b$

Ce qui conduit à : $\boxed{\bar{\bar{I}}_G(S)=\begin{bmatrix} m\frac{R^2+r^2}{4}+m\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2+r^2}{4}+m\frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2+r^2}{2} \end{bmatrix}_b}$

Ce résultat provient des différentes masses en question m, m_1 *et* m_2.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

4. Échelle EPAS

1. Déterminer le vecteur position du centre de masse G_5 du parc échelle, dans le repère $R_5=(O,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$ qui lui est associé.

G_5 est situé sur $(O',\vec{y}_5)$, intersection des plans de symétrie $(O,\vec{x}_5,\vec{y}_5)$ et $(O',\vec{x}_5,\vec{z}_0)$. On a donc : $\overrightarrow{OG_5}=\frac{L}{2}\vec{x}_5+y_{G_5}\vec{y}_5$

Avec : $y_{G_5}=\overrightarrow{OG_5}\cdot\vec{y}_5=\frac{1}{m_\Sigma}\sum_{i=1}^{3}\left(m_i\overrightarrow{OG_i}\right)\cdot\vec{y}_5=\frac{1}{3m}m(\overrightarrow{OG_1}\cdot\vec{y}_5+\overrightarrow{OG_2}\cdot\vec{y}_5+\overrightarrow{OG_3}\cdot\vec{y}_5)$

Or : $\overrightarrow{OG_1}\cdot\vec{y}_5=\frac{h}{2}\vec{y}_5$ $\quad\overrightarrow{OG_2}\cdot\vec{y}_5=0$ $\quad\overrightarrow{OG_3}\cdot\vec{y}_5=\frac{h}{2}\vec{y}_5$

D'où : $y_{G_5}=\frac{h}{3}$, ce qui nous permet d'écrire que : $\boxed{\overrightarrow{OG_5}=\frac{L}{2}\vec{x}_5+\frac{h}{3}\vec{y}_5}$

2. Donner l'expression de la matrice d'inertie du parc échelle au point G_5 dans la base $(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$.

Les plans $(G_5,\vec{x}_5,\vec{y}_5)$ et $(G_5,\vec{x}_5,\vec{z}_0)$ sont plans de symétrie, la matrice est donc diagonale : $\boxed{D=E=F=0}$.

On ne s'intéresse donc qu'aux moments d'inertie de $\bar{\bar{I}}_{G_5}(S)$.

On a : $\bar{\bar{I}}_{G_5}(5)=\bar{\bar{I}}_{G_5}(1)+\bar{\bar{I}}_{G_5}(2)+\bar{\bar{I}}_{G_5}(3)$

On a : $\bar{\bar{I}}_{G_1}(1)=\bar{\bar{I}}_{G_3}(3)=\begin{bmatrix}\frac{mh^2}{12}&0&0\\0&\frac{mL^2}{12}&0\\0&0&\frac{m(L^2+h^2)}{12}\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$ et $\bar{\bar{I}}_{G_2}(2)=\begin{bmatrix}\frac{mh^2}{12}&0&0\\0&\frac{m(L^2+h^2)}{12}&0\\0&0&\frac{mL^2}{12}\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$

En utilisant le théorème de Huygens, on a :

$\bar{\bar{I}}_{G_5}(1)=\bar{\bar{I}}_{G_1}(1)+\begin{bmatrix}m\left[\left(\frac{h}{6}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]&-&-\\-&m\left(\frac{h}{2}\right)^2&-\\-&-&m\left(\frac{h}{6}\right)^2\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$ $\quad\bar{\bar{I}}_{G_5}(2)=\bar{\bar{I}}_{G_2}(2)+\begin{bmatrix}m\left(\frac{h}{3}\right)^2&-&-\\-&0&-\\-&-&m\left(\frac{h}{3}\right)^2\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$

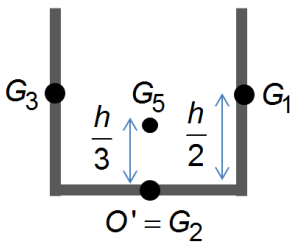
Et $\bar{\bar{I}}_{G_5}(3)=\bar{\bar{I}}_{G_3}(3)+\begin{bmatrix}m\left[\left(\frac{h}{6}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]&-&-\\-&m\left(\frac{h}{2}\right)^2&-\\-&-&m\left(\frac{h}{6}\right)^2\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}$

car

$\overrightarrow{G_5G_1}=\frac{h}{6}\vec{y}_5-\frac{h}{2}\vec{z}_0$

$\overrightarrow{G_5G_2}=\frac{-h}{3}\vec{y}_5$

$\overrightarrow{G_5G_3}=\frac{h}{6}\vec{y}_5+\frac{h}{2}\vec{z}_0$



On a donc : $\boxed{\bar{\bar{I}}_{G_5}(5)=\begin{bmatrix}\frac{m11h^2}{12}&0&0\\0&m\left(\frac{L^2}{4}+\frac{7h^2}{12}\right)&0\\0&0&m\left(\frac{h^2}{3}+\frac{L^2}{4}\right)\end{bmatrix}_{(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)}}$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

5. Chargeur d'outil de centre d'usinage

1. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras est équipé de deux outils montés symétriquement.

Les plans $(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et $(O_1,\vec{x}_1,\vec{z}_1)$ sont plans de symétrie, la matrice est donc diagonale : $\boxed{D=E=F=0}$.

On ne s'intéresse donc qu'aux moments d'inertie de $\bar{\bar{I}}_{O_1}(2)$.

On a : $\bar{\bar{I}}_{O_1}(2)=\bar{\bar{I}}_{O_1}(ch)+\bar{\bar{I}}_{O_1}(out)+\bar{\bar{I}}_{O_1}(out')$

$$\bar{\bar{I}}_{O_1}(ch)=\begin{bmatrix}\frac{m_{ch}(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0\\ 0 & \frac{m_{ch}(e^2+b^2)}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_{ch}(c^2+e^2)}{12}\end{bmatrix}_{b_1}$$

En utilisant le théorème de Huygens, on a :

$$\bar{\bar{I}}_{O_1}(out)=\bar{\bar{I}}_{O_1}(out')=\bar{\bar{I}}_G(out)+\begin{bmatrix}m_{out}{y_G}^2 & - & -\\ - & m_{out}{x_G}^2 & -\\ - & - & m_{out}\left({x_G}^2+{y_G}^2\right)\end{bmatrix}_{b_1} \quad \text{car } \overrightarrow{O_1G}=-x_G\vec{x}_1+y_G\vec{y}_1 \text{ et } \overrightarrow{O_1G'}=-x_G\vec{x}_1-y_G\vec{y}_1$$

On a donc :

$$\bar{\bar{I}}_{O_1}(2)=\begin{bmatrix}\frac{m_{ch}(b^2+c^2)}{12}+2\left[I_{(G,\vec{x})}(out)+m_{out}{y_G}^2\right] & 0 & 0\\ 0 & \frac{m_{ch}(e^2+b^2)}{12}+2\left[I_{(G,\vec{y})}(out)+m_{out}{x_G}^2\right] & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_{ch}(c^2+e^2)}{12}+2\left[I_{(G,\vec{z})}(out)+m_{out}({x_G}^2+{y_G}^2)\right]\end{bmatrix}_{b_1}$$

2. Déterminer, dans la base $(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$, la matrice d'inertie en O_1 de l'ensemble 2 (out+ch) lorsque le bras n'est équipé que d'un seul outil.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul outil, seul le plan $(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ est plan de symétrie, le produit d'inertie F n'est pas nul. Mais $\boxed{D=E=0}$.

On a : $\bar{\bar{I}}_{O_1}(2)=\bar{\bar{I}}_{O_1}(ch)+\bar{\bar{I}}_{O_1}(out)$

Avec :

$$\bar{\bar{I}}_{O_1}(out)=\bar{\bar{I}}_G(out)+\begin{bmatrix}m_{out}{y_G}^2 & m_{out}x_Gy_G & -\\ m_{out}x_Gy_G & m_{out}{x_G}^2 & -\\ - & - & m_{out}\left({x_G}^2+{y_G}^2\right)\end{bmatrix}_{b_1} \quad \text{car } \overrightarrow{O_1G}=-x_G\vec{x}_1+y_G\vec{y}_1$$

On a donc :

$$\bar{\bar{I}}_{O_1}(2)=\begin{bmatrix}\frac{m_{ch}(b^2+c^2)}{12}+I_{(G,\vec{x})}(out)+m_{out}{y_G}^2 & m_{out}x_Gy_G & 0\\ m_{out}x_Gy_G & \frac{m_{ch}(e^2+b^2)}{12}+I_{(G,\vec{y})}(out)+m_{out}{x_G}^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{m_{ch}(c^2+e^2)}{12}+I_{(G,\vec{z})}(out)+m_{out}({x_G}^2+{y_G}^2)\end{bmatrix}_{b_1}$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

6. Agitateur médical

1. Déterminer, dans la position du modèle ci-dessus, une valeur numérique approchée du moment d'inertie par rapport à l'axe $(O_3,\vec{z})$ de l'ensemble mobile {E}. On pourra faire l'hypothèse que les épaisseurs des plaques sont négligeables devant leurs autres dimensions.

On a : $I_{O_3,\vec{z}}(E)=I_{O_3,\vec{z}}(31)+I_{O_3,\vec{z}}(31')+I_{O_3,\vec{z}}(32)+I_{O_3,\vec{z}}(33)+I_{O_3,\vec{z}}(M2)+I_{O_3,\vec{z}}(c)$

Pour calculer les différents termes de cette expression, on utilise le théorème de Huygens :

- Plaque 1 supposée d'épaisseur négligeable :

$$I_{O_3,\vec{z}}(31)=I_{G_{31},\vec{z}}(31)+m_{31}\left(\frac{L_{31}}{2}\right)^2 \text{ car } \overrightarrow{O_3G_{31}}=\frac{L_{31}}{2}\vec{x}_3-\frac{L_{32}}{2}\vec{z}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(31)=m_{31}\frac{({L_{31}}^2+{h_{31}}^2)}{12}+m_{31}\left(\frac{L_{31}}{2}\right)^2$$

- Plaque 1' supposée d'épaisseur négligeable :

$$I_{O_3,\vec{z}}(31')=I_{G_{31'},\vec{z}}(31')+m_{31}\left(\frac{L_{31}}{2}\right)^2 \text{ car } \overrightarrow{O_3G_{31'}}=\frac{L_{31}}{2}\vec{x}_3+\frac{L_{32}}{2}\vec{z}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(31')=m_{31}\frac{({L_{31}}^2+{h_{31}}^2)}{12}+m_{31}\left(\frac{L_{31}}{2}\right)^2$$

- Plaque 2 supposée d'épaisseur négligeable :

$$I_{O_3,\vec{z}}(32)=I_{G_{32,\vec{z}}}(32)+m_{32}{L_{31}}^2 \text{ car } \overrightarrow{O_3G_{32}}=L_{31}\vec{x}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(32)=m_{32}\frac{{h_{32}}^2}{12}+m_{32}{L_{31}}^2$$

- Plaque 3 supposée d'épaisseur négligeable :

$$I_{O_3,\vec{z}}(33)=I_{G_{33,\vec{z}}}(33)+m_{33}\left({d_{33}}^2+\left(\frac{h_{33}}{4}\right)^2\right) \text{ car } \overrightarrow{O_3G_{33}}=d_{33}\vec{x}_3+\frac{h_{33}}{4}\vec{y}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(33)=m_{33}\frac{{h_{33}}^2}{12}+m_{33}\left({d_{33}}^2+\left(\frac{h_{33}}{4}\right)^2\right)$$

- Moto-réducteur M2 assimilé à un cylindre plein :

$$I_{O_3,\vec{z}}(M2)=I_{G_{M2},\vec{z}}(M2)+m_2\left({x_{G_{M2}}}^2+{y_{G_{M2}}}^2\right) \text{ car } \overrightarrow{O_3G_{M2}}=x_{G_{M2}}\vec{x}_3+y_{G_{M2}}\vec{y}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(M2)=\frac{m_2}{12}\left(3\left(\frac{D_{M2}}{2}\right)^2+{h_{M2}}^2\right)+m_2\left({x_{G_{M2}}}^2+{y_{G_{M2}}}^2\right)$$

- Ensemble *c* assimilé à un cylindre plein :

$$I_{O_3,\vec{z}}(c)=I_{G_{c,\vec{z}}}(c)+m_{cr}\left({x_{G_c}}^2+{y_{G_c}}^2\right) \text{ car } \overrightarrow{O_3G_C}=x_{Gc}\vec{x}_3+y_{Gc}\vec{y}_3$$

$$\text{Donc : } I_{O_3,\vec{z}}(c)=\frac{m_{cr}}{12}\left(3\left(\frac{D_{cr}}{2}\right)^2+{h_{cr}}^2\right)+m_{cr}\left({x_{G_c}}^2+{y_{G_c}}^2\right)$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

7. Rotor d'hélicoptère

1. Déterminer la matrice d'inertie de la pale $P1$ au point A dans la base $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$.

On est dans le cas d'une plaque, donc d'un parallélépipède dont une des dimensions est négligeable devant les autres :

$$\bar{\bar{I}}_{G_1}(P_1)=\begin{bmatrix} M\frac{a^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M\frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{12}+\frac{L^2}{3}\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

. Le théorème Huygens donne : $\bar{\bar{I}}_A(P_1)=\bar{\bar{I}}_{G_1}(P_1)+\begin{bmatrix} M\frac{a^2}{4} & M\frac{-a}{2}L & 0 \\ M\frac{-a}{2}L & ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\frac{a^2}{4}+L^2\right) \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$

car $\overrightarrow{AG_1}=L\vec{x}+\frac{a}{2}\vec{u}_1$

Donc : $\boxed{\bar{\bar{I}}_A(P_1)=\begin{bmatrix} M\frac{a^2}{3} & M\frac{-a}{2}L & 0 \\ M\frac{-a}{2}L & M\frac{4L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{a^2+4L^2}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}}$

2. Montrer que la matrice d'inertie en A de quatre masses ponctuelles m, positionnées de la même manière sur chacune des pâles (avec $\overrightarrow{Ap_1}=b\cdot\vec{x}+c\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$), est diagonale dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. En déduire que la matrice d'inertie du rotor est diagonale au point A.

Soit une masse ponctuelle m :

- positionnée au point p_1 sur la pale P1 tel que : $\overrightarrow{Ap_1}=b\cdot\vec{x}+c\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$;
- positionnée au point p_2 sur la pale P2 tel que : $\overrightarrow{Ap_2}=-c\cdot\vec{x}+b\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$;
- positionnée au point p_3 sur la pale P3 tel que : $\overrightarrow{Ap_3}=-b\cdot\vec{x}-c\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$;
- positionnée au point p_4 sur la pale P4 tel que : $\overrightarrow{Ap_4}=c\cdot\vec{x}-b\cdot\vec{y}+d\cdot\vec{z}$;

Le théorème de Huygens nous permet d'écrire :

$$\bar{\bar{I}}_A(p_1)=\begin{bmatrix} - & -mbc & -mbd \\ -mbc & - & -mcd \\ -mbd & -mcd & - \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \bar{\bar{I}}_A(p_2)=m\cdot\begin{bmatrix} / & b\cdot c & c\cdot d \\ b\cdot c & / & -b\cdot d \\ c\cdot d & -b\cdot d & / \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$\bar{\bar{I}}_A(p_3)=m\cdot\begin{bmatrix} / & -b\cdot c & b\cdot d \\ -b\cdot c & / & c\cdot d \\ b\cdot d & c\cdot d & / \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \bar{\bar{I}}_A(p_4)=m\cdot\begin{bmatrix} / & b\cdot c & -c\cdot d \\ b\cdot c & / & b\cdot d \\ -c\cdot d & b\cdot d & / \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On a alors : $\boxed{\bar{\bar{I}}_A(\sum p_i)=\bar{\bar{I}}_A(p_1)+\bar{\bar{I}}_A(p_2)+\bar{\bar{I}}_A(p_3)+\bar{\bar{I}}_A(p_4)=\begin{bmatrix} / & 0 & 0 \\ 0 & / & 0 \\ 0 & 0 & / \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$

On en déduit que la matrice du rotor est diagonale. En effet, pour chaque point p_1 de la pâle P1, il existe des points p_2, p_3, et p_4 des autres pâles respectant les conditions du calcul précédent.

On peut même généraliser à toute hélice ou rotor de n pâles identiques réparties régulièrement.

Remarque : on peut montrer que cette matrice est diagonale en raisonnant sur les symétries matérielles et leur lien avec le calcul des produits d'inertie. En effet à tout point $M_1(b,c,d)$ de la pâle P1, il existe un point :

- $M_2(-c,b,d)$ de la pâle P2 ;
- $M_3(-b,-c,d)$ de la pâle P3 ;
- $M_4(c,-b,d)$ de la pâle P2.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

On en déduit que : $F_{rotor}=0$, car :

- le produit d'inertie $F_{P1\cup P2}=\int_{P1\cup P2} x\cdot y\,dm$ de l'ensemble des pales P1 et P2 est donc nul.
- le produit d'inertie $F_{P3\cup P4}=\int_{P3\cup P4} x\cdot y\,dm$ de l'ensemble des pales P3 et P4 est donc nul.

On a aussi : $E_{rotor}=0$, car :

- le produit d'inertie $E_{P1\cup P3}=\int_{P1\cup P3} z\cdot x\,dm$ de l'ensemble des pales P1 et P3 est donc nul.
- le produit d'inertie $E_{P2\cup P4}=\int_{P2\cup P4} z\cdot x\,dm$ de l'ensemble des pales P2 et P4 est donc nul.

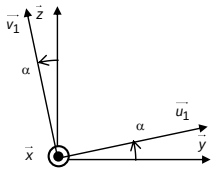
On a aussi : $D_{rotor}=0$, car :

- le produit d'inertie $D_{P1\cup P3}=\int_{P1\cup P3} y\cdot z\,dm$ de l'ensemble des pales P1 et P3 est donc nul.
- le produit d'inertie $D_{P2\cup P4}=\int_{P2\cup P4} y\cdot z\,dm$ de l'ensemble des pales P2 et P4 est donc nul.

Par ailleurs, en voyant que $(A,\vec{z})$ était un axe de symétrie, donc axe principal d'inertie, on savait que $\boxed{D=E=0}$.

3. Déterminer la matrice d'inertie du rotor (les 4 pâles) au point A dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Seuls les moments d'inertie nous intéressent car la matrice recherchée est diagonale. Plutôt que d'utiliser la matrice de passage de la base $(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$ à la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, il est plus simple de calculer séparément les 3 moments d'inertie :



$$I_{A,\vec{y}}(P_1)=\vec{y}\cdot\bar{\bar{I}}_A(P_1)_{b1}\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{bmatrix}M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}L & 0\\ -M\frac{a}{2}L & M\frac{4L^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & M\frac{a^2+4L^2}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}=\begin{pmatrix}0\\ \cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{pmatrix}-M\frac{a}{2}L\cdot\cos\alpha\\ M\frac{4L^2}{3}\cdot\cos\alpha\\ -M\frac{a^2+4L^2}{3}\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

$$I_{A,\vec{y}}(P_1)=M\frac{4L^2}{3}\cdot\cos^2\alpha+M\frac{a^2+4L^2}{3}\cdot\sin^2\alpha\quad\Rightarrow\quad\boxed{I_{A,\vec{y}}(P_1)=B_1=\frac{M}{3}\left(4L^2+a^2\sin^2\alpha\right)}$$

$$I_{A,\vec{z}}(P_1)=\vec{z}\cdot\bar{\bar{I}}_A(P_1)_{b1}\cdot\vec{z}=\begin{pmatrix}0\\ \sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{bmatrix}M\frac{a^2}{3} & -M\frac{a}{2}L & 0\\ -M\frac{a}{2}L & M\frac{4L^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & M\frac{a^2+4L^2}{3}\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}=\begin{pmatrix}0\\ \sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}\cdot\begin{pmatrix}-M\frac{a}{2}L\cdot\sin\alpha\\ M\frac{4L^2}{3}\cdot\sin\alpha\\ M\frac{a^2+4L^2}{3}\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{u}_1,\vec{v}_1)}$$

$$I_{A,\vec{z}}(P_1)=M\frac{4L^2}{3}\cdot\sin^2\alpha+M\frac{a^2+4L^2}{3}\cdot\cos^2\alpha\quad\Rightarrow\quad\boxed{I_{A,\vec{z}}(P_1)=C_1=\frac{M}{3}\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)}$$

En procédant de la même manière avec les 3 autres pâles OU après avoir remarqué, en observant la répartition de la masse de chacune des pâles par rapport aux axes du repère $(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, que :

$$\begin{matrix}A_1=A_3=B_2=B_4\\ B_1=B_3=A_2=A_4\\ C_1=C_2=C_3=C_4\end{matrix}\Rightarrow\bar{\bar{I}}_A(rotor)=\begin{bmatrix}2\cdot A_1+2\cdot B_1 & 0 & 0\\ 0 & 2\cdot B_1+2\cdot A_1 & 0\\ 0 & 0 & 4\cdot C_1\end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_A(rotor)=\begin{pmatrix}\frac{2M}{3}\left(a^2(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{2M}{3}\left(a^2(1+\sin^2\alpha)+4L^2\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{4M}{3}\left(4L^2+a^2\cos^2\alpha\right)\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941 myprepa27@gmail.com http://www.myprepa27.wix.com/website

REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MONASTIR

INSTITUT PREPARATOIRE

AUX ETUDES D'INGENIEURS

DE MONASTIR

Section : Mathématique – Physique & Physique – Chimie

TD N°3 de STA-MSI

ETUDE D'UNE PINCE VIBRANTE

PRESENTATION

a- Principe de fonctionnement :

Dans les très grands domaines (Espagne, Turquie, Amérique du Sud, etc.), les olives sont récoltées mécaniquement. Le mécanisme que nous allons étudier est une pince vibrante permettant de faire vibrer l'arbre et d'entraîner ainsi la chute des olives sur un filet préalablement mis au sol (figure 1). Le conducteur approche l'arbre. La pince hydraulique est alors positionnée par rapport à l'arbre puis serrée sur le tronc. Ensuite, la pince est mise en vibration pendant 2 à 15 secondes, entraînant la chute des olives. L'engin est ensuite positionné sous un autre arbre. L'opération de prise du tronc et la vibration ne doivent pas blesser la partie superficielle du tronc.

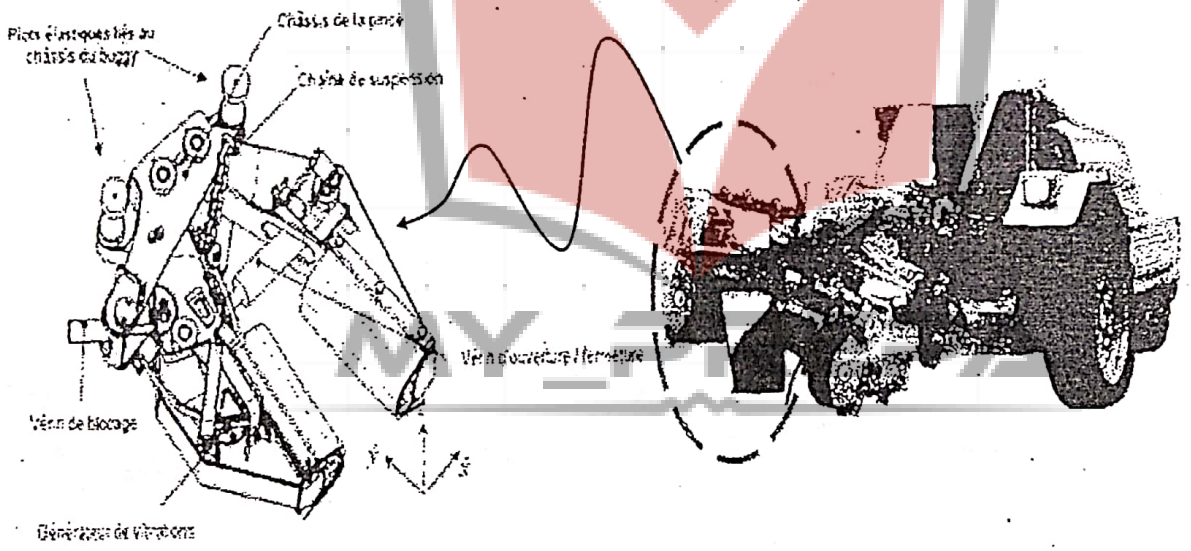


Figure 1 : Schéma général de la pince vibrante

La figure 2 présente le schéma cinématique minimal de la pince vibrante.

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

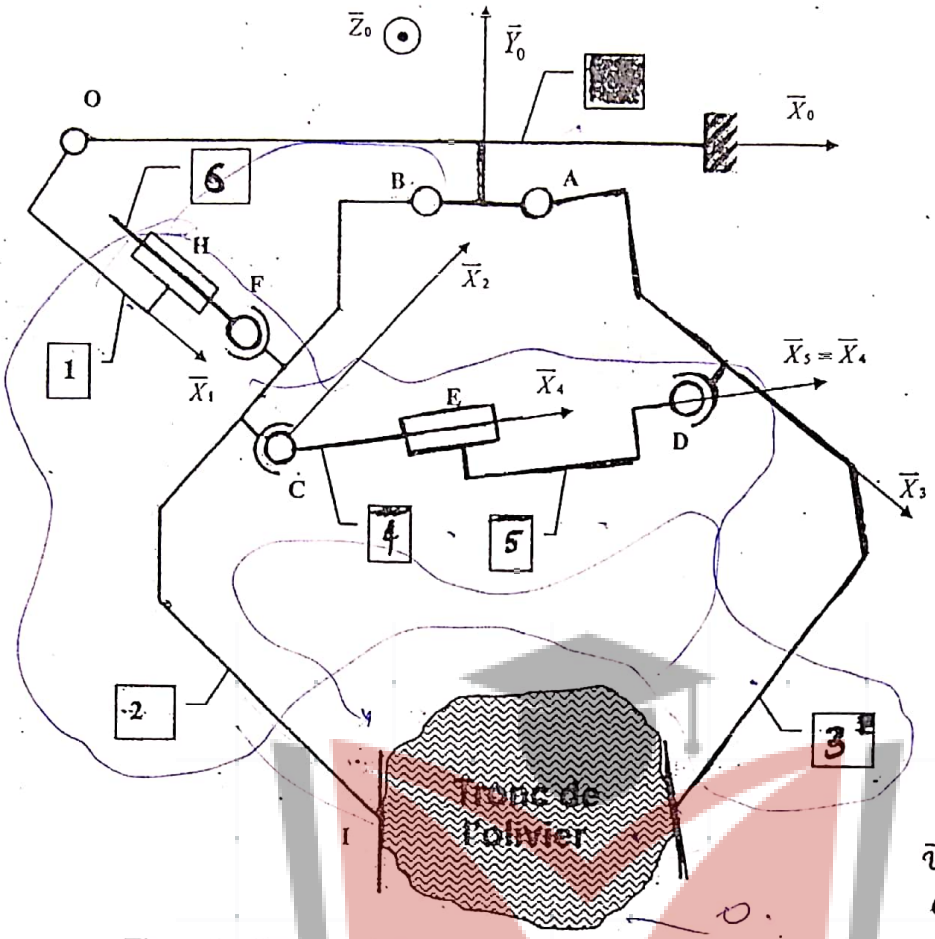
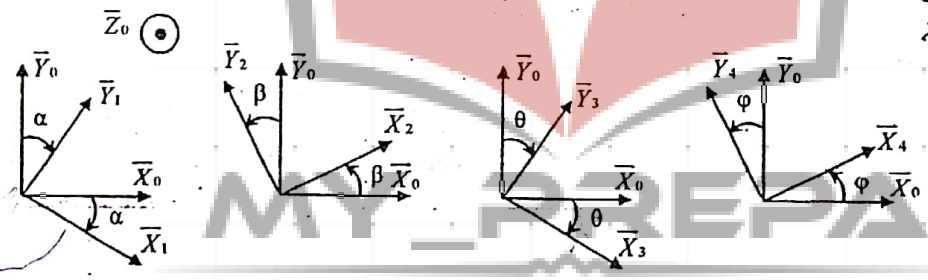


Figure 2 : Schéma cinématique minimal de la pince vibrante



Mouvement de 1/0 Mouvement de 2/0 Mouvement de 3/0 Mouvement de 4/0

Figure 3 : Rotation plane des pièces

On donne :

$\overrightarrow{OF} = \lambda(t)\vec{X}_1$, $\overrightarrow{FC} = -c\vec{X}_2 - d\vec{Y}_2$, $\overrightarrow{BC} = -2e\vec{X}_2$, $\overrightarrow{BA} = l\vec{X}_0$, $\overrightarrow{AD} = 2e\vec{X}_3$, $\overrightarrow{DC} = -x(t)\overrightarrow{X_4}$,

$\overrightarrow{OB} = 2l\vec{X}_0 - l\vec{Y}_0$, $\overrightarrow{BI} = -b\vec{Y}_0$, $\overrightarrow{BF} = -e\vec{X}_2$

Avec *a, b, c, d, e* et *l* des constantes positives. $\lambda(t)$, $x(t)$, α, β, θ et φ sont des paramètres variables.

b- Modélisation de la pièce (2) :

On suppose que la pièce (2) (voir figure ci-dessous) est de forme cylindrique percée de masse m_2 et de rayon (R_1, R_2) et de longueur L.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

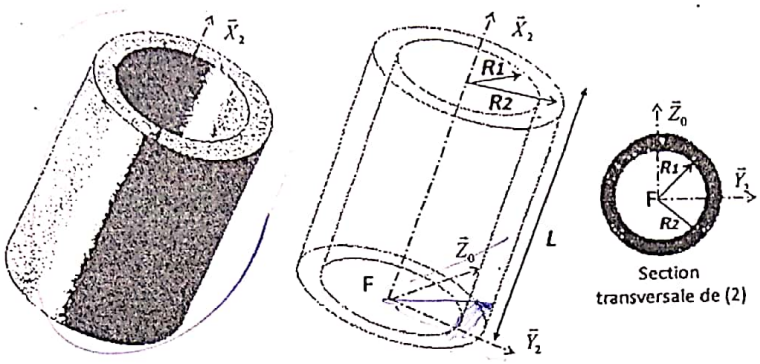


Figure 4 : Modélisation de la pièce (2)

c- Hypothèses sur la partie dynamique :

- Toutes les pièces du mécanisme sont supposées de masse négligeable à l'exception de (1), (2) et (3).
  - Le solide (1) de masse $\mathbf{m_1}$, de centre de gravité **O** et de moment d'inertie : $I_{(O,\vec{Z}_0)} = I_1$
- Le solide (2) de masse $\mathbf{m_2}$, de centre de gravité **F** et de matrice d'inertie :

$$[I_F(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{B2}$$

- Le solide (3) de masse $\mathbf{m_3}$, de centre de gravité **D** et de moment d'inertie $I_{(D,\vec{Z}_0)} = I_3$
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites.
- Le moteur (M) exerce sur le solide (1) un couple moteur : $\overrightarrow{C_m} = -C_m \overrightarrow{Z_0}$.
- L'action de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{z}_0$.
- L'action de tronc de l'olivier sur (2) est modélisée par $\overrightarrow{F_T} = -F_T \overrightarrow{X_0}$, au point I.
- L'action de la liaison de la pièce (6) sur la pièce (1) est réduite à $\overrightarrow{F_H} = F_H \overrightarrow{X_1}$
- Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est porté par $\overrightarrow{X_1}$

I- ETUDE GEOMETRIQUE

1. Tracer le graphe de liaisons en identifiant les liaisons entre les différentes pièces.
2. Ecrire, dans la base $B_0\left(\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0}\right)$, le système d'équations correspondant à la fermeture de la chaîne cinématique constituée par les solides **(0 - 1 - 6 - 2 - 0)**.
3. Ecrire, dans la base $B_0\left(\overrightarrow{X_0},\overrightarrow{Y_0},\overrightarrow{Z_0}\right)$, le système d'équations correspondant à la fermeture de la chaîne cinématique constituée par les solides **(0 - 3 – 5 - 4 - 2 - 0)**.
4. Déduire le nombre de degré de liberté du mécanisme

II- ETUDE CINEMATIQUE

5. Trouver les torseurs cinématiques représentants :
   a. Le mouvement de (1) par rapport à (0) au point O.
   b. Le mouvement de (2) par rapport à (0) au point F en fonction de λ, $\dot{\lambda}$, $\dot{\alpha}$.
   c. Le mouvement de (3) par rapport à (0) au point D.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

6. Trouver le vecteur vitesse de (6) par rapport à (0) au point F en fonction de $\dot{\beta}$:

7. Ecrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point F, entre (6) et (2). En déduire le système d'équations, projetées dans la base $B_0\left(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0\right)$, qui en découle.

III- GEOMETRIE DES MASSES

8. Montrer que la matrice d'inertie de (2) (fig 4) est de la forme suivante dans la base de R_2.

$$[I_F(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}_{B2}$$

9. Trouver le moment d'inertie A_2

10. Montrer que $2B_2 = A_2 + 2\int x^2 dm$

11. Déduire alors B_2

12. Vérifier si la pièce 2 est équilibrée dynamiquement

IV- ETUDE DYNAMIQUE

13. Trouver les torseurs cinétiques suivants :

$$\{C_{(1/0)}\}_O \quad \{C_{(2/0)}\}_F \quad \{C_{(3/0)}\}_D$$

14. Trouver le torseur dynamique de (1) dans son mouvement par rapport à (0) au point O :

$$\{D_{(1/0)}\}_O$$

15. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures, appliquées au solide (1). En déduire dans la base B_0 le torseur des actions mécaniques extérieures appliquées au solide (1) au point O.

16. Etablir le système d'équations scalaires obtenu par l'application du Principe Fondamental de la Dynamique au solide (1) dans son mouvement par rapport à (0). Déduire les inconnues de liaison.

17. Calculer l'énergie cinétique du système mécanique (S) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} en mouvement par rapport au bâti (0).

18. Calculer la puissance des actions mécaniques extérieures appliquées sur le système (S) dans son mouvement par rapport au bâti (0).

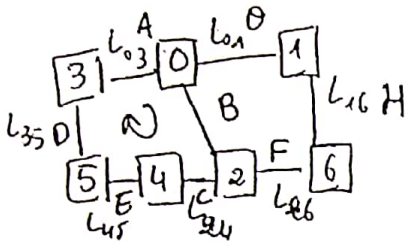
19. Calculer la puissance intérieure développée par les actions mutuelles entre les pièces du système (S).

20. Par application du théorème de l'énergie cinétique au système (S) dans son mouvement par rapport au bâti (0), déterminer l'expression de F_1.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

Correction de TD n°3 : STA

Etude Géométrique :



L_{01} : Pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$
L_{2B} : Pivot glissant d'axe (
L_{03} : Pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$
L_{35} : Rotule de centre D
L_{45} : Pivot glissant d'axe $(E, \vec{x}_4)$
L_{24} : Rotule de centre C.
L_{26} : Rotule de centre F.
L_{06} : Pivot d'axe (

) $(0-1-6-2-0)$

$\theta\vec{0}' = \vec{0}'$, $\vec{OH}' + \vec{HF}' + \vec{FB}' + \vec{BD}' = \vec{0}'$

$\vec{OF}' + \vec{FB}' + \vec{BD}' = \vec{0}'$

$\lambda(t)\vec{x}_1' + e\vec{x}_2' + 2l\vec{x}_0' =$

$\vec{x}_1' = +\cos\alpha\,\vec{x}_0' + \sin\alpha\,\vec{y}_0'$

$\vec{x}_2' = \cos\beta\,\vec{x}_0' + \sin\beta\,\vec{y}_0'$

$\Leftrightarrow -\lambda(t)\cos\alpha\,\vec{x}_0' - \lambda(t)\sin\alpha\,\vec{y}_0' + e\cos\beta\,\vec{x}_0' + e\sin\beta\,\vec{y}_0' - 2l\vec{x}_0' - l\vec{y}_0'$

$\Rightarrow \vec{x}_0'\left(+\lambda(t)\cos\alpha + e\cos\beta - 2l\right) + \vec{y}_0'\left(-\lambda(t)\sin\alpha + e\sin\beta - l\right)\vec{0}' = \vec{0}'$

$\hookrightarrow \begin{cases} \vec{x}_0' : +\lambda(t)\cos\alpha + e\cos\beta - 2l = 0 \\ \vec{y}_0' : -\lambda(t)\sin\alpha + e\sin\beta - l = 0 \end{cases}$

) $(0-3-5-4-2-0)$

$\vec{AA}' = \vec{AB}' + \vec{BC}' + \vec{CE}' + \vec{ED}' + \vec{DA}' = \vec{0}'$

$\Rightarrow -l\vec{y}_0' - B\,2e\,\vec{x}_2' + x(t)\,\vec{x}_4' - 2e\,\vec{x}_3' = \vec{0}'$

$\begin{cases} \vec{x}_2' = \cos\beta\,\vec{x}_0' + \sin\beta\,\vec{y}_0' \\ \vec{x}_4' = \cos\theta\cdot\vec{x}_3' + \sin\theta\,\vec{y}_0' \\ \vec{x}_3' = \cos\theta\,\vec{x}_0' - \sin\theta\,\vec{y}_0' \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \vec{x}_0' : -l - 2e\cos\beta + x(t)\cos\theta - 2e\cos\theta) = 0 \\ \vec{y}_0' : -2e\sin\beta + x(t)\sin\theta + 2e\sin\theta = 0 \end{cases}$

) dll = $6 - 4 = 2$

Etude cinématique :

MY_PREPA

a) $\{\mathcal{V}(1/0)\}_D = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(D\in 1/0)\end{matrix}\right\}_D = \left\{\begin{matrix}\dot{\gamma}\vec{z}_0 \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_D$

b) $\{\mathcal{V}(2/0)\}_F = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(2/0) \\ \vec{V}(F\in 2/0)\end{matrix}\right\}_F = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \vec{V}(F\in 2/0)\end{matrix}\right\}$

~~$\vec{V}(F\in 2/0) = \vec{V}(F\in 2/6) + \vec{V}(F\in 6/0) = \vec{V}(F\in 2/6) + \vec{V}(F\in 6/1) +$~~

$\vec{V}(F\in 2/0) = \frac{d\vec{OF}}{dt}\Big|_{R_0} = \lambda'(t)\cdot\vec{x}_1 + \frac{d\vec{x}_1}{dt}\cdot\lambda(t) = \dot{\lambda}(t)\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1$

$\{\mathcal{V}(2/0)\}_F = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\vec{z}_0 \\ \dot{\lambda}(t)\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1\end{matrix}\right\}_F$

c) $\{\mathcal{V}(3/0)\}_D = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(3/0) \\ \vec{V}(O\in 3/0)\end{matrix}\right\}_D = \left\{\begin{matrix}-\dot{\theta}\vec{z}_0 \\ -\dot{\theta}\,2e\,\vec{y}_3\end{matrix}\right\}_D$

$\vec{V}(D\in 3/0) = \underbrace{\vec{V}(A\in 3/0)}_{\vec{0}} + \vec{AD}\wedge\vec{\Omega}(3/0) = -\dot{\theta}\vec{z}_0\wedge 2e\vec{x}_3 = -\dot{\theta}\,2e\,\vec{y}_3$

6) $\vec{V}(F\in 6/0) = \frac{d\vec{BF}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d(-e\vec{x}_2)}{dt} = -e\frac{d\vec{x}_2}{dt} = -e\vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{x}_2$

$\vec{V}(F\in 6/0) = -e\dot{\beta}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_2 = -e\dot{\beta}\vec{y}_2$

7) ~~Condition cinématique~~:

$\vec{V}(F\in 6/2) = \vec{0}$

$\vec{V}(F\in 6/0) = \underbrace{\vec{V}(F\in 6/2)}_{\vec{0}} + \vec{V}(F\in 2/0)$

$\Leftrightarrow -e\dot{\beta}\vec{y}_2 = \dot{\lambda}(t)\vec{x}_1 - \dot{\alpha}\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1$

$\Leftrightarrow -e\dot{\beta}(\sin\beta\cdot\vec{y}_0 - \cos\beta\cdot\vec{x}_0) = \dot{\lambda}(t)(\cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0) + \dot{\alpha}\vec{y}_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e\dot{\beta}\sin\beta - \dot{\lambda}\cos\alpha + \dot{\alpha}\lambda\sin\alpha = 0 \\ -e\dot{\beta}\cos\beta + \dot{\lambda}\sin\alpha + \dot{\alpha}\lambda\cos\alpha = 0 \end{cases}$

III. Géométrie des masses:

8) $(F,\vec{y}_2)$ est un axe de révolution $\Rightarrow$ $B_2 = C_2$

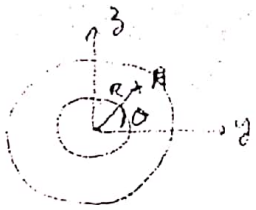
$(F,\vec{x}_2,\vec{y}_2)$ et $(F,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ sont 2 plans de symétries.

$\Rightarrow [I_F(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$

MY_PREPA

9) $A_2 = \int (y^2+z^2)\,dm$

$= \int r^2\,dm = \frac{m_2}{V_2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} r^2 . r\,dr\,d\theta\,dx$



$= \frac{m_2}{\pi(R_2^2-R_1^2)L}\,\frac{(R_2^4-R_1^4)}{4}\,2\pi L = \frac{m_2(R_2^2+R_1^2)}{2}$

10) $B_2 = \int (x^2+z^2)\,dm$

$C_2 = B_2 = \int (x^2+y^2)\,dm$ $\Big\}$ $2B_2 = 2\int x^2\,dm + A_2$

11) $\rightarrow B_2 = \frac{A_2}{2} + \int x^2\,dm = \frac{m_2}{V_2}\iiint x^2 . r\,dr\,.\,d\theta\,.dx$

$= \frac{m_2}{\pi(R_2^2-R_1^2)2}\cdot\frac{(R_2^2-R_1^2)}{2}\cdot 2a\cdot\frac{L^3}{3} = \frac{m_2 L^2}{3}$

) donc : $B_2 = m_2\left[\frac{(R_2^2+R_1^2)}{4} + \frac{L^2}{3}\right]$

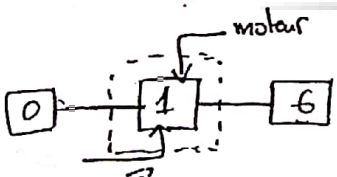
3) $\{\mathcal{C}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix} m_1\vec{v}(G\in 1/0) = \vec{0} \\ I_1 . \vec{\Omega}(1/0)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -I_1\dot{\theta}\vec{z}_0\end{Bmatrix}_O$

$\{\mathcal{C}(2/0)\}_F = \begin{Bmatrix} m_2\vec{v}(F\in 1/0) \\ [I_F(0)]\vec{\Omega}(2/0)\end{Bmatrix}_F = \begin{Bmatrix} m_2(\ddot{d}(t)\vec{x}_1 - d(t)\dot{\theta}\vec{y}_1) \\ \beta_2\ddot{\beta}\vec{z}_0\end{Bmatrix}_F$

$\{\mathcal{C}(3/0)\}_D = \begin{Bmatrix} m_3\vec{v}(D\in 3/0) \\ I_3\vec{\Omega}(3/0)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2m_3\theta . e\dot{\vec{y}}_3 \\ -I_3\cdot\dot{\theta}\vec{z}_0\end{Bmatrix}_D$

4) $\{D(1/0)\}_O = \frac{d}{dt}\{\mathcal{C}(1/0)\}_O = \begin{Bmatrix}\vec{0} \\ -I_1\ddot{\alpha}\vec{z}_0\end{Bmatrix}_O$

)



Graphe d'interaction = Graphe des liaison (Partiel) + 1.M.

$\{\bar{1}\} = \{\text{moteur}, \bar{P}, 0, 6\}$

$\{\mathcal{T}(\text{moteur}\to 1)\} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ -C_m\end{Bmatrix}_O^{B_0}$, $\{\mathcal{T}(\bar{P}\to 1)\} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ -m_1 g\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}_O^{B_0}$

$\{\mathcal{T}(0\to 1)\} = \begin{Bmatrix}X_0 \\ Y_0 \\ Z_0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L_0 \\ \pi_0 \\ 0\end{Bmatrix}_O^{B_0}$, $\{\mathcal{T}(6\to 1)\} = \begin{Bmatrix}F_H \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}_H^{B_1} = \begin{Bmatrix}F_H \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}_O^{B_1} = \begin{Bmatrix}F_H\cos\alpha \\ F_H\sin\alpha \\ 0\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{Bmatrix}$

$\vec{m}_O = \vec{m}_{O'} + \vec{OH}\wedge\vec{F_H} = \vec{0}$

$\Downarrow$ x_2 $\quad$ $F_H x_2$

MY_PREPA

$$\{\mathcal{T}(\bar{1}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{l} X_0 + F_H \cos\alpha \\ Y_0 - F_H \sin\alpha \\ -m_1 g + Z_0 \end{array}\middle|\begin{array}{l} L_0 \\ M_0 \\ -C_m \end{array}\right\}_0^B$$

)

à pièce n'est pas equilibrée dynamiquement car F centre de gravité de (2) n'appartient pas à ce de rotation $(B, \vec{z}_0)$

$$\{\mathcal{T}(\bar{1}\to 1)\} = \left\{\begin{array}{l} X_0 + F_H \cos\alpha \\ Y_0 - F_H \sin\alpha \\ -m_1 g + Z_0 \end{array}\middle|\begin{array}{l} L_0 \\ M_0 \\ -C_m \end{array}\right\}_0^B = \{\mathcal{T}(1/0)\} = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\middle|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -I_1\ddot{\alpha} \end{array}\right\}_0$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_0 + F_H \cos\alpha = 0 \rightarrow X_0 = -F_H \cos\alpha \\ Y_0 - F_H \sin\alpha = 0 \rightarrow Y_0 = F_H \sin\alpha \\ -m_1 g + Z_0 = 0 \rightarrow Z_0 = m_1 g \\ L_0 = M_0 = 0 \\ C_m = +I_1\ddot{\alpha} \end{cases}$$

MY_PREPA

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE MONASTIR

INSTITUT PREPARATOIRE
AUX ETUDES D'INGENIEURS
DE MONASTIR

Section : Mathématique – Physique & Physique – Chimie

TD de Mécanique Générale

Etude d'un Broyeur à mâchoires

Le broyage consiste à réduire des matériaux solides de grandes tailles en plus petits morceaux. Ce sujet porte sur un broyeur à mâchoires. La figure 1 représente le schéma cinématique de ce mécanisme. Il est constitué principalement des éléments suivants :

- Le bâti **[0]** est lié au repère absolu $\Re_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ supposé galiléen.
- L'excentrique **[1]**, lié au repère $\Re_0(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti **[0]**. Son mouvement est paramétré par l'angle $\alpha=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ (figure-2.a).
- La bielle **[2]**, liée au repère $\Re_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$, est en liaison pivot d'axe $(A,\vec{z}_0)$ avec l'excentrique **[1]**. Son mouvement est paramétré par l'angle $\beta=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)$ (figure-2.b).
- Le volant **[3]**, lié au repère $\Re_3(C,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_0)$, est en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z}_0)$ avec la bielle **[2]**. Il est également en liaison linéaire annulaire d'axe $(C,\vec{x}_0)$ avec le bâti **[0]**. Son mouvement est paramétré par l'angle $\theta=(\vec{x}_0,\vec{x}_3)=(\vec{y}_0,\vec{y}_3)$ (figure-2.c).
- La biellette **[4]**, liée au repère $\Re_4(B,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_0)$, est en liaison pivot d'axe $(B,\vec{z}_0)$ avec le volant **[3]**. Son mouvement est paramétré par l'angle $\varphi=(\vec{x}_0,\vec{x}_4)=(\vec{y}_0,\vec{y}_4)$ (figure-2.d).
- La mâchoire **[5]**, liée au repère $\Re_5(D,\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$, est en liaison pivot d'axe $(E,\vec{x}_0)$ avec la biellette **[4]**. Elle est également en liaison pivot d'axe $(D,\vec{z}_0)$ avec le bâti **[0]**. Son mouvement est paramétré par l'angle $\psi=(\vec{x}_0,\vec{x}_5)=(\vec{y}_0,\vec{y}_5)$ (figure-2.e).

On donne:

$\overrightarrow{OD} = a_0\vec{x}_0 - b_0\vec{y}_0$ $\quad \overrightarrow{OA} = a_1\vec{x}_1$ $\quad \overrightarrow{CB} = a_3\vec{x}_3$ $\quad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = b_5\vec{y}_5$

$\overrightarrow{OC} = \lambda\vec{x}_0 - b_0\vec{y}_0$ $\quad \overrightarrow{AB} = a_2\vec{x}_2$ $\quad \overrightarrow{BE} = a_4\vec{x}_4$

Où : • α, β, θ, φ et ψ sont les paramètres angulaires du mécanisme.
• λ est un paramètre de translation.

a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0 et b_5 sont des constantes géométriques du mécanisme.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

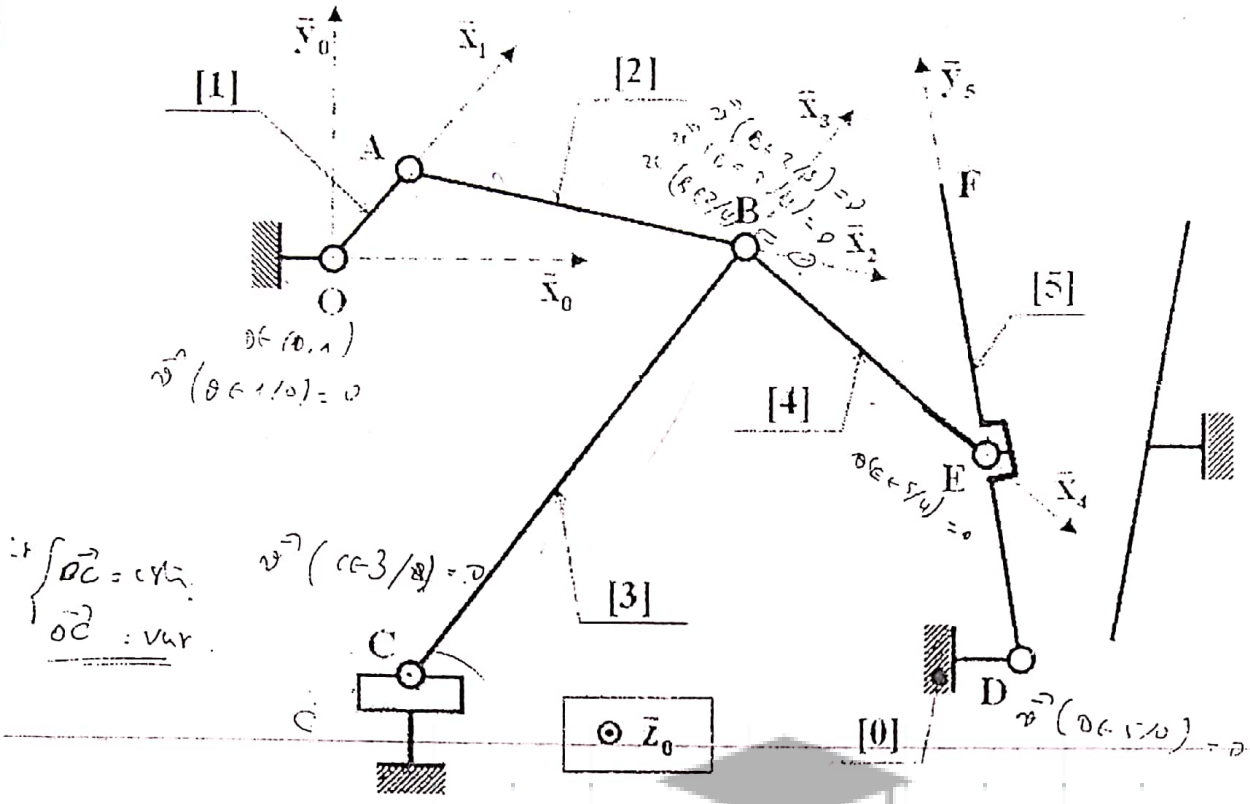


Figure 1 : Schéma cinématique du broyeur

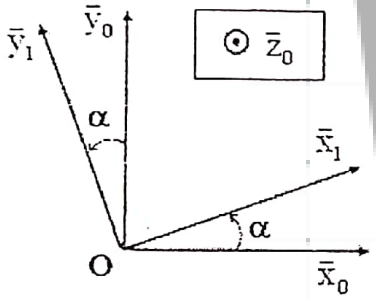


Figure-2.a : Mouvement de [1] par rapport à [0]

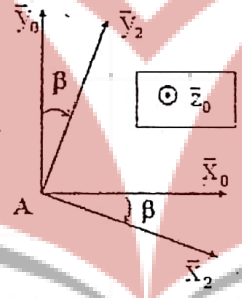


Figure-2.b : Mouvement de [2] par rapport à [0]

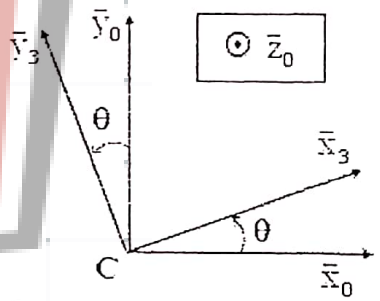


Figure-2.c : Mouvement de [3] par rapport à [0]

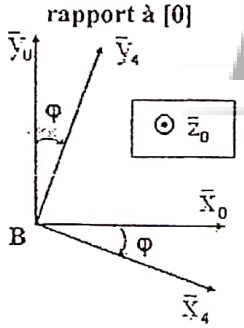


Figure-2.d : Mouvement de [4] par rapport à [0]

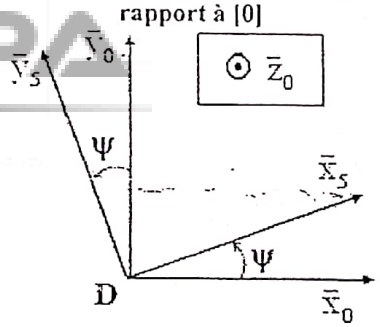


Figure-2.e : Mouvement de [5] par rapport à [0]

Partie I. Etude géométrique et cinématique

1. Tracer le graphe des liaisons et identifier les liaisons entre les différents solides.
2. Ecrire, dans la base $\mathcal{B}_0(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$, le système d'équations correspondant à la fermeture géométrique de la chaine constituée par les solides ([0]-[1]-[2]-[3]).

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

3. Ecrire, dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le système d'équations correspondant à la fermeture géométrique de la chaine constituée par les solides ([0]-[3]-[4]-[5]).
4. Déduire alors le degré de liberté du mécanisme.
5. Déterminer le torseur cinématique, au point O dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, de l'excentrique [1] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{V}(1/0)\right\}_O$.
6. Déterminer le torseur cinématique, au point A dans la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$, de la bielle [2] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{V}(2/0)\right\}_A$.
7. Déterminer le torseur cinématique, au point C dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, du volant [3] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{V}(3/0)\right\}_C$.
8. Ecrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point B, entre la bielle [2] et le volant [3]. En déduire le système d'équations, projetées sur la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, qui en découle.
9. Déterminer le torseur cinématique, au point D dans la base $\mathcal{B}_5(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$, de la mâchoire [5] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{V}(5/0)\right\}_D$.
10. Déterminer le torseur cinématique, au point E dans la base $\mathcal{B}_5(\vec{x}_5,\vec{y}_5,\vec{z}_0)$, de la biellette [4] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{V}(4/0)\right\}_E$.
11. Ecrire la condition cinématique au niveau de la liaison pivot, au point B, entre le volant [3] et la biellette [4]. En déduire le système d'équations, projetées sur la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, qui en découle.

Partie II. Etude cinétique

Les différents solides admettent les caractéristiques inertielles suivantes :

- L'excentrique [1] est de centre d'inertie O et de moment d'inertie J_1 par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$: $J_1 = I_{(O,\vec{z}_0)}(1)$. Cet axe est principal d'inertie pour la pièce [1].
- La masse totale M du volant [3] est concentrée au point C ;
- La mâchoire [5] de masse m_5 est de centre d'inertie E et de moment d'inertie J_5 par rapport à l'axe $(D,\vec{z}_0)$: $J_5 = I_{(D,\vec{z}_0)}(5)$. De même, cet axe est principal d'inertie pour la pièce [5].
- Les autres solides sont de masses négligeables.
- La liaison entre (0) et (3) est supposée avec frottement de glissement de coefficient f.
- Le plan $P(O,\vec{X}_0,\vec{Y}_0)$ est supposé un plan de symétrie du problème.
- L'action de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{Y}_0$.
- L'action du matériau à concasser transmise au volant [3] est représentée, au point C, par la force : $\vec{F}_{(Mat\to 3)} = F_T\vec{X}_0 - F_N\vec{Y}_0$
- Pour exprimer le torseur des actions mécaniques transmissibles associé à une liaison L_{ij} au point Q entre deux solides (i) et (j) (i<j), on utilisera la notation suivante :

$$\{\tau(i\to j)\}_Q = \begin{Bmatrix} X_Q & L_Q \\ Y_Q & M_Q \\ Z_Q & N_Q \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

12. Donner les formes des matrices d'inerties suivantes tout en justifiant votre réponse : $[I_O(1)]_{B1}$ et $[I_D(5)]_{B5}$.

13. Vérifier si les pièces [1] et [5] sont équilibrées dynamiquement sachant que leurs axes de rotation sont respectivement $(O,\vec{z}_0)$ et $(D,\vec{z}_0)$.

14. Déterminer le torseur cinétique, au point O dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, de l'excentrique [1] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{C}(1/0)\right\}_O$.

15. Déterminer le torseur cinétique, au point C dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, du volant [3] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{C}(3/0)\right\}_C$.

16. Déterminer le torseur cinétique, au point D dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, de la mâchoire [5] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{\mathcal{C}(5/0)\right\}_D$.

17. Déterminer le torseur dynamique au point C dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, du volant [3] dans son mouvement par rapport au bâti [0] : $\left\{D_{3/0}\right\}_C$

18. Soit l'ensemble {E} = {1, 2, 3, 4, 5}. Trouver alors l'énergie cinétique de l'ensemble {E} dans son mouvement par rapport à [0].

Partie III. Etude dynamique

19. Identifier les composantes normale et tangentielle de la réaction de [0] sur [3].

20. Préciser le signe de la composante tangentielle de [0] sur [3].

21. Donner alors l'expression du torseur des Actions mécaniques de [0] sur [3] : $\left\{\tau_{0\to 3}\right\}_C$

22. Par application de la loi de Coulomb dans le cas du frottement de glissement, trouver une relation entre les composantes normale et tangentielle de la réaction de [0] sur [3].

23. Isoler le volant [3] et faire le bilan des actions mécaniques extérieures exercées sur ce solide.

24. Ecrire, en leurs points d'application, dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, les torseurs des actions mécaniques extérieures exercées sur le volant [3].

25. Déduire alors le torseur somme des actions mécaniques extérieures exercées sur le volant [3] au point C.

26. Appliquer le principe fondamental de la dynamique (**PFD**) au volant [3] en mouvement par rapport à [0] et déduire le système d'équations qui en découle.

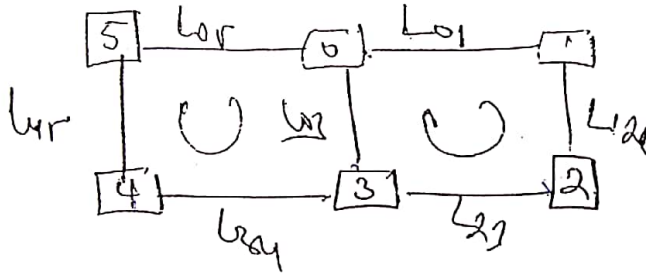
27. Montrer que l'on dispose de quatre équations à quatre inconnues. Enumérer les inconnues de liaison. Déduire enfin les inconnues de liaisons.

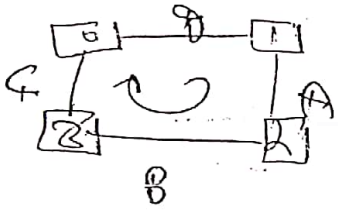
28. Calculer la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur {E} dans son mouvement par rapport à [0].

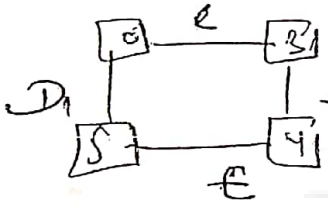
29. Calculer les puissances intérieures à {E}.

30. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble {E} dans son mouvement par rapport à [0] et déduire l'équation scalaire qui en découle.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941







MY PREPA

2. Etude cinétique

$$\begin{pmatrix} A & -F & -F \\ -F & B & -D \\ -F & -D & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \alpha \end{pmatrix}$$

$(\vec{0}, \vec{z})$ est un axe principal d'inertie si $E = F = 0$

$(\vec{0}, \vec{y})$ " " " si $D = E = 0$

$(\vec{0}, \vec{x})$ " " " si $F = D = 0$

$$I_{D(1)} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}_{B_1}$$ $(\vec{0}, \vec{z_0})$ est un axe principal d'inertie ($E = D = 0$)

$$I_{D(S)} = \begin{pmatrix} A_r & -f_r & 0 \\ -F_r & B_r & 0 \\ 0 & 0 & f_r \end{pmatrix}_{B_5}$$ $(D, \vec{z_0})$ est un axe principal d'inertie

$$\{\mathcal{C}_{(S/R)}\} = \begin{cases} m\vec{V}(G \in S/R) \\ \vec{\sigma}_{A(S/R_g)} = m\vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R_g) + I_{A(P)}\vec{\Omega}_{S/R_g} \end{cases}$$

θ.

θ, A, $\vec{\sigma}_{\theta(S/R)} = \vec{\sigma}_{A(S/R)} + \vec{R}_{in} \wedge \vec{A\theta}$ >>

3. Equilibre dynamique

Si → G est à l'axe de rotation : Equilibre statique
→ l'axe de rotation doit être axe principal d'inertie

MY_PREPA
+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

pour 1 :

$\forall E \in (D, \vec{z}_0)$ car (1) est cylindre statiquement en $(D, \vec{z}_0)$ principal d'inertie $\Rightarrow$ (1) est cylindre dynamiquement.

pour 2 :

$E \notin (D, \vec{z}_0)$ car (1) n'est pas cylindre statiquement en $(D, \vec{z}_0)$ est principal d'inertie $\Rightarrow$ (3) n'est pas cylindre dynamiquement

4) $\{\mathcal{E}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ f_1 \dot{\alpha} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O$

1) $\{\mathcal{E}_{(3/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{E \in (3/0)} \vec{v}_{C \in 3/0} \, dm \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} m \dot{x} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$

6) $\{\mathcal{E}_{(2/0)}\} = \left\{ \begin{matrix} \int_{E \in (2/0)} \vec{v}_{E \in 2/0} \, dm \\ \int_{E \in (2/0)} \vec{OE} \wedge \vec{v}_{E \in 2/0} \, dm \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 b_2 \dot{\psi} \vec{x}_2 \\ f_2 \dot{\psi} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_C$

7) $\{\mathcal{E}_{(3/0)}\}_O = \{\mathcal{E}_{(3/0)}\}_{O/C} = \left\{ \begin{matrix} m \dot{x} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$

8) $E_c(E/0) = \sum_{i=1}^{5} E_c(i/0) = E_c(1/0) + E_c(3/0) + E_c(2/0)$ car $m_2 = m_4 = 0$.

$E_c(3/0) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$E_c(1/0) = \frac{1}{2} f_1 \dot{\alpha}^2$

$E_c(2/0) = \frac{1}{2} f_2 \dot{\psi}^2$

$E_c(E/0) = \frac{1}{2} \left(m \dot{x}^2 + f_1 \dot{\alpha}^2 + f_5 \dot{\psi}^2 \right)$

MY_PREPA

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

5.

Cas de frottements

$\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{T} \cap \vec{v} = \vec{0}$

$\vec{T}, \vec{v} < 0$

$f = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$

$\vec{R}(0 \to S)$

$\mathcal{Z}(0 \to S) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Y \\ Z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Y_C \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$ Glissement Pure

$\vec{R}(0 \to S) = Y_C \cdot \vec{y}_0$; $\vec{T}(0 \to S) = T_M \cdot \vec{x}_0$

avec $\vec{T}(0 \to S) \wedge \vec{v}(C \in S/\mathcal{R}) = \vec{0}$

$T_M \vec{x}_0 \wedge \dot{x} \vec{x}_0 = \vec{0}$

2) $\vec{T}(0 \to S) \cdot \vec{v}(C \in S/\mathcal{R}) < 0 \longrightarrow T_M \cdot \vec{x}_0 \cdot \dot{x} \vec{x}_0 < 0$

$\boxed{T_M < 0}$

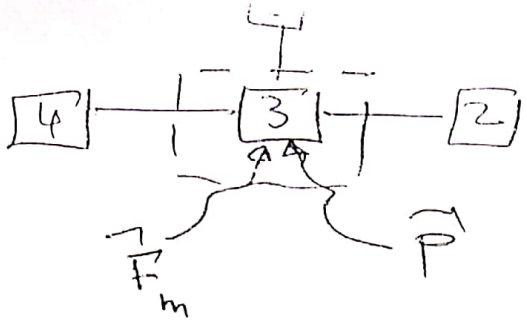
$\left\{ \mathcal{Z}(0 \to S) \right\} = \left\{ \begin{matrix} T_M \\ Y_C \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$; $f = \frac{\|\vec{T}(0 \to S)\|}{\|\vec{N}(0 \to S)\|}$

$f = \frac{-T_M}{Y_C} \longrightarrow \boxed{T_M = -f Y_C}$

MY_PREPA

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

23.



$$\{\overline{3}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ C \end{matrix} ; \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ B \end{matrix} ; \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ B \end{matrix} ; \begin{matrix} P \\ 0 \\ C \end{matrix} ; \begin{matrix} F_m \\ 0 \\ C \end{matrix} \right\}$$

$$\{\mathcal{T}(0\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} T_m \\ Y_C \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$$

$$\{\mathcal{T}(2\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} L \\ 0 \end{matrix} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{T}(4\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} -X'_B \\ -Y'_B \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B$$

$$\{\mathcal{T}(\vec{P}\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C \qquad \{\mathcal{T}(\vec{F}_m\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} F_T \\ -F_N \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$$

$$\{\mathcal{T}(1\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a_3 Y_B \omega_{30} - a_3 X_B \omega_{30} \end{matrix} \right\}_B$$

$$\vec{m}_C = \vec{m}_B + \vec{CB} \wedge \vec{R} = \vec{0} + a_3(\omega_{30}\vec{u}_0 + \dot{\omega}_{30}\vec{y}_0) \wedge (X_B\vec{u}_0 + Y_B\vec{y}_0)$$

$$\{\mathcal{T}(4\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} -X'_B \\ -Y'_B \\ 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -a_3 Y'_B \omega_{30} + a_3 X'_B \omega_{30} \end{matrix} \right\}_C$$

$$\vec{m}_C = \vec{m}_B + \vec{CB} \wedge \vec{R} =$$

$$\to \{\mathcal{T}(\overline{3}\to 3)\} = \left\{ \begin{matrix} T_m + X_B - X'_B + F_T \\ Y_C + Y_B - Y'_B - F_N \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

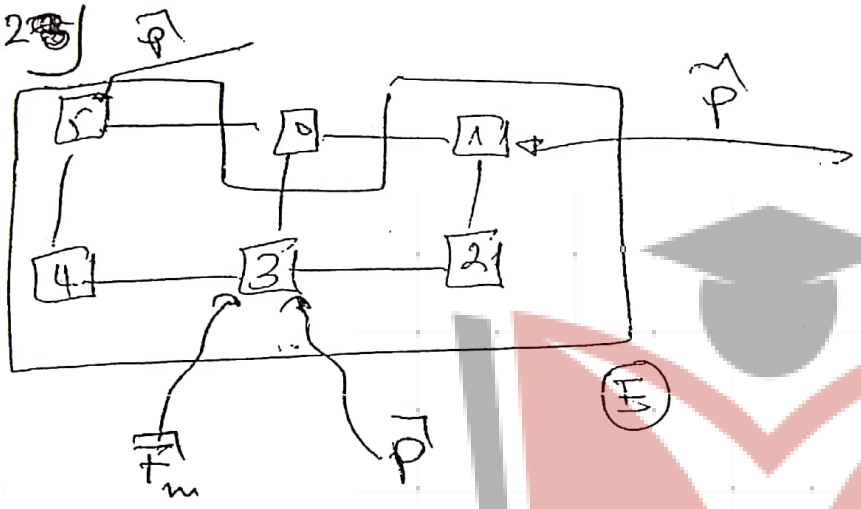
MY PREPA

2a] : $\{\mathcal{Z}(\vec{3}\to 3)\}_C = \{\mathcal{Z}(3\to 3)\}_C$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_m + X_B - X'_B + F_T = 0 \\ Y_C + Y_B - Y'_B - F_N = 0 \\ a_3 \cos\theta (Y_B - Y'_B) + a_3 \sin\theta (X'_B - X_B) = 0, \end{cases}$$

$$\therefore T_m = -f Y_C$$

2b]



$$\{E\} = \{ \begin{matrix} 0 \\ | \\ 1 \\ | \\ \theta \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ | \\ 5 \\ | \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} \vec{p} \\ | \\ 1 \\ | \\ D \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} \vec{F}_m \\ | \\ 3 \\ | \\ E \end{matrix} \}$$

$$\{E \to E|0\} = R(E \to 1|0) + \mathcal{Z}(E \to 3|0) + R(E \to x|0))$$

$$B(E \to 1|0) = \left[\{\mathcal{Z}(0 \to 1)\}_\theta + \{\mathcal{Z}(\vec{p} \to 1)\}_\theta \right] \cdot \{\vartheta_{1|0}\}_\theta$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{Bmatrix}_\theta \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{car liaison pivot.}$$

t)

$$\{\mathcal{I}_{i \leftrightarrow j}\} = \{\mathcal{Z}_{i \to j}\} \cdot \{\vartheta_{(i/j)}\} = 0 \text{ si liaison parfaite}$$
$$< 0 \text{ si frottement}$$

MY PREPA
+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

$$\mathcal{P}(\vec{E} \to S/\mathcal{R}) = \left[\{\mathcal{T}(O,\vec{i}_0)\}_C + \{\mathcal{T}(\vec{P} \to S)\}_C + \mathcal{T}(\vec{F}_T \to S)_C \right]$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{R}} \cdot \begin{bmatrix} T_M + F_T & | \\ - & | \\ - & | \end{bmatrix}$$

$$= R(T_M + F_T)$$

$$\mathcal{P}(\vec{E} \to \Gamma/\mathcal{R}) = \left[\{\mathcal{T}(O \to \Gamma)\}_D + \{\mathcal{T}(\vec{P} \to \Gamma)\}_E \right] + \{\mathcal{D}_{\Gamma/\mathcal{R}}(\Gamma)\}_E$$

$\to 0$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_r g \\ 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_E \Big| \; - b_r \dot{\psi}\, \vec{u}_\psi$$

$$= m_r g b_r \dot{\psi} \vec{e}_\psi$$

$$\mathcal{P}(\vec{E} \to E/\mathcal{R}) = R(T_M + F_T) + m_r g b_r \dot{\psi} \vec{e}_\psi$$

23- $\mathcal{P}_{int} = 0$ car toutes les liaisons $\Rightarrow$ l'intérieur de (E) sont parfaites.

24. $\dfrac{dE_c}{dt}(E/\mathcal{R}) = \mathcal{P}(\vec{E} \to E/0) + \mathcal{P}_{int}$ ($\to 0$)

$$\Omega R R + \gamma_1 \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \gamma_2 \dot{\psi} \dot{\psi} = R(T_M + F_T) + m_r g b_r \dot{\psi}$$

MY_PREPA

REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
Université de Monastir

INSTITUT PREPARATOIRE AUX ETUDES D'INGENIEUR DE MONASTIR

Filière : MP2 & PC2
TD N°2 de : Systèmes Techniques Automatisés (STA)
Octobre 2020

ETUDE D'UN EMBRAYAGE ASSISTE D'UN BUS

En ville, la conduite des bus nécessite des répétitions fréquentes de la manœuvre d'embrayage. Pour améliorer le confort de conduite, on peut assiter la force musculaire du conducteur, par une commande électrique de l'embrayage. Ainsi, il devient nécessaire de renseigner l'unité de contrôle électronique sur les intentions du conducteur. Le calculateur contrôlera directement un actionneur électrique qui manœuvrera l'embrayage de façon optimale. L'automatisation de la fonction embrayage permet de corriger les éventuelles fausses manœuvres du conducteur et d'assurer la fonction anti-calage du moteur. La figure 1 représente la mise en situation du problème, tandis que la figure 2 présente le schéma cinématique minimal de ce mécanisme. L'unité de contrôle détecte une action du conducteur. Elle décide d'actionner un motoréducteur (non représenté) qui provoque la translation de la tige [3] (mouvement d'entrée). Cette dernière va agir sur la pédale [2] par l'intermédiaire d'une roue [4] et provoque son pivotement (mouvement à la sortie du mécanisme) et ainsi une action mécanique sur la pédale d'embrayage permettant ainsi d'assister le conducteur.

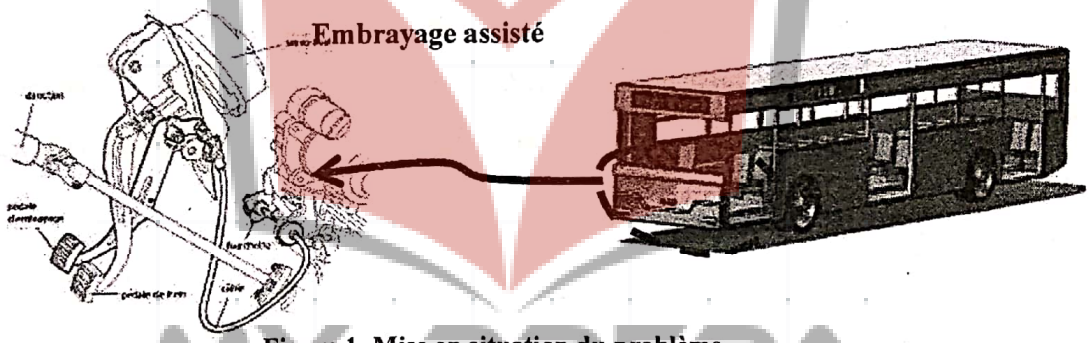
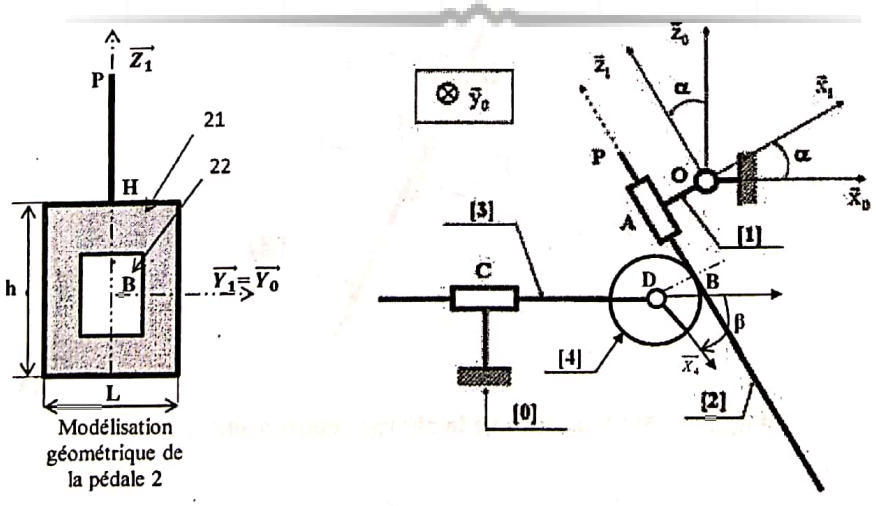


Figure 1. Mise en situation du problème



Modélisation géométrique de la pédale 2

Figure2. Schéma cinématique minimal du mécanisme d'embrayage assisté

+216 24331941 | myprepa27 | my__prepa | +216 24331941

Dans cette étude, On adopte le repère absolu $\Re_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ supposé galiléen lié au bâti **[0]**.

On donne : $\overrightarrow{OA} = -a.\overrightarrow{X_1}$; $\overrightarrow{PA} = -z(t).\overrightarrow{Z_1}$; $\overrightarrow{PB} = -b.\overrightarrow{Z_1}$; $\overrightarrow{CD} = x(t).\overrightarrow{X_0}$; $\overrightarrow{DB} = R.\overrightarrow{X_1}$; $\overrightarrow{OC} = -a_0.\overrightarrow{X_0} - b_0.\overrightarrow{Z_0}$

Avec : a, b, a_0 et b_0 et R sont des constantes positives.

$z(t)$, $x(t)$, α et θ sont des paramètres variables dans le temps.

A- Technologie de conception

Le dessin d'ensemble (DT1) présente une vue en coupe du motoréducteur qui va actionner la tige [3].

B- Géométrie des masses

La pédale [2] est assimilée à une plaque rectangulaire (21) de masse $\mathbf{m_2}$ et de dimension (L x h) percée par une petite plaque rectangulaire (22) (L/2 x h/2) centrée en B. Une tige [HP] liée à cette plaque percée est de longueur (b) supposée de masse négligeable. La pédale [2] est représentée dans la figure 2.

C- Modélisation des actions mécaniques

Dans cette partie on suppose que :

- **[2]** : n'est plus assimilé à une plaque mais supposé de masse **M** concentrée en **B**.
- **[3]** : est de masse $\mathbf{m_3}$ et de centre de gravité **G** situé sur l'axe $(C,\overrightarrow{X_0})$.
- **[4]** : est assimilée à un disque de masse $\mathbf{m_4}$ et de rayon **R**.
- Les autres solides sont supposés de masse négligeable.
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites à l'exception des liaisons glissières entre (3) et (0) et entre (1) et (2) qui sont supposées avec frottement de glissement de coefficient f.
- L'effet de la pesanteur est donné par : $\vec{g} = -g.\overrightarrow{Z_0}$. L'effet de la pesanteur sur (2) est negligée.
- Une action mécanique extérieure $\mathbf{F_{ext}}$ appliquée sur (2) est modélisée par une charge uniformément répartie d'amplitude **F** présentée comme suit :

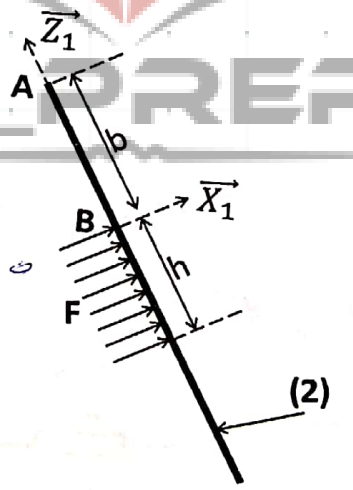
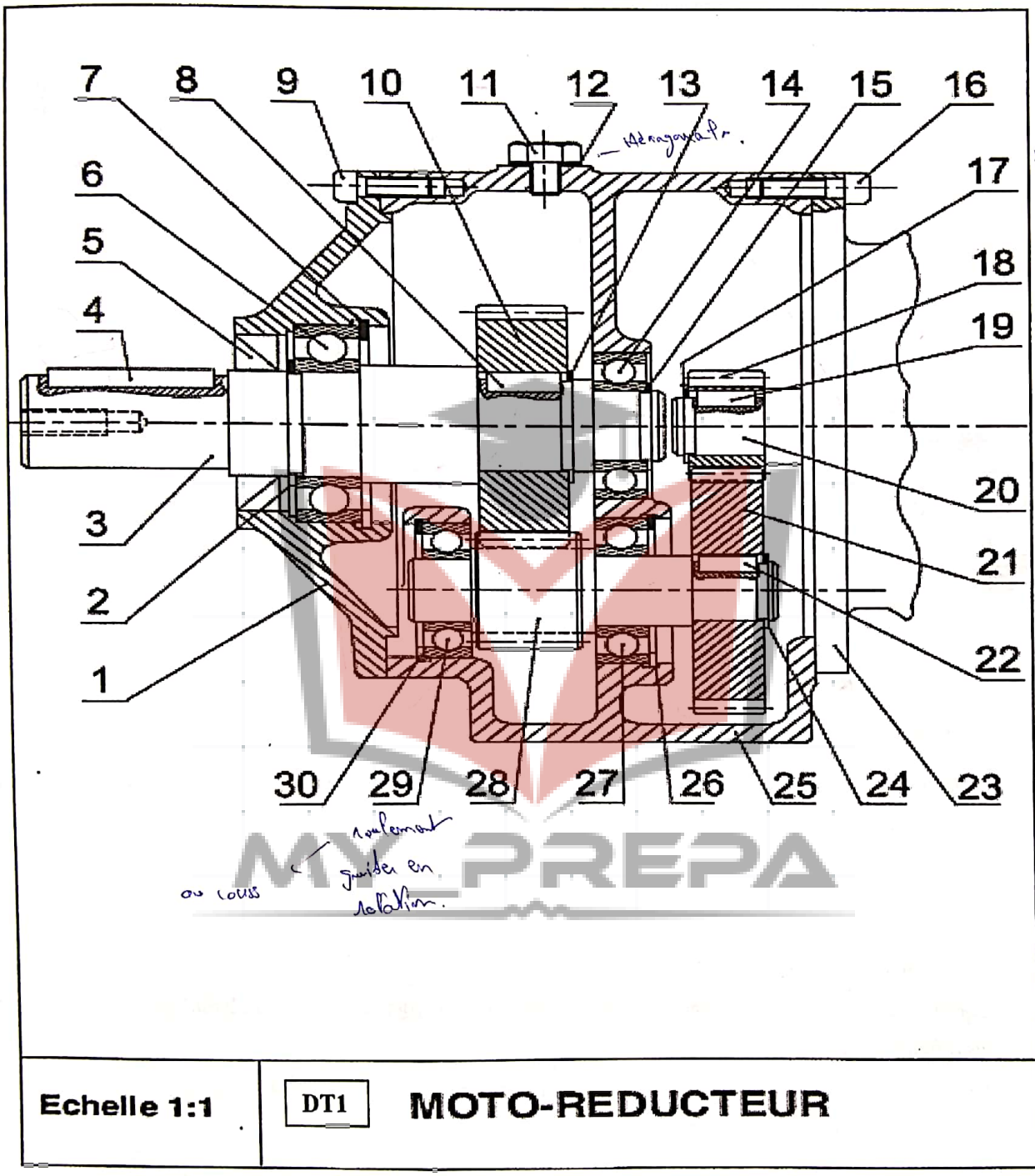


Figure 3. Modélisation de la charge répartie sur la pédale (2)

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

- Le torseur de l'action mécanique qu'applique le solide i sur le solide j en un point Q est noté :

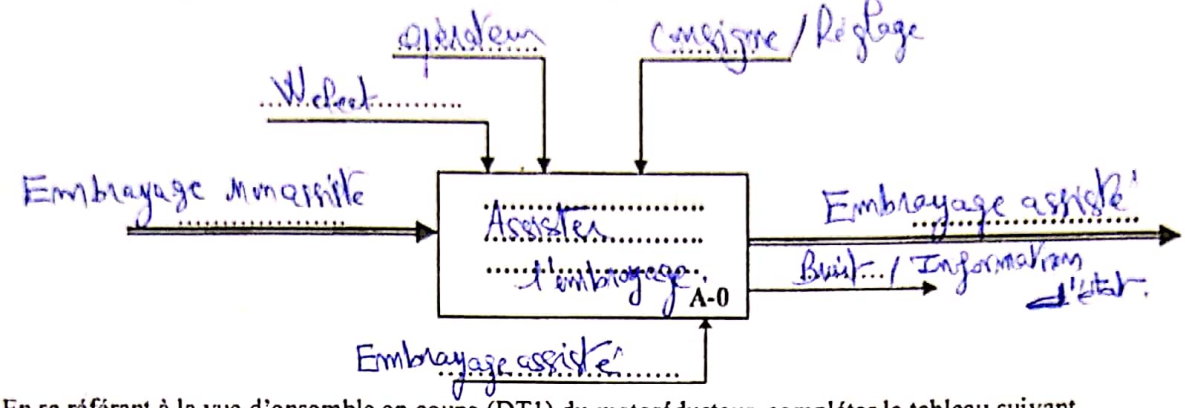
$$\{\tau(i \to j)\} = \begin{Bmatrix} X_Q & L_Q \\ Y_Q & M_Q \\ Z_Q & N_Q \end{Bmatrix}^{R_0}_{Q} \quad \text{avec } (i < j)\text{. Le problème est supposé plan.}$$



+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

Partie A : Technologie de conception

1. Compléter l'actigramme A-0 du mécanisme d'embrayage.



2. En se référant à la vue d'ensemble en coupe (DT1) du motoréducteur, compléter le tableau suivant.

Numéro du composant	Nom Technologique	Rôle dans la chaine de transmission
8	Clavette	Arrêter en rotation la roue dentée (3)
9	Vis CHc	assembler (1) avec (25)
6	Roulement à billes	guider en rotation
26	Anneau élastique	Arrêter en translation.
10	Roue dentée	Transmettre la puissance

Partie B : Géométrie des masses (voir figure 2)

1. Trouver le centre de gravité de la pédale 2 : $\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$
2. Sachant que le moment d'inertie de [2] par rapport à l'axe $(B,\vec{Y}_0)$ est I_2, donner la forme de la matrice d'inertie de [2] et justifier votre réponse.
3. Vérifier si la pédale [2] est équilibrée dynamiquement suivant l'axe $(B,\vec{Y}_0)$.
4. Calculer le moment d'inertie I_2 en fonction de m_2 et h:

Partie C : Etude géométrique et cinématique

1- Tracer le graphe des liaisons (sans considérer le moteur et le pignon associé) en identifiant les liaisons entre les différents solides.

2- Ecrire l'équation vectorielle de la fermeture géométrique de la chaine **0-1-2-3-4-0**. Par projection dans la base $\mathcal{B}_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, trouver le systèmes d'équations scalaires qui en découle.

3- Exprimer $\dot{x}(t)$ en fonction de $\alpha, \dot{\alpha}$ et $\dot{z}(t)$ et les paramètres géométriques du mécanisme.

4- Déterminer les vecteurs instantanés de rotations suivants.

$\vec{\Omega}(1/0) =$ ..... $\vec{\Omega}(2/0) =$ ..... $\vec{\Omega}(3/0) =$ ..... $\vec{\Omega}(4/0) =$ .....

5- Calculer les vecteurs vitesses $\vec{V}(A \in 1/0)$, $\vec{V}(A \in 2/1)$ et en déduire $\vec{V}(A \in 2/0)$.

6- Déduire le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 2/0)$.

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

7- Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(D \in 4/0)$ en passant par C.

8- Déduire le vecteur vitesse. $\vec{V}(B \in 4/0)$

9- Déduire alors le vecteur vitesse $\vec{V}(B \in 4/2)$ et l'exprimer dans la base B1 de R1.

10- Sachant que le contact en B entre [2] et [4] est toujours maintenu. Déduire alors une relation scalaire.

11- Trouver alors la vitesse de glissement en B entre [2] et [4] : $\vec{V}(B \in 4/2)$

12- En supposant que le contact en B entre [2] et [4] est sans glissement, déduire alors une relation scalaire.

Partie D : Modélisation des actions mécaniques

1- Enoncer la loi de coulomb dans le cas du frottement de glissement dans la liaison entre (0) et (3) au point C. Donner alors la forme du torseur d'action mécanique de (0) sur (3) au point C :

2- Tracer le graphe d'interaction appliqué au mécanisme {S} = {1, 2, 3 ,4}.

3- Isoler {S}et faire l'inventaire des actions mécaniques appliquées sur {S} :

4- A partir de la figure 3, trouver l'expression du torseur de l'action mécanique du conducteur sur la pédale 2 au point B.

5- Ecrire chaque action mécanique en son point d'application.

MY_PREPA

+216 24331941 myprepa27 my__prepa +216 24331941

Partie B :

1) $\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

2) $(B, \vec{Y_1}, \vec{Z_1})$ et $(B, \vec{X_1}, \vec{Z_1})$ sont des plans de sym $\Rightarrow E = F = D = 0$.

$$[I_B(2)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

3) FeP Dynamique.

4) $I_2 = I_{(B,\vec{Y_2})}(2) = I_{(B,\vec{Y_0})}(\mathcal{D}) - I_{(B,\vec{Y_0})}(\mathcal{D}_2)$

* $I_{(B,\vec{Y_0})}(\mathcal{D}) = \int_{M \in \mathcal{D}} x^2 + z^2 \, dm = \int_{\Pi \in \mathcal{D}_1} z^2 \, dm$ / $dm = \sigma \, ds$, $\sigma = \frac{m_{\mathcal{D}_1}}{S_{\mathcal{D}_1}}$

$$= \frac{m_{\mathcal{D}_1}}{L \cdot h} \iint_{\Pi \in \mathcal{D}_1} z^2 \, dy \, dz = \frac{m_{\mathcal{D}_1}}{Lh} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \, dz \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy$$

$$= \frac{m_{\mathcal{D}_1}}{Lh} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \times 2 \cdot \left[\frac{L}{2}\right] \times 2.$$

$$= \frac{m_{\mathcal{D}_1} h^2}{12} = \frac{m_2 h^2}{12}.$$

* $I_{(B,\vec{Y_0})}(\mathcal{D}_2) = \sigma \cdot \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} z^2 \, dz \cdot \int_{-\frac{L}{4}}^{\frac{L}{4}} dy$ / $\sigma = \underbrace{\frac{4 m_{\mathcal{D}_2}}{Lh}}_{\mathcal{D}_2} = \underbrace{\frac{m_2}{Lh}}_{\mathcal{D}_1}$

$\Rightarrow \boxed{m_{\mathcal{D}_2} = \frac{m_2}{4}}$

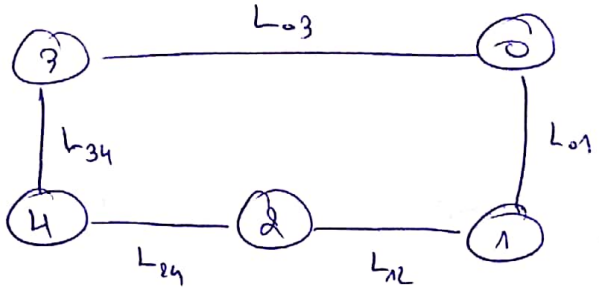
$$= \frac{m_2}{4Lh} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{h}{4}\right)^3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{L}{4}\right)^3 = \frac{m_2 \cdot h^2}{192}$$

* $I_2 = m_2 R^2 \cdot \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{192}\right] = \frac{15 m_2 h^2}{192}$.

MY PREPA

Partie C :

1/



$\begin{cases} L_{01} : \text{pivot d'axe } (C, \vec{y_0}). \\ L_{03} : \text{Glissière d'axe } (C, \vec{x_0}). \\ L_{12} : \text{" " " } (A, \vec{z_1}). \\ L_{24} : \text{Ponctuelle de normale } (B, \vec{x_1}). \\ L_{34} : \text{Pivot d'axe } (P, \vec{y_0}). \end{cases}$

2/ $\overrightarrow{OO} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$.

$-a\vec{x_1} + z(t)\vec{z_1} - b\vec{z_1} - R\vec{x_1} - x(t)\vec{x_0} + a\vec{x_0} + b\vec{z_0} = 0$

$\begin{cases} \vec{x_1} = \cos(\alpha)\vec{x_0} + \sin(\alpha)\vec{z_0} \\ \vec{z_1} = -\sin(\alpha)\vec{x_0} + \cos(\alpha)\vec{z_0} \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = (a+R)\cos(\alpha) + (z(t) - b)\sin(\alpha) + (x(t) - a_0) \\ 0 = -(a+R)\sin(\alpha) + (z(t) - b)\cos(\alpha) + b_0 \end{cases}$.

3) $\dot{x}(t) = (a+R)\dot{\alpha}\sin(\alpha) - \dot{z}(t)\sin(\alpha) + (b - z(t))\dot{\alpha}\cos(\alpha)$.

4) $\vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\alpha}\vec{y_0}$; $\vec{\Omega}(2/0)$

$\vec{\Omega}(2/0) = \underbrace{\vec{\Omega}(2/1)}_{\vec{0} \cdot \text{ glissière}} + \vec{\Omega}(1/0) = -\dot{\alpha}\vec{y_0}$.

$\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$; $\vec{\Omega}(4/0) = \dot{\beta}\vec{y_0}$

5) $\vec{V}(A \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{OA}$.

$= \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = -a\left.\frac{d\vec{x_1}}{dt}\right)_{R_0} = -a\dot{\alpha}\vec{z_1}$

MY_PREPA

5/ $\vec{V}(A\in 2/1) = \vec{V}(P\in 2/1) = \left(\frac{d\vec{AP}}{dt}\right)_{R_1}$

$= \dot{z}(t).\vec{z_1}.$

$\vec{V}(A\in 2/0) = \vec{V}(A\in 2/1) + \vec{V}(A\in 1/0).$

$= (\dot{z}(t) - a\dot{\alpha})\vec{z_1}.$

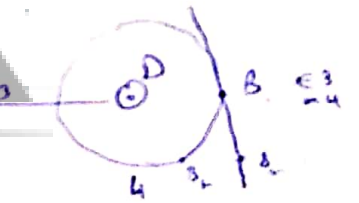
6/ $\vec{V}(B\in 2/0) = \vec{V}(A\in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0)\wedge\vec{AB}.$

$= (\dot{z}(t) - a\dot{\alpha})\vec{z_1} + (-\dot{\alpha}\vec{y_0})\wedge(z(t) - b)\vec{z_1}.$

$= (\dot{z}(t) - a\dot{\alpha})\vec{z_1} - \dot{\alpha}(z(t) - b)\vec{x_1}.$

7/ $\vec{V}(D\in 4/0) = \left(\frac{d\vec{OD}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OC}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\vec{CD}}{dt}\right)_{R_0}.$

$= \dot{x}(t).\vec{x_0}$



8/ $\vec{V}(B\in 4/0) = \vec{V}(D\in 4/0) + \vec{\Omega}(4/0)\wedge\vec{DB}.$

$= \dot{x}(t).\vec{x_0} - R\dot{\beta}\vec{z_1}.$

9/ $\vec{V}(B\in 4/2) = \vec{V}(B\in 4/0) - \vec{V}(B\in 2/0).$

$= \dot{x}(t)\vec{x_0} - R\dot{\beta}\vec{z_1} - (\dot{z}(t) - a\dot{\alpha})\vec{z_1} + \dot{\alpha}(z(t) - b)\vec{x_1}.$

$\vec{x_0} = \cos(\alpha)\vec{x_1} - \sin(\alpha)\vec{z_1}.$

$\vec{V}(B\in 4/2) = (\dot{x}\cos(\alpha) + \dot{\alpha}(z(t) - b).)\vec{x_1} + (-\dot{x}\sin(\alpha) - R\dot{\beta} - \dot{z}(t) + a\dot{\alpha})\vec{z_1}.$

MY_PREPA

10) $\vec{V}(B\in 4/2)\cdot\vec{x_1} = 0$

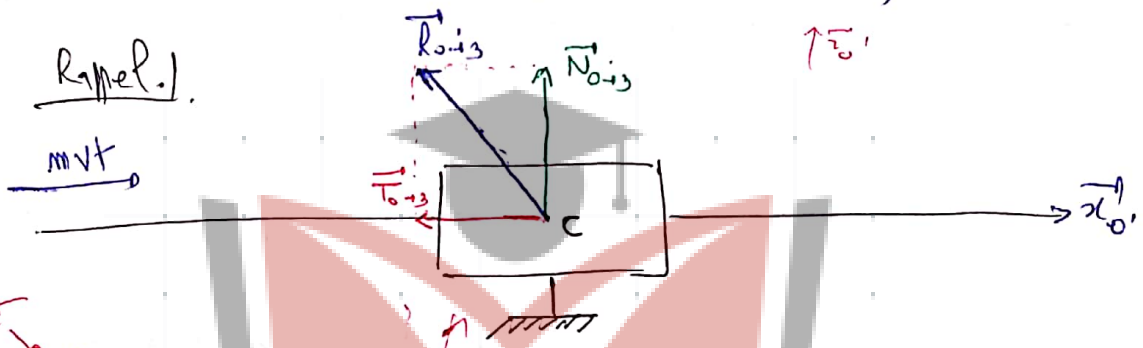
$\dot{x}\cos(\alpha) = \dot{\alpha}(b-z)$.

11) $\vec{V_g}(B\in 4/2) = -\left[\dot{x}\sin(\alpha) + R\dot{\beta} + (\dot{z} - a\dot{\alpha})\right]\vec{z_1}$.

12) C.R.S.G : $\Rightarrow \vec{V_g}(B\in 4/2) = \vec{0}$.

$\dot{x}\sin(\alpha) = -R\dot{\beta} - (\dot{z} - a\dot{\alpha})$

Partie D: Rappel.



~~frottement~~ parfait

$$\{\mathcal{T}_{0\to3}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_C \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}$$

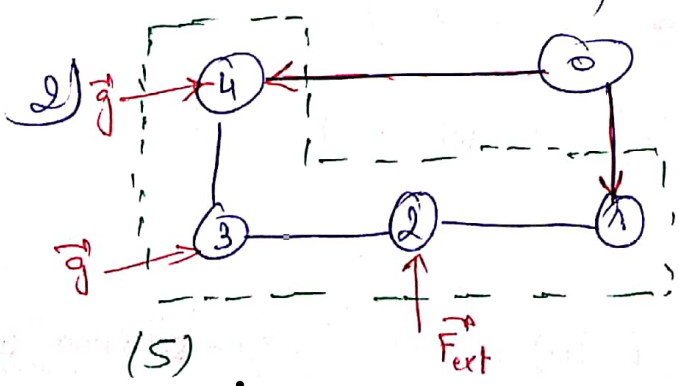
Problème plan. $(O, \vec{x_0}, \vec{z_0})$

Frottement : $X_C = -f Z_C$.

$$\{\mathcal{T}_{0\to3}\}_C = \begin{Bmatrix} -fZ_C & 0 \\ 0 & M_C \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}$$

Enoncé Galoi | Loi de Coulomb :

* $\vec{T}_{0\to3} \wedge \vec{V}(C\in 3/0) = \vec{0}$
* $\vec{T}_{0\to3} \cdot \vec{V}(C\in 3/0) \leq 0$
* $\|\vec{T}_{0\to3}\| = f \cdot \|\vec{N}_{0\to3}\|$



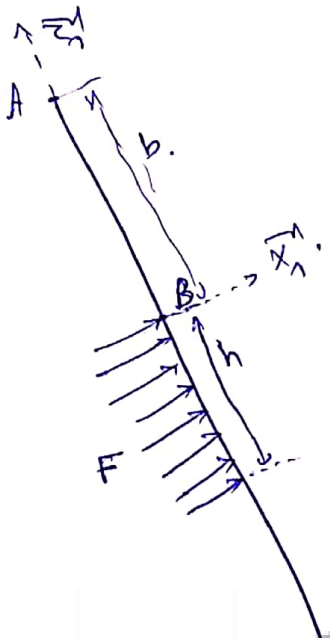
pesanteur négligé.

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

MY_PREPA

$$\{S\} = \{0, \overrightarrow{F_{ext}}, \overrightarrow{g}\}.$$

3)



$$\overrightarrow{R_{ext\to 2}} = \int_{-h}^{0} \overrightarrow{f}(M).dz$$

$$= \int_{-h}^{0} F\overrightarrow{x_1}.dz.$$

$$= Fh.\overrightarrow{x_1}.$$

$\overrightarrow{BT}\begin{pmatrix}0\\0\\-z\end{pmatrix}$.

(2).

$$\{\mathcal{C}_{ext\to 2}\}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to 2}} \\ \overrightarrow{\Pi_B}(\overrightarrow{R_{ext\to 2}}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fh.\overrightarrow{x_1} \\ \end{Bmatrix}.$$

$$\overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{f}(\Pi)) = \int_{-h}^{0} \overrightarrow{BT} \wedge \overrightarrow{f}(\Pi) = \int_{-h}^{0} -z\overrightarrow{z_1} \wedge F\overrightarrow{x_1}.dz$$

$$= -\frac{Fh^2}{2}.\overrightarrow{y_1}$$

MY_PREPA