

MG

Géométrie de masse

Centre de masse (d'inertie):

$$\vec{OG} \left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{M} \int x dm \\ y = \frac{1}{M} \int y dm \\ z = \frac{1}{M} \int z dm \end{array} \right) \quad \rho = \frac{dm}{dv} \quad V = \frac{dS}{dv} \quad \lambda = \frac{dl}{dv}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \int \vec{OP} dm, P \in (S)$$

→ proj de $\vec{OP}$ sur l'axe ou G.E et on fait le calcul

$$M \vec{OG} = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + m_3 \vec{OG}_3$$

prop: G.E a une symétrie matérielle: sym géom + répat de la masse



Rq: $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow G = (\frac{1}{3} \text{ base}, \frac{1}{3} \text{ hauteur}, 0)$ à partir de h

$\vec{OG} = \vec{OG}_1 + \vec{OG}_2$; $S = R^2 d$; $dS = R^2 d\theta$; $\int \int r dr d\theta$

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{S} \int \int \vec{OP} \cdot dS ; \vec{OP} = r \cos \theta$$

$$= \frac{R^2}{R^2 \alpha} \int_0^R r^2 dr \int_0^\alpha \cos \theta d\theta = \frac{R}{3} \cos \theta \alpha$$

$\vec{OP}$: P: Point E solide ; $\vec{OG} = \frac{1}{S} (S_1 \vec{OG}_1 - S_2 \vec{OG}_2 + S_3 \vec{OG}_3)$

Rq: $S_1 = S_2 + S_3 \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{S} (S_1 \vec{OG}_1 - S_2 \vec{OG}_2 + S_3 \vec{OG}_3)$

$$S = S_1 - S_2 + S_3$$

Calcul:

$$S = 2\pi R \cdot L$$

$$V = 2\pi R \cdot S ; \begin{cases} R = \frac{1}{2} \int r dr \\ R = \frac{1}{2} \int r dr \\ R = \frac{1}{2} \int r dr \end{cases}$$

Rq: cone: $V = 2\pi R \cdot S$; $S = \frac{1}{2} \pi b^2$; $R = \frac{1}{3} b$

$\Rightarrow S = 2\pi R \cdot L$

Ehermi Fidaa ①

Opérateur d'inertie:

Moment d'inertie: $I_A(S) = I_{\vec{a}}(S) = I_{\vec{a}}(S)$

$A = \int y^2 + z^2 dm$; moment d'inertie de (S) par rapport à $\vec{a}$

$B = \int x^2 + z^2 dm$; $C = \int x^2 + y^2 dm$

produit d'inertie:

$$I_{xy} = \int xy dm = F$$

$$I_{xz} = \int xz dm = E$$

$$I_{yz} = \int yz dm = D$$

Matrice d'inertie: $[I(S)]$

$$[I(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

si on a un plan de sym (X, Y) $\Rightarrow z=0$

$\Rightarrow I(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

si on a 2 plan de sym (X, Y) et (Y, Z) $\Rightarrow x=0$ et $z=0$

$\Rightarrow I(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

si on a un solide de révolution: $\Rightarrow$ matrice diagonale

sphère plane de masse m:

$$I(S) = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sphère creuse: $I(S) = \frac{2mR^2}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[cylindre d'axe X] = $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$

[I tige X] = $\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$

la matrice d'inertie de masse ponctuelle en G (centre) est nulle

la matrice d'inertie de masse négligeable est nulle en tout pt

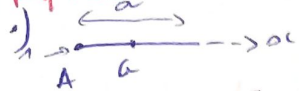
th de Huygens: $\vec{OG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

$$[I(S)]_G = [I(S)]_A + \begin{bmatrix} -ab & -ac & -bc \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

Rq: si on a mat d'inertie en A et on va calculer le moment cinétique en B? on le calcul en A puis on fait un transfert en B

$\Rightarrow$ on ne transfère jamais une matrice

Rq: bornes d'intégr



$$I(A, \vec{e}_2) = \int x^2 + y^2 dm$$

Théorème
Fidèle

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$$

$$= \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \rightarrow \% A$$

$$I_1(G, \vec{e}_2) = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx \rightarrow \% G$$

Jaglinde: charge vol: $\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V}$

$$I_3 = \int x^2 + y^2 dm = \int r^2 dm \text{ car } x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha$$

$$V = \iiint r^2 dr d\alpha d\varphi$$

masse mu (point) centrée au pt G $\Rightarrow$ perpendiculaire $[I] = 0$

Cinématique

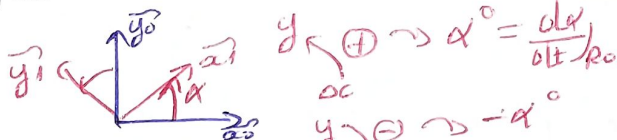
1) schéma cinématique: Rq: $\begin{matrix} \text{③} & \text{④} \\ \text{⑥} & \text{⑦} \end{matrix} \Rightarrow \text{③+④}$

2) baseur cinématique: $\{S/S_0\}_{pt B}$ $\left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}_{S/S_0} \\ \vec{v}_{pt B/S_0} \end{matrix} \right\}$

$\vec{\omega}$: résultante cinématique base $= \omega = \frac{d\theta}{dt}$

$\vec{v}$: moment cinématique: vitesse

3) resul ciné: $\vec{\omega}$:



$$x \rightarrow y \rightarrow z$$

4) resul moment ciné: $\vec{v}$

5) loi de dérivation: $\frac{du}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{du}{dt} \Big|_{R_u} + \vec{\omega}_{R_0/R_u} \wedge u$

6) par dérivation: $\vec{v}_{A/S/R_0} = \vec{v}_{A/S/R_u} = \vec{v}_{A/R_u}$
L.O: $\vec{\omega} = 0$
 $= \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_{R_0} = \omega \vec{e}_R$

$$\vec{v}_{A/S/R_0} = \frac{d \text{pt fixe } A}{dt} \Big|_{R_0} \text{ pt fixe: fixe \% A } \vec{BA}, \vec{OA} \rightarrow \vec{AB}$$

$$= \frac{d \text{pt fixe } A}{dt} \Big|_{R_A} + \vec{\omega}_{R_A/R_0} \wedge \vec{r}_{A/R_A}$$

$$\vec{v}_{A/S/R_0} = \frac{d\vec{OA}}{dt} \Big|_{R_0} \text{ glisse}$$

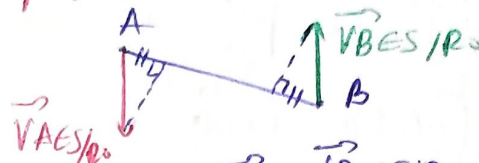
7) par antisymétrie:

$$\vec{v}_{B/S/R_0} = \vec{v}_{A/S/R_0} + \vec{\omega}_{S/R_0} \wedge \vec{AB}$$

8) par décom:

$$\vec{v}_{A/S/S_0} = \vec{v}_{A/S_1/S_0} + \vec{v}_{A/S_1/S_0}$$

9) équiprojectivité:



$$\vec{v}_{A/S/R_0} \cdot \vec{AB} = \vec{v}_{B/S/R_0} \cdot \vec{AB}$$

10) accélération:

$$\vec{a}_{A/S/R_0} = \frac{d\vec{v}_{A/S/R_0}}{dt} \Big|_{R_0}$$

$$Rq: \frac{d(\cos \alpha)}{dt} = \frac{d \cos \alpha}{d \alpha} \cdot \frac{d \alpha}{dt} = -\sin \alpha \cdot \omega$$

11) CRSG: $\vec{v}_{G/S_1/S_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{G/S_1/S_0} = \vec{v}_{G/S_2/S_0}$

Rq: $\vec{v}_{G/S_1/S_2} = \vec{0}$

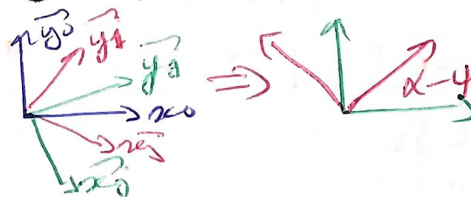
$\vec{v}_G$ // tangent: $\in$ plan tangent et normal

Rq: courbe indéfinie ou courbe imatérielle: $\vec{v}_{G/S_2/S_3} = \vec{v}_{G/S_1/S_3}$

12) hélicoïdale:

$$v = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{\rho} \omega$$

13) proj composé:



Rq: u liée a S $\Rightarrow \vec{\omega}_{u/S} = 0$

Rq: $\vec{v}$: 2 flèche: angle de

cinétique (vecteur)

$$\{E S / R_0\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_{G E S / R_0} \\ \vec{V}_{A E S / R_0} \end{array} \right\}_A$$

résultante cin
comport cin

si G est axe de rot $\Rightarrow \vec{V}_G = 0$

$$\vec{V}_{G E S / R_0} = \frac{d \vec{O G}}{dt} \bigg|_{R_0}$$

ou décom, symétrie

$$\vec{V}_{A E S / R_0} = [I(S)] \vec{\omega}_{S / R_0} + \vec{A G} \wedge m \vec{V}_{G E S / R_0}$$

si Mat en A:

$$\vec{V}_{A E S / R_0} = [I(S)] \vec{\omega}_{S / R_0} + \vec{A G} \wedge m \vec{V}_{G E S / R_0}$$

Vitesse liée par matrice wim

$$\text{si } G \equiv A \Rightarrow \vec{A A} = \vec{0}$$

$$\vec{V}_{B E S / R_0} = \vec{V}_{A E S / R_0} + m \vec{V}_{G E S / R_0} \wedge \vec{A B}$$

$$v) (E) : \left\{ \begin{array}{l} \leq m \vec{V}_{G / R} \\ \leq \vec{V}_{B / R} \end{array} \right\}$$

en m pt base

Ru touse d'axe mase négligeable et nulle

Energie cinétique (scalare)

$$E_C(S / R_0) = \frac{1}{2} \{ \vec{V}_{S / R} \} \otimes \{ \vec{E}_{S / R} \}_A$$

A mpt

$$= \frac{1}{2} \vec{V}_B \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} m \vec{V}_G \cdot \vec{V}_A$$

$$\text{rot: } E_C = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\text{trans: } E_C = \frac{1}{2} m V^2$$

$$E_C(E / R_0) = \sum E_C(E / R)$$

Dynamique

$$\{D S / R_0\}_A = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{P}_{G E S / R} \\ \vec{\Sigma}_{A E S / R} \end{array} \right\}_A$$

$$\vec{P}_{G E S / R} = \frac{d \vec{V}_{G E S / R}}{dt} \bigg|_R$$

$$\vec{\Sigma}_{A E S / R} = \frac{d \vec{M}_{A E S / R}}{dt} \bigg|_R + \vec{V}_{A E S / R} \wedge m \vec{V}_{G E S / R}$$

$$\text{si } A \equiv G : \vec{\Sigma}_{A E S / R} = \frac{d \vec{M}_{A E S / R}}{dt} \bigg|_R$$

③

$$\vec{\Sigma}_{B E S / R} = \vec{\Sigma}_{A E S / R} + m \vec{V}_{B E S / R} \wedge \vec{A B}$$

cas d'un ensemble

$$\{D E / R\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \sum m_i \vec{a}_i / R \\ \vec{\Sigma}_A = \sum \vec{\Sigma}_{A E S / R} \end{array} \right\}_A$$

mpt et m base

PFD

$$\{D E / R\}_A = \sum \{ \vec{Z}_{S \rightarrow S} \rightarrow S \}_A$$

$$\{D E / R\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$$

mpt pt
m base

th de résult dyn:

$$\vec{a} = \sum \vec{R}$$

th de résult moment dyn:

$$\vec{\Sigma}_{A E E / R} = \sum \vec{M}_A \leftarrow \text{on A}$$

transport
 $\Rightarrow$ eq de vnt, eq diff de 2nd ordre.
déduit du PFD

statique

$$\text{tenseur: } \{Z S \rightarrow S\}_A^B = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right\}_A$$

dans l'espace

$$\{Z S \rightarrow S\}_A^B = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_A$$

plan (hypothèse plan)

$$\text{personne: à distance: } \{Z g \rightarrow\} (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_G$$

$\vec{g} = -g \vec{z}$

$$\text{champ magnétique: à distance: } \{Z \text{ bob} \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_S$$

$$\text{couple moten: à contact: } \{Z M \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{\text{ent pt}}$$

$$\text{fluide compression: à contact: } \{Z \text{ fluide} \rightarrow S\} = \left\{ \begin{array}{l} +F \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_S$$

$F = P \cdot S$

$$\text{charge répartie uniforme: } \{Z \vec{q} \rightarrow S\}_{A E S} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \int q \, da \\ \vec{M} = \int \vec{r} \wedge \vec{P} \end{array} \right\}_{A E S}$$

$$\{Z \vec{q} \rightarrow S\}_I = \left\{ \begin{array}{l} -qL \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_I$$

$$\text{charge non uniforme: } \{Z \vec{q} \rightarrow S\}_I = \left\{ \begin{array}{l} -q_{\text{max}} \cdot \frac{1}{2} L \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_I$$

1) liaison parfaite: $\text{Point} = \vec{0}$, $\beta = 0$
 point nominal $\vec{y} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} A$
 rotule: $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, pivot $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
 glissière: $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$; $P_2: \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
 linéaire: $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$; rotule à droite: $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
 note: $\vec{r} = \vec{0}$

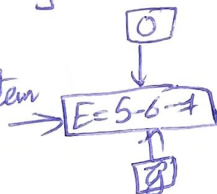
linéaire rect d'axe $\vec{x}$ et $H \vec{y}$: $\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
 $\in T \text{ sur } H$
 $\in R$: axe + Homale
 2) liaison non parfaite: $\text{Point} \neq \vec{0}$, $\beta \neq 0$

$$T = \beta N$$

friction visqueuse: $\beta = \beta(v)$

$$\begin{Bmatrix} V \\ S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow ZS/S = \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

exemple: moteur



$\vec{g}_{app}$ à 5, 6, 4

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} Z \rightarrow 4 \end{Bmatrix} G_4 = - \quad | \quad \begin{Bmatrix} Z \rightarrow 5 \end{Bmatrix} G_5$$

$$\begin{Bmatrix} Z \rightarrow 4 \end{Bmatrix} G_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ tout pt}$$

$$\begin{Bmatrix} Z \rightarrow 5 \end{Bmatrix} G_5 = \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Z \rightarrow 4 \end{Bmatrix} G_4 = \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

appliqué à E
 pt de liaison
 liaison

équilibre PFS

$$\begin{Bmatrix} Z \rightarrow 5 \end{Bmatrix} A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} A, \vec{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{P}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \sum M = 0$$

$$Pq: \begin{Bmatrix} Z \rightarrow 5 \end{Bmatrix} A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} A$$

tous Z en même base

Pq: -1-: m base

Ehrami Fidaa



Pq: point, CRSG
 1 pt de contact, $\vec{r} = \vec{0}$: H au contact
 $(I, \vec{y}, \vec{z})$, plan tangent au contact.

$$\vec{V} \in \mathbb{R}^3 \cdot \vec{r} = \vec{0}$$

$\vec{V}_g \in \text{plan tangent}$
 et $\perp H$ au contact

$$\text{si CRSG} \Rightarrow \vec{V} = \vec{0}$$

$$\begin{Bmatrix} Z \rightarrow 2 \end{Bmatrix} \pm = \begin{Bmatrix} N \vec{r} + \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \pm$$

$$\vec{T} = T_y \vec{y} + T_z \vec{z} \in \text{plan tangent}$$

$\vec{T} // \vec{V}_g$ et de même sens ou inverse

$$\text{si } \vec{V}_g = V_y \vec{y} \Rightarrow \vec{T} = -T_y \vec{y} \Rightarrow T_z = 0$$

Pq: $\odot$ point $G \in \text{l'axe} \Rightarrow \vec{r}_G = \vec{0}$ (max)

si Fissure de pt A $\Rightarrow A \equiv G$

équilibre statique

le centre d'inertie est sur l'axe de rotation

équilibre dynamique
 axe de rotation
 $I_{xy} = I_{yx} = 0$
 $I(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

Puissance (scalaire)

$$P(\vec{S} \rightarrow S/R_0) = \begin{Bmatrix} V \\ S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} Z \rightarrow S \end{Bmatrix} A$$

$$= \vec{U}_{S/R_0} \cdot \vec{M}_{A(S/R_0)} + \vec{V}_{A(S/R_0)} \cdot \vec{P}$$

$$CM = FV$$

Point = 0: liaison parfaite ou CRSG

$$P_{est} = \sum P_{\vec{S} \rightarrow E}$$

$$= P(\text{moteur} \rightarrow 5) + P(\vec{S} \rightarrow 5/0) + \dots$$

Ec total $\in$ l'h de l'Ec

$$\frac{dEc}{dt} \begin{Bmatrix} S/R_0 \end{Bmatrix} = \sum (P_{\vec{S} \rightarrow S/R_0}) + P_{\text{int}}$$

Ec moteur n'est nul
 Point = 0: liaison parfaite
 CRSG

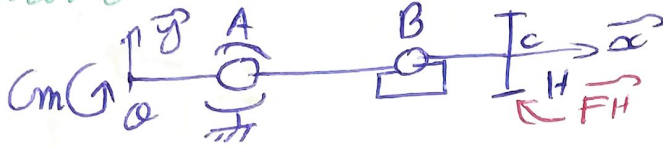
I) objectif:

détermination de la dimension d'une structure ou faire un calcul de vérification.

Thermi Fiala

II) Demande à suivre:

① PFS pour déterminer les actions de liaisons ou inconnues statiques en A et B:



exemple:

① PFS : $\{Z \vec{P} \rightarrow \vec{P}\}_C = \{0\}_C$

$$\{Z(A)\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ y_A & 0 \\ z_A & 0 \end{Bmatrix}_C$$

$$\{Z(B)\}_C = \begin{Bmatrix} x_C & 0 \\ y_C & 0 \\ z_C & 0 \end{Bmatrix}_C$$



transfert enc: Pq: PFS: les torseurs en un pt

$$\begin{aligned} \text{a) } \{Z(A)\}_C &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ y_A & (a+b)z_A \\ z_A & -(a+b)y_A \end{Bmatrix}_C & \vec{M}_C &= \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R} \\ \text{b) } \{Z(B)\}_C &= \begin{Bmatrix} 426 & -463 \\ -1885 & -5148b \\ -5148 & 1885b-65 \end{Bmatrix}_C & \vec{M}_C &= \vec{M}_B + \vec{CB} \wedge \vec{R} \\ & & & = \vec{M}_B + b \vec{OC} \wedge (426\vec{x} - 1885\vec{y} - 5148\vec{z}) \\ \text{c) } \{Z(D)\}_C &= \begin{Bmatrix} -11683 & 463 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C & \vec{M}_D &= \vec{M}_B + \vec{DB} \wedge \vec{R} \\ & & & = \vec{M}_A - \vec{CA} \wedge (-11683\vec{x}) = \vec{M}_D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \{Z \vec{P} \rightarrow \vec{P}\}_C = \begin{Bmatrix} x_C - 116157 & 0 \\ y_C + y_A - 1885 & (a+b)z_A - 5148b \\ z_C + z_A - 5148 & -(a+b)y_A + 1885b - 65 \end{Bmatrix}_C = \{0\}_C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C - 116157 = 0 \Rightarrow x_C = 116157 \text{ N} \\ y_C + y_A - 1885 = 0 \Rightarrow y_C = 1885 - y_A = 1532,5 \text{ N} \\ z_C + z_A - 5148 = 0 \Rightarrow z_C = 5148 - z_A = 2574 \text{ N} \\ (a+b)z_A - 5148b = 0 \Rightarrow z_A = 2574 \text{ N} \\ -(a+b)y_A + 1885b - 65 = 0 \Rightarrow y_A = \frac{-65 + 1885b}{a+b} = 292,5 \text{ N} \end{cases}$$

cd: PFS appliqué en un pt inconnu par exemple C donne les actions en fait on transfère de tous les torseurs en C.

③ Tenseur de cohésion, calculer dans les tronçons (trame)
le long de l'axe, en G:

$$\{Z_{coh}\}_G = -\{Z_{gauche}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} N & mt \\ T_y & mfy \\ T_z & mfb \end{array} \right\}_G$$

$$= +\{Z_{droit}\}_G$$

$N > 0 \Rightarrow$ traction
 $N < 0 \Rightarrow$ compression

T_y
 T_z } $\Rightarrow$ cisaillement ; mt : torsion
 mfy
 mfb } flexion

Exemples suite Exe:

Ehermi Fiolaa

④ tronçon AB: $A \xrightarrow{a} B$

$$\{Z_{coh}\}_G = -\{Z_A\}_G \Rightarrow \text{transfert de A à G}$$

$$\{Z_A\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 232,5 & 2514\alpha \\ 257,4 & -232,5\alpha \end{array} \right\}_G \quad \vec{M}_G = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AG}$$

$$= \vec{0} + (232,5\vec{B} + 2514\vec{B}) \wedge \alpha \cdot \vec{x}$$

$$\Rightarrow \{Z_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -232,5 & -2514\alpha \\ -257,4 & +232,5\alpha \end{array} \right\}_G \quad \text{flexion}$$

cisaillement $\Rightarrow$ cisail + flexion $\Rightarrow$ "flexion plane"

⑤ tronçon (BC): $B \xrightarrow{a} C$; $0,05 \leq \alpha \leq 0,1$

$$\{Z_{coh}\}_G = -[\{Z_B\}_G + \{Z_C\}_G]$$

$\alpha \leq 0,05 \Rightarrow \alpha = 0,1 \text{ AC}$

transfert de Z_B en G:

$$\Rightarrow \{Z_B\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 426 & -463 \\ -1885 & 2574\alpha - 5148\alpha \\ -5148 & 1880\alpha - 158,25\alpha \end{array} \right\}_G$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_B + \vec{R} \wedge \vec{BG}$$

$$= \vec{M}_B + (0,05\alpha) \vec{x} \wedge (426\alpha - 1885\alpha - 5148\alpha)$$

$$\Rightarrow \{Z_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} -426 & 463 \\ 1885 & 2574\alpha - 2571,4 \\ 5148 & 453,25 - 1582,5\alpha \end{array} \right\}_G \quad \begin{array}{l} \text{compression} \\ \text{torsion} \\ \text{flexion plane} \end{array}$$

⑥ tronçon (CD): $0,1 \leq \alpha \leq 0,4$; $C \xrightarrow{a} D$

$$\{Z_{coh}\}_G = \{Z_D\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} -136853 & 463 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G \Rightarrow \text{compression} + \text{torsion}$$

Trigo des diagrammes:

(3)

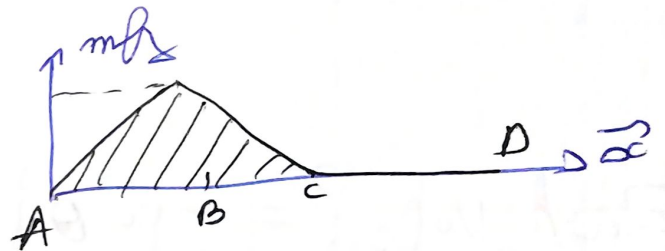
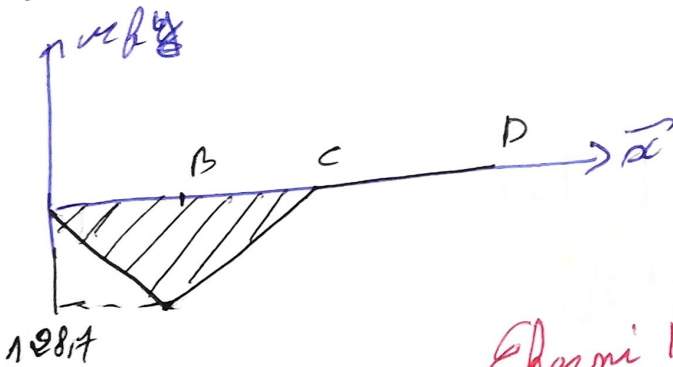
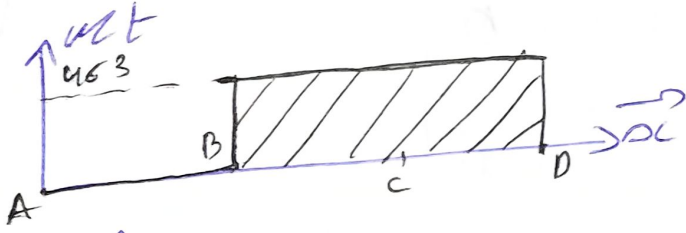
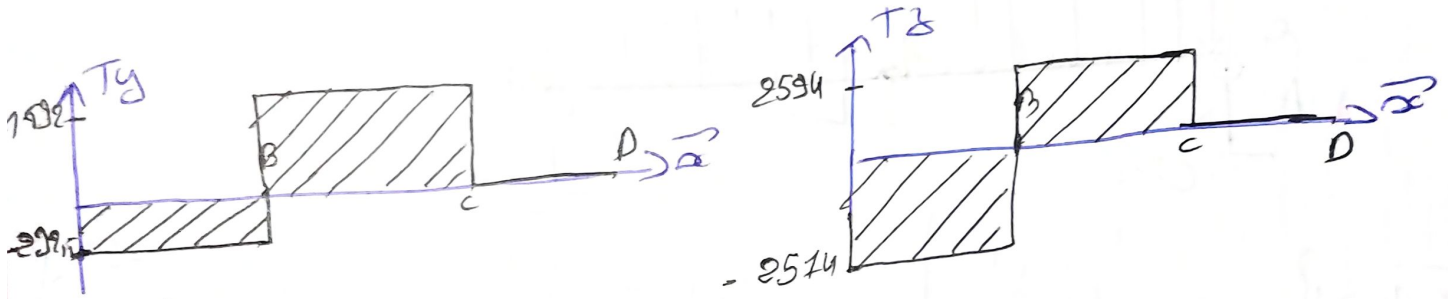
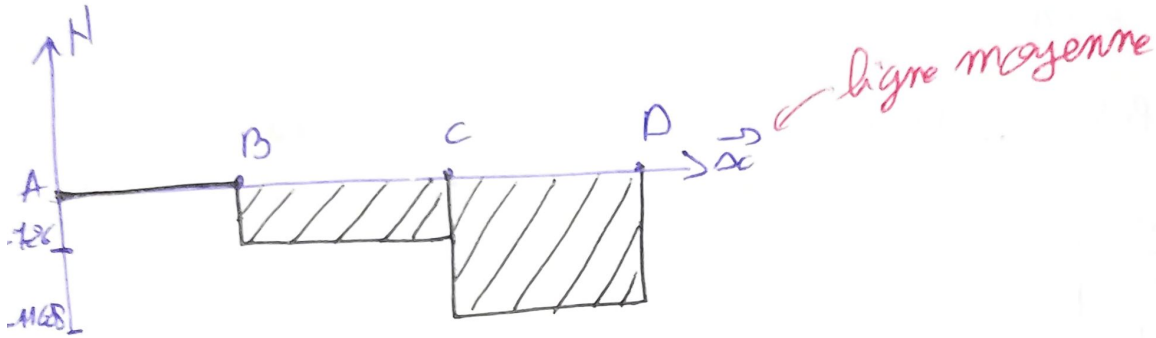
Ex:

A — B

B — C

$$\{Z_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} -232,5 \\ -2574 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 232,5\alpha \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{Z_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} -126 \\ 1582,5 \\ 2594 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 463 \\ 2574\alpha - 2574 \\ -1532,5\alpha - 1532,5 \end{Bmatrix}$$

$$\{Z_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} -11688 \\ 8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 463 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad C — D$$



Elormi Fiola

Rq: torsion de cohésion: torsion des effort internes du point:

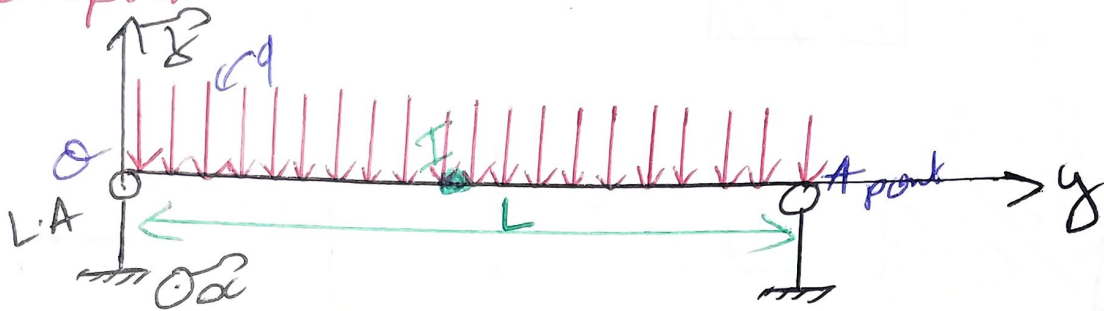
$\vec{F}_B \uparrow$ $\vec{F}_A \downarrow$ $\vec{F}_C \uparrow$ $\vec{y} \equiv H$; ligne moy $\equiv \vec{H} : \vec{P}$ traction
 $\equiv M_L$; $\vec{M}$ torsion

$\{Z_{coh}\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} T_{ax} & abx \\ H & act \\ T_g & abg \end{array} \right\}_A$

PPS: $\vec{F}_B + \vec{F}_C - \vec{F}_A \stackrel{100}{=} 0$

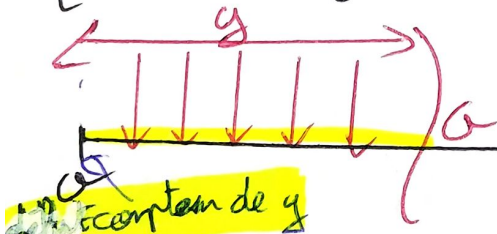
TMS: Δ/Δ en B: $-100 \cdot \frac{L}{2} + F_C L \Rightarrow F_C = 50H$
 $F_B = 50H$

charge répartie:



$\{Z_{q \rightarrow I}\}_{I=A \rightarrow 0} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -qL & 0 \end{array} \right\} \pm \Rightarrow \{Z_{q \rightarrow I}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -qL & 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -qL \end{array} \right\} \left(\frac{0}{\frac{L}{2}} \right)$
 $= \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -qL & \frac{qL^2}{8} \end{array} \right\}$
 surface modélisée au milieu longueur

$\{Z_{coh} 1/0\}_G = -\{Z_{\theta}\}_G - \{Z_q\}_G$



$\vec{OG} = y \vec{y}$

Ehermi Fiolaa

$\{Z_{\theta}\}_G = \text{transfert simple avec } \vec{OG} = y \vec{y}$

$\{Z_q\}_G = ? \quad L \Rightarrow \{Z_{q \rightarrow I}\}_G = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -qy & 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & -qy \end{array} \right\} \left(\frac{0}{y} \right)$

Traction; extension (Re)

critère de résistance:

$$|G|_{\max} = \frac{|H|_{\max}}{S_{\min}} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{S}$$

loi de déformation:

$$\vec{H} \Rightarrow G = \epsilon \cdot E \text{ (MPa)}$$

Flexion: extension (Re)

critère de résistance:

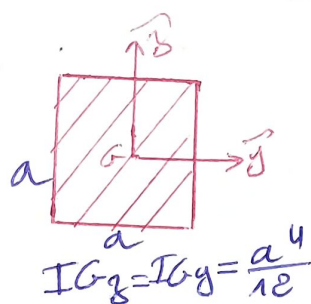
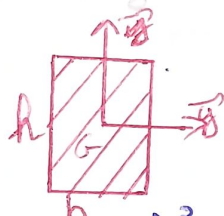
ligne moyenne // $\vec{a}$ (et) $\vec{b}$

$$|G|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{I_{Gz}} \leq R_{pe}$$

$$V = \frac{D_{ext}}{S}$$

$$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{\pi D^4}{64} \text{ ou } \left[\frac{\pi (D_{ext}^4 - D_{int}^4)}{64} \right]$$

circulaire:



$$I_{Gy} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{hb^3}{12}$$

loi de déformation:

ligne moy // $\vec{a}$:

- déformation dans le plan ($\vec{a}, \vec{b}$):



$$\Rightarrow E \cdot I_{Gy} y''(x) = M(x)$$

$\perp$ ligne moy et $\in$ plan

- dans le plan ($\vec{a}, \vec{b}$):

$$\Rightarrow E \cdot I_{Gz} z''(x) = M(x)$$

$\perp$ ligne moy et $\in$ plan
 $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{z}$

$$E \cdot I_G \cdot y''(x) = \pm M(x)$$

l'axe moy est $\perp$ au plan de flexion
Prop. vect. du comp. de plan
complément du plan

conditions au limites:

encastrement:

$$y(A) = 0, y'(A) = 0$$

appui simple (contact point):

$$y(A) = 0$$

articulation:

$$y(A) = 0$$

rotule, L. am, poutre en A:

$$y(A) = 0$$

Cisaillement: R_{pg} : glissement

critère de résistance:

$$z = \frac{|T|_{\max}}{S} \leq R_{pg} = \frac{R_s}{S} = \frac{R_e}{S \cdot s}$$

$$\text{axe moy // } \vec{a} \Rightarrow |T| = \sqrt{T_y^2 + T_z^2}$$

loi de déformation:

$$z = G \cdot \gamma$$

Torsion: R_{pg} : glissement

critère de résistance:

$$z = \frac{|M_t|_{\max}}{I_p} \leq R_{pg}$$

$$V = \frac{d}{S} \cdot I_G = \frac{\pi d^4}{32}$$

loi de déformation:

$$M_t = I_G \cdot G \cdot \theta \quad \theta \text{ rad/mm} \quad \theta \leq \theta_{\lim}$$

Forme de Torsion de cohésion:

si ligne moy // $\vec{a}$:

$$\{ \sigma_{coh} \}_G = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u/t \\ u/b_y \\ u/b_z \end{Bmatrix} G$$

$N > 0$: traction; $N < 0$: compression

T_y, T_z : cisaillement

u/t : torsion

$u/b_y, u/b_z$: flexion

1) Traction: $\vec{F} \leftarrow \boxed{} \rightarrow \vec{F}$

1) - critère de résistance:

$$\sigma_{max} = \frac{|H_{max}|}{S} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s} = G_{pe} = G_{adm} \text{ (MPa)}$$

$$G_{reelle} = k \frac{|H_{max}|}{S} \leq R_{pe}$$

2) loi de déformation:

$$G = \epsilon \cdot E \text{ (MPa)}$$

3) - calcul de l'allongement ou le raccourcissement total,

1) sur un tronçon L , de section S , pour un matériau de module de young $= E$ et H est cte sur le tronçon!

$$\Delta L = \frac{HL}{ES}$$

2) pour un ensemble de $L \neq$ et $S \neq$ et $\hat{m} E$:

$$\Delta L = \sum_i \frac{H_i L_i}{E S_i}$$

Rq1 si $H = H(x)$ variable et $S = S(x)$ (cône):

$$\Delta L = \int \frac{H(x) dx}{E \cdot S(x)}$$

Abou Fidaa

si $\Delta L > 0 \Rightarrow$ Allongement sinon compression

Diagramme de l'effort H normal:



1) cisaillement:

1) critère de résistance:

$$\tau = \frac{|T_{max}|}{S} \leq R_{pg} = \frac{R_g}{s \cdot s'} = \frac{R_e}{s \cdot s'} = \tau_{pe} = \tau_{adm}$$

$$|T_{max}| = \sqrt{T_y^2 + T_z^2}$$

2) loi de déformation:

$$\tau = G \cdot \gamma$$



R_e = limite élastique
 R_{pe} = Résistance pratique à l'extension

E = module de young = pente élastique longitudinale

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: module de coulomb
 (poisson)

R_g : limite au glissement

R_{pg} : Résistance pratique au glissement

$$R_{pg} = \frac{R_g}{s} = \frac{R_e}{s \cdot s'}$$

