

Analyse Temporelle

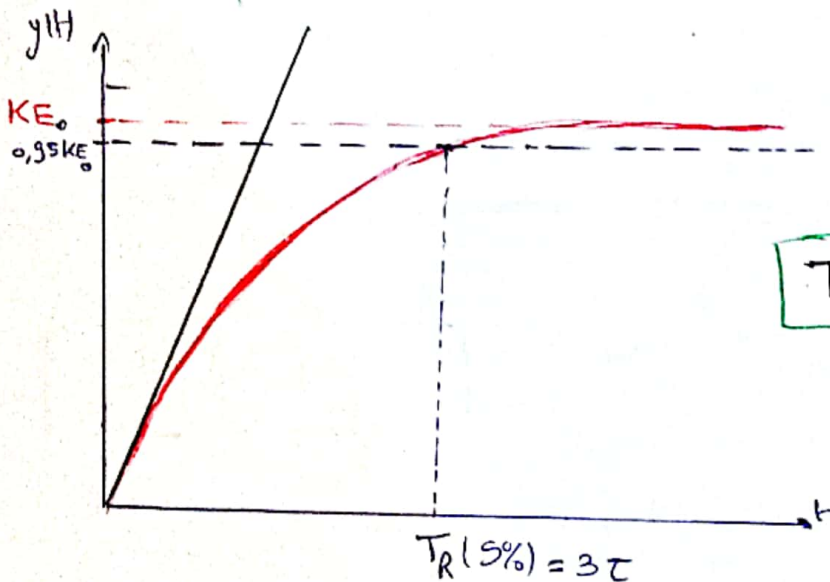
* Système du 1^{er} ordre :

$$\tau \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot e(t).$$

τ : de du temps de système ; K : gain statique.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

→ Réponse indicielle :



$$T_R(5\%) = 3\tau$$

* Système du 2nd ordre :

$$\ddot{y}(t) + 2m\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

* K : gain statique.

* m : coefficient d'amortissement.

* ω_0 : pulsation propre de système

• forme canonique de H : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$

① Régime Apériodique : $m > 1$ ($\Delta > 0$)

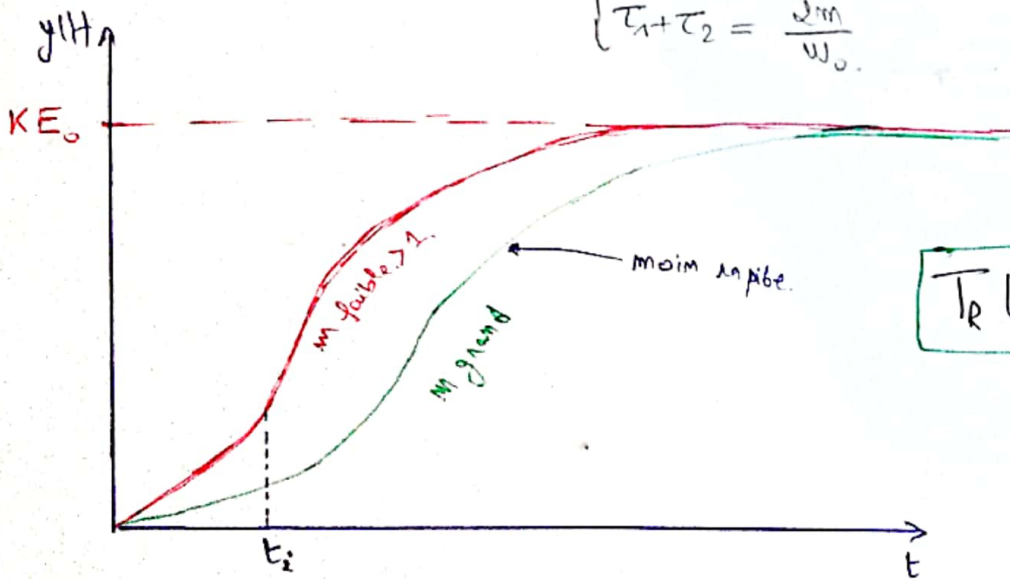
2 racines réelles : $p_1 = -\frac{1}{\tau_1} < 0$; $p_2 = -\frac{1}{\tau_2} < 0$.

Ainsi $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$

(multiplication de 2 systèmes du 1^{er} ordre.)

• Réponse indicielle :

$$\begin{cases} \tau_1 \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \\ \tau_1 + \tau_2 = \frac{2m}{\omega_0} \end{cases}$$



$$T_R(50\%) = 6,25 \frac{m}{\omega_0}$$

temps d'inflexion: $t_i = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$

② Régime Critique : $m = 1$ ($\Delta = 0$)

la réponse $y(t)$ est identique au cas où $m > 1$.

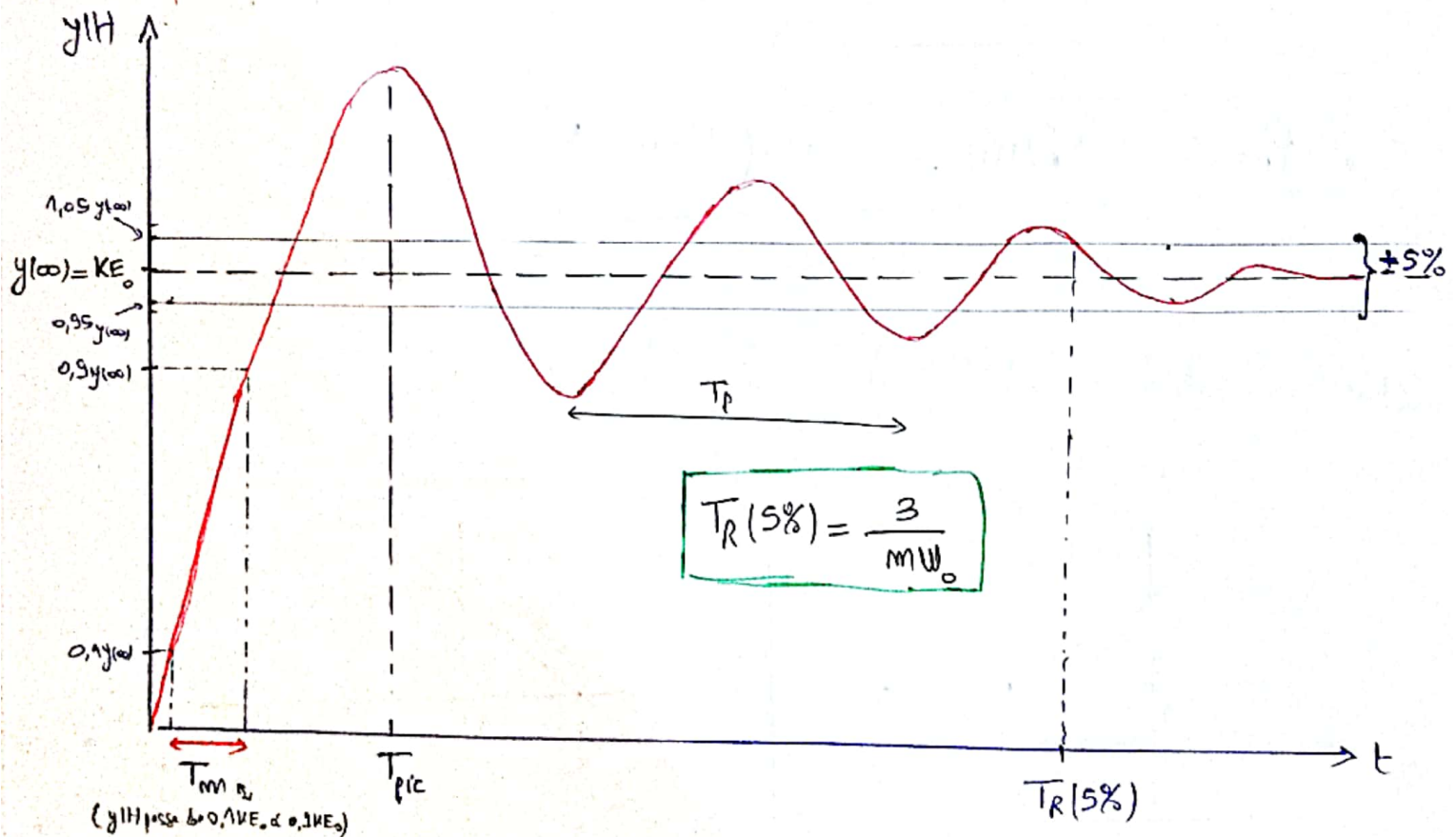
elle est appelée régime critique car son régime transitoire est le plus rapide possible (sans dépassement).

③ Régime Pseudopériodique ($m < 1$) : ($\Delta < 0$) :

Le régime transitoire est formé par des oscillations de pulsation : $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ amortie par $e^{-m\omega_0 t}$

avec : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

• Réponse indicielle :



• T_{pic} : temps de 1^{er} dépassement :

$$T_{pic} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$$

• $D\% = 100 \cdot \frac{y(T_{pic}) - y(\infty)}{y(\infty)}$ $\Leftrightarrow$

$$D\% = 100 \cdot e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1 - m^2}}}$$

• il est clair que lorsque $m \rightarrow 1$: le dépassement $\rightarrow 0$.

Analyse Fréquentielle

On considère un système linéaire décrit par la fonction de Transfert $G(p)$.

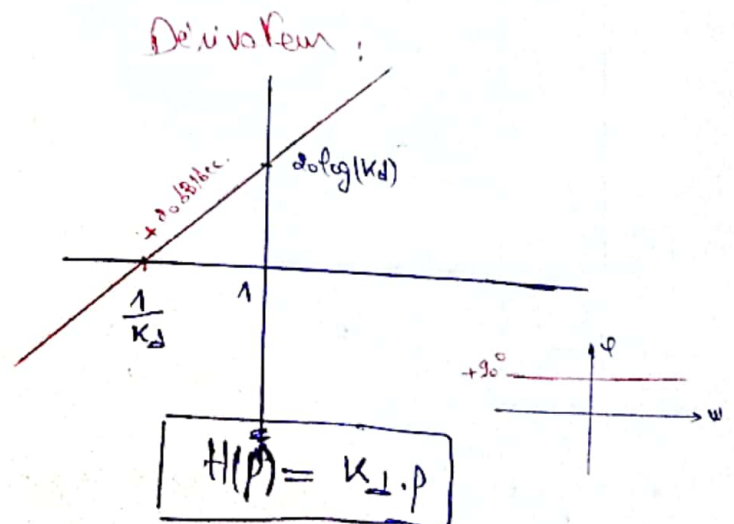
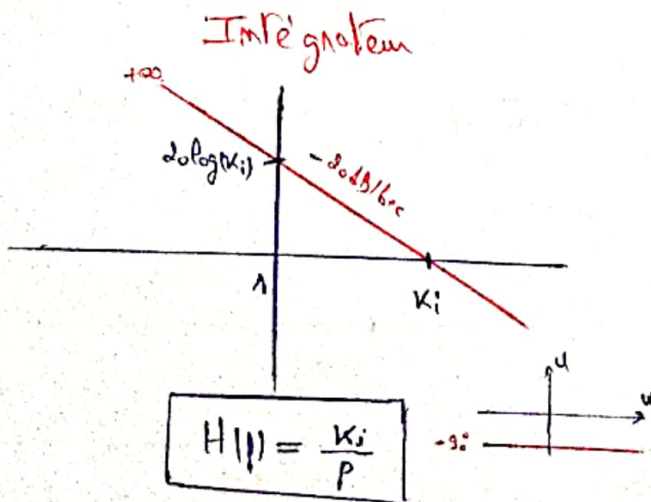
$$G(j\omega) = |G(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

* Gain : $|G(\omega)| = |H(j\omega)|$; $H = G$: fonction de transfert.

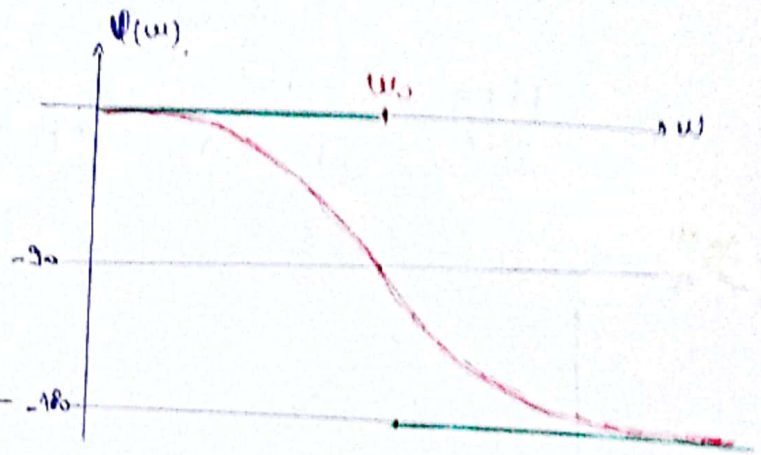
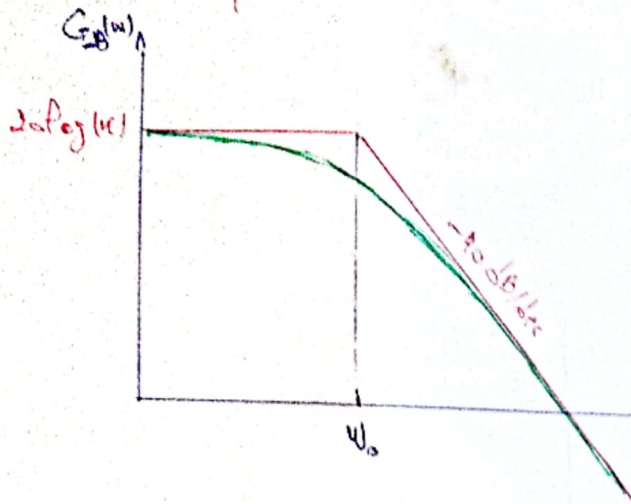
$$G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10}(G(\omega)) = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$$

* Phase : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$

① Système Intégrateur & Dérivateur :



* Critique : ($m=1$) : Particularité : $\omega_{c1} = \omega_{c2} = \omega_0$.



* Pseudopériodique ($m < 1$):

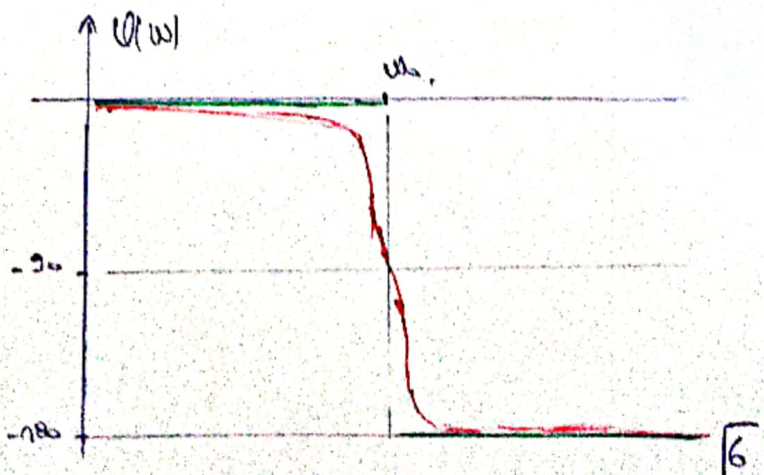
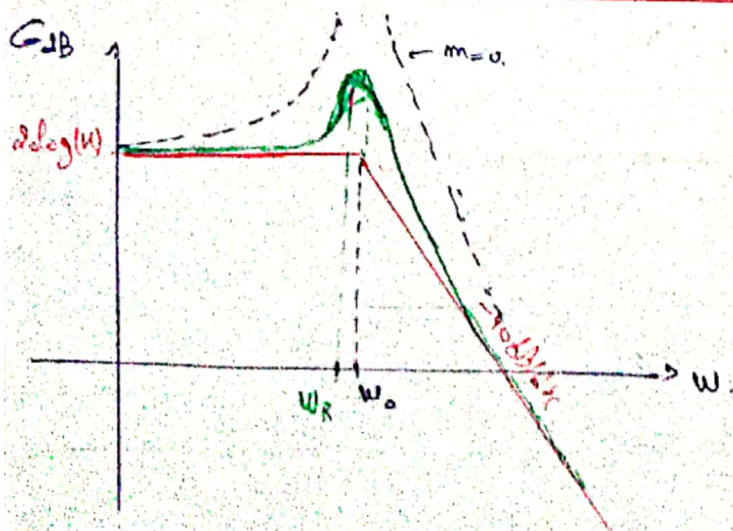
* $\frac{1}{\sqrt{2}} < m < 1$: Sans résonance : m courbe que ($m=1$)

* $m \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$: avec résonance,

• Le gain de système passe par un maximum pour $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

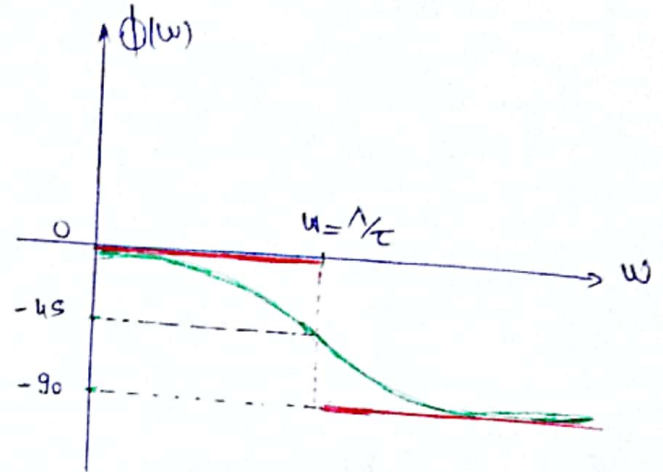
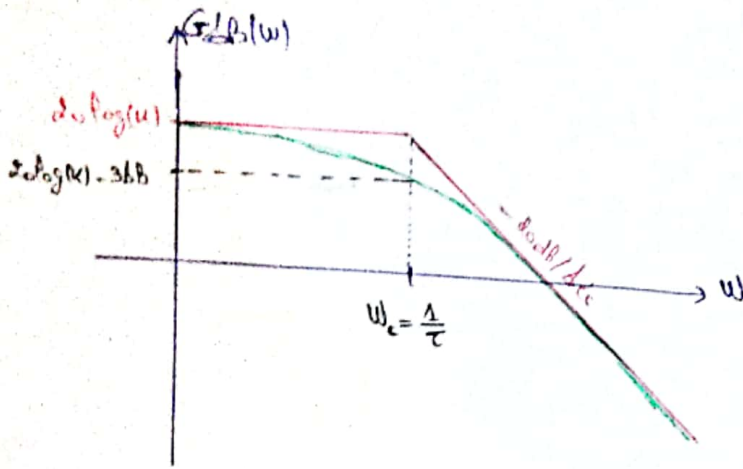
• $G_{dB}(\omega_R) = 20 \log(K \cdot Q) = 20 \log\left(\frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}\right)$

• $G_{dB}(\omega_0) = 20 \log\left(\frac{K}{2m}\right)$



② Système de 1^{er} ordre, (lorsque $K > 0$).

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \Leftrightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) - 10 \log(1 + (\tau \omega)^2) \\ \phi(\omega) = -\arctan(\tau \omega) \end{cases}$$

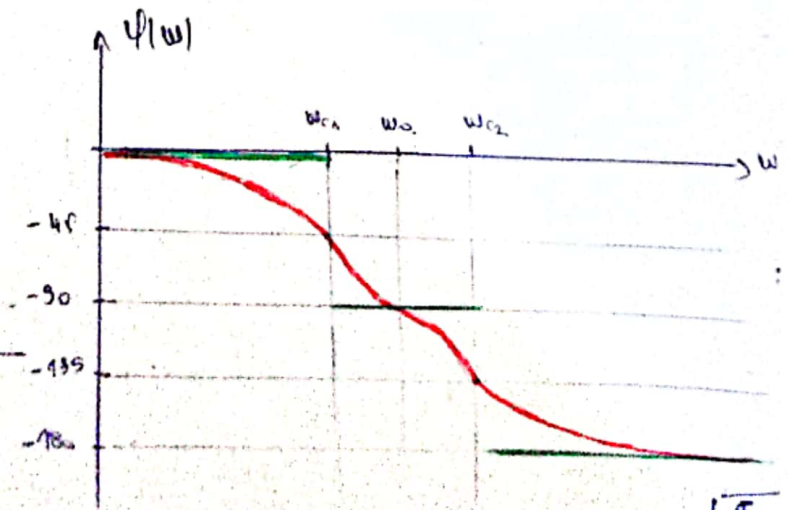
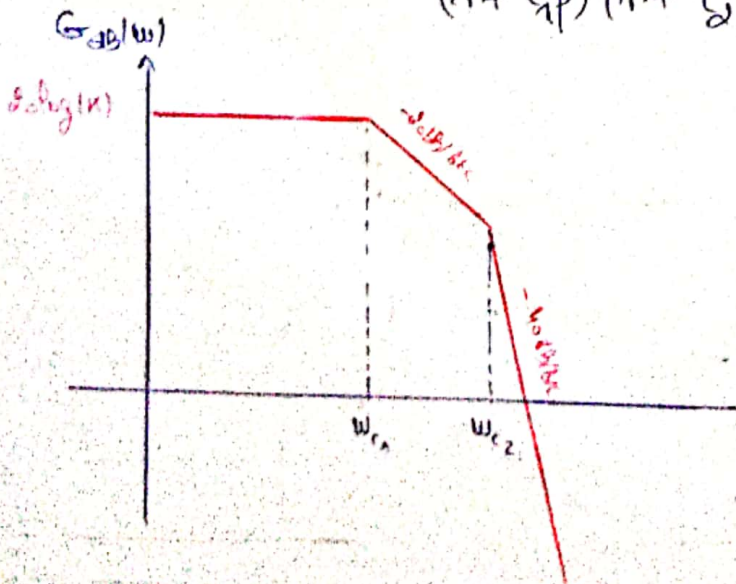


③ Système de 2nd ordre, ($\mu = \omega/\omega_0$)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\mu}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \Leftrightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) - 10 \log(1 - \mu^2 + 4\mu^2 \zeta^2) \\ \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{2\mu \zeta}{1 - \mu^2}\right) \end{cases}$$

* Apériodique : $\zeta > 1$: (supposition de 2nd ordre)

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{\sqrt{K}}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{\sqrt{K}}{1 + \tau_2 p}$$



- TL d'un signal périodique:

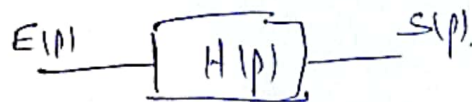
soit $g(t)$ une fonction périodique de période T .

soit $f(t)$ sa restriction T_T : $f(t) = \begin{cases} g(t) & \forall t \in [0, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$G(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

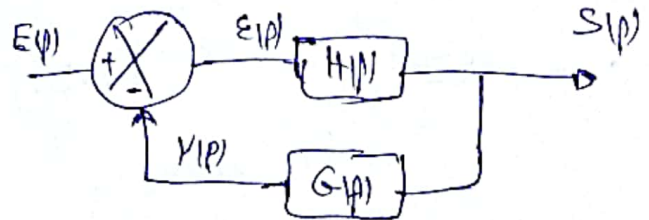
Fonction de Transfert

• Schéma fonctionnels



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

• soit



- FTBO = $\frac{Y(p)}{E(p)} = H(p) \cdot G(p)$.

- FTBF = $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)}$. (Formule de Black).

- Superposition, si on a deux entrées $X_1(p)$ et $X_2(p)$,

si $X_2(p) = 0 \longrightarrow Y_1(p)$

si $X_1(p) = 0 \longrightarrow Y_2(p)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } X_2(p) = 0 \longrightarrow Y_1(p) \\ \text{si } X_1(p) = 0 \longrightarrow Y_2(p) \end{array} \right\} Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$$

Automatique

* Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = F(p) + G(p)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \cdot F(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-Tp} \cdot F(p)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} \cdot F(p)$$

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = \mathcal{L}[-t \cdot f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{+\infty} F(q) \cdot dq$$

• Théorème de la valeur initiale et la valeur finale:

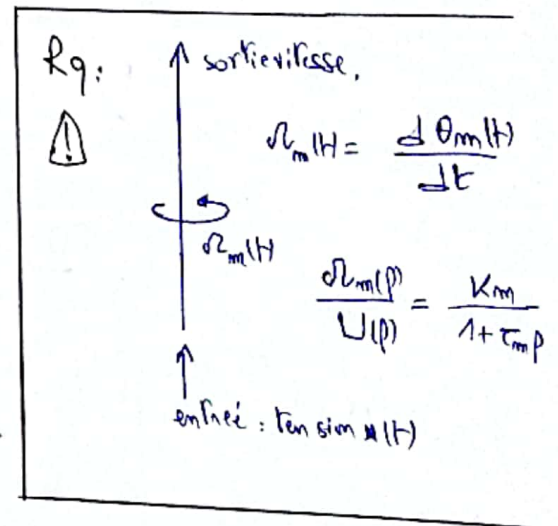
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

• TL des signaux canoniques:

$$\text{Impulsion de Dirac: } \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\text{Echelon: } \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

$$\text{Rampe: } \mathcal{L}[t \cdot u(t)] = \frac{1}{p^2}$$



Stabilité

(3)

* Un système est stable si tous les parties réelles des pôles de FTBF sont $\text{str} < 0$.

* Critère algébrique : de Routh.

• 1^{er} examen : les a_i mm pas le même signe ou certains nuls.
 $\Rightarrow$ mm stable.

• 2^{ème} examen : il faut que tous les termes de la 1^{ère} colonne du tableau soient > 0 .

p^n	a_n	a_{n-2}	$a_{n-4} \dots$
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	$a_{n-5} \dots$
p^{n-2}	A_1	A_2	
p^{n-3}	B_1	B_2	

$$A_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

A_2 les même.

$$B_1 = \frac{A_1 a_{n-3} - A_2 a_{n-1}}{A_1}$$

Critère Graphique : (FTBO).

* Nyquist : si son lieu de transfert en BO n'entour pas $(-1, 0)$.

* Black : il faut que le lieu coupe l'axe d'abscisse avant -180° pour qu'il soit stable.

* Bode : Pour $\varphi = -180^\circ$ il faut que $G_{dB} < 0$.
 Pour $G_{dB} = 0$ il faut que $\varphi > -180^\circ$. } pour la stabilité.

Marge de Gain	Marge de Phase	H = FTBO
$M_G = -20 \log H(j\omega_{\pi}) $	$M_\phi = 180^\circ + \arg H(j\omega_1)$	
$\omega_\pi / \arg(H(j\omega_\pi)) = -180^\circ$	$\omega_1 / H(j\omega_1) = FTBO(j\omega_1) = 1$	

$$\Sigma(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$; \lim_{p \rightarrow \infty} \Sigma(p)$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \Sigma(p)$$

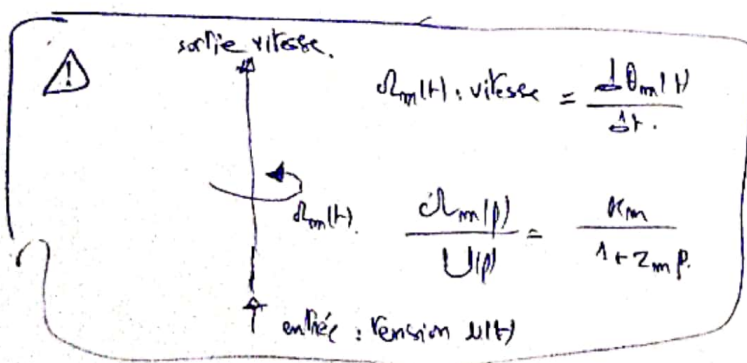
Indication	C_0	C_1	C_2
Σ_p	$E/(k+1)$	∞	0
Σ_v	∞	E/k	0
Σ_a	∞	∞	E/k

$$M_G(dB) = -20 \log \left(\frac{k}{k_c} \right)$$

k_c : gain critique.

$\dots k < k_c$

limite de stabilité.

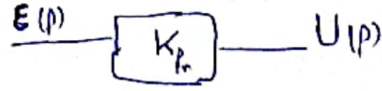


Correcteurs des systèmes

asservis

On utilise 4 types de correcteurs :

① Correcteur Proportionnel (P) :

* Fonction de transfert : $C(p) = K_p$ 

* Caractéristiques : * Plus $K_p \nearrow$, plus rapidité $\nearrow$, plus stabilité $\searrow$.
↳ risque d'instabilité,

② Correcteur Proportionnel Intégral (PI) :

* Fonction de transfert : $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p}$

$$\Leftrightarrow C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} \right)$$

* Caractéristiques : ce correcteur annule l'erreur statique de position et améliore la précision car l'intégrale ajoute 1 à la classe de FTBO.

③ Correcteur Proportionnel Dérivé (P.D)

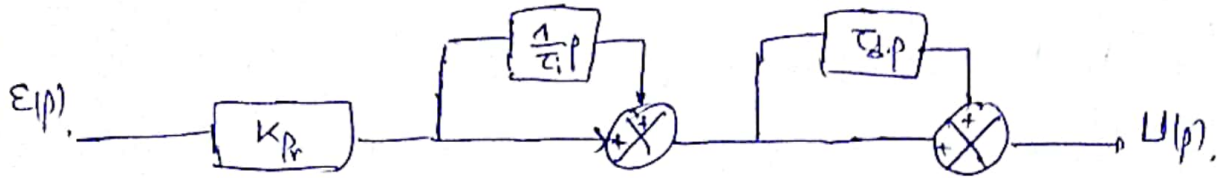
* Fonction de transfert : $C(p) = K_p + K_d \cdot p = K_p \cdot (1 + \tau_d \cdot p)$

* Caractéristiques : Ce correcteur améliore la stabilité en diminuant les dépassements en amplitude et en nombre.

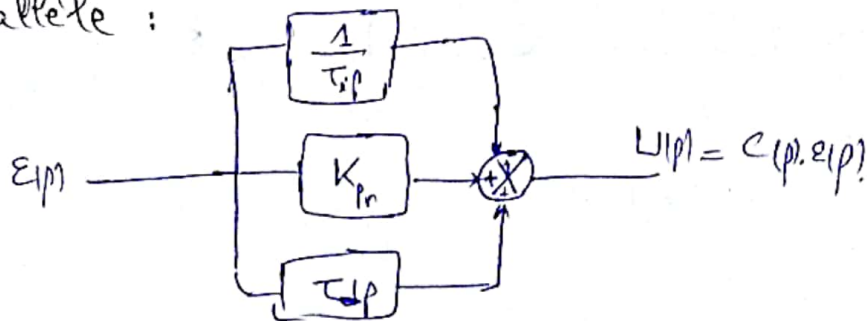
④ Correcteur Proportionnel - Intégrale - Dérivé (PID).

* ~~Fonction de~~ $\exists$ 3 types de structures de ce correcteur.

- En série: $K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \cdot (1 + T_d p) = C(p)$

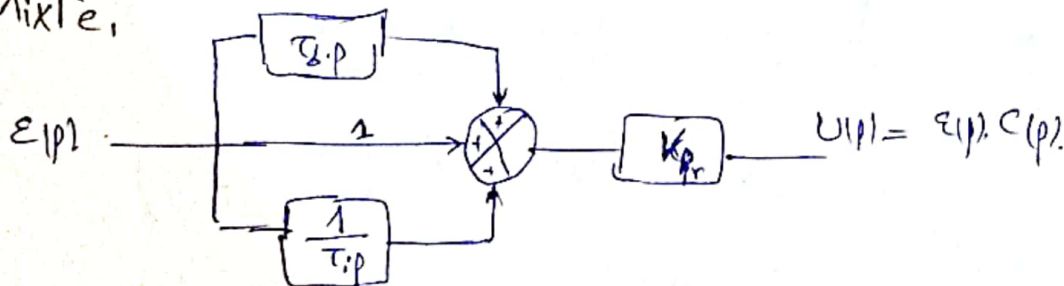


- En parallèle :



$$C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} + T_d p$$

- Mixte,



la

$$C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$$

• Caractéristiques: Ce correcteur améliore pratiquement toutes les performances : stabilité, précision, rapidité.

