

3) Universalité de NAND et NOR:

Fonction	Équivalent NAND	Équivalent NOR
Non		
Ou		
Et		

1) Algèbre de Boole:

$x + y = y + x$ $x + (y + z) = (x + y) + z$ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x \cdot y = y \cdot x$ $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
$x + 0 = x$ $x + \bar{x} = 1$ $x + x = x$ $x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$ $x \cdot \bar{x} = 0$ $x \cdot x = x$ $x \cdot 1 = x$
$x + (\bar{x} \cdot y) = x + y$ $x + (\bar{x} \cdot \bar{y}) = x + \bar{y}$ $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$x \cdot (x + y) = x$ $x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$ $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$

IV/ Simplification des fonctions algébriques:

1) Méthode Algébrique:

$$\begin{aligned}
 S &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + ABC \\
 &= \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + (ABC + ABC) \\
 &= \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) + A\bar{B}(\bar{C} + C) + BC(\bar{A} + A) \\
 &= \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + BC
 \end{aligned}$$

2) Méthode géométrique (Table de Karnaugh):

AB \ C	0	1
00	0	0
01	0	1
10	1	1
11	0	1

↔

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

* Chaque ligne $\equiv$ case du table de Karnaugh.

* n variable $\leftrightarrow 2^n$ cases du table

* Remplir la table: on utilise le BR pour les variables

→ Pour la sortie S:

- On cherche les plus grands anneaux possibles.
 - On élimine la variable qui change de valeur dans le carré choisi.
 - On fait la somme, si on a 3 anneaux, on a $3 \cdot 1 = 1$.
- n anneaux; $n \cdot 1 = 1$

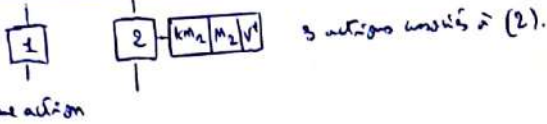
② Grapheur

I / Règles de base :

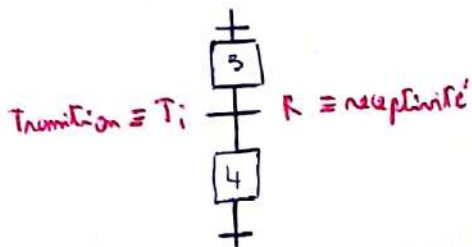
① Etapes :



② Actions associées aux étapes :

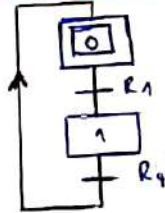


③ Transition : La condition de passage d'une action à une



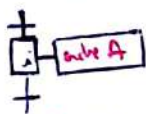
→ A chaque transition, on associe une condition logique appelée **réceptivité**

④ Liaison orientée : des traits reliés, qui relient les transitions et les étapes.



II / Classification des actions :

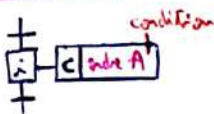
① Action continue :



* L'action A est émise de façon continue à l'étape X_i

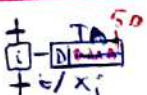
② Action conditionnelle :

• Type C :

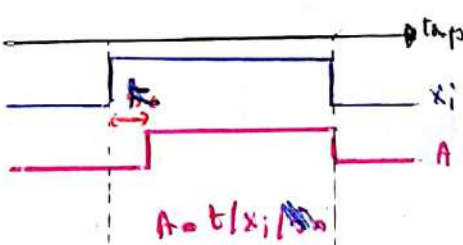
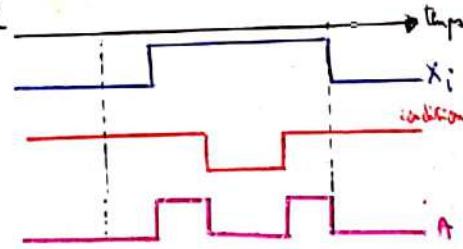
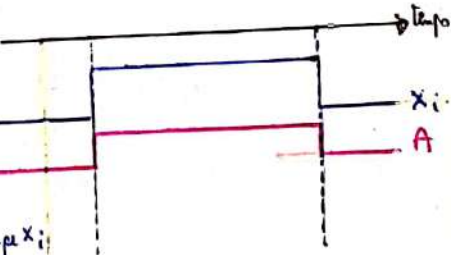


* L'action A est émise au la condition est vraie.

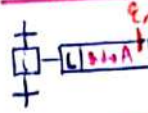
• Type D :



* L'action $A = t/X_i$, s'active après X_i



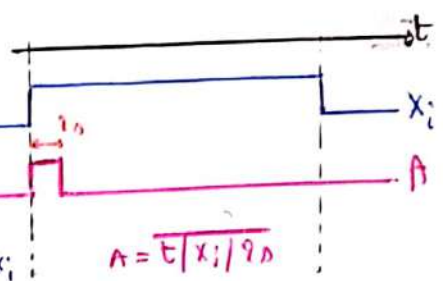
• Type L : ($L = D$)



L'action $A = t/X_i$, et

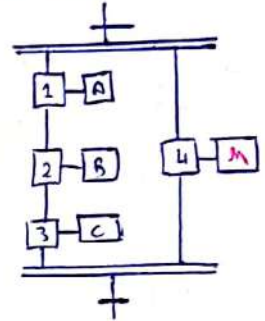
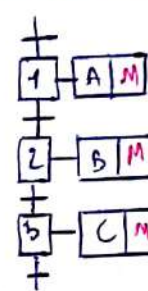
limité par t_{on} qui l'active de X_i

$$A = t/X_i / t_{\text{on}}$$



* Ces actions conditionnelles, ont des conditions logiques (C-D-L) qui ont des réceptivités R

III / Action minimale simplifiée (étape :



IV / Règles d'insulation de Grapheur :

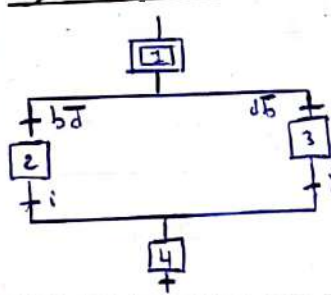
① Condition initiale : A l'instant initial, seuls les étapes initiales sont actives.

② Franchissement d'une transition :

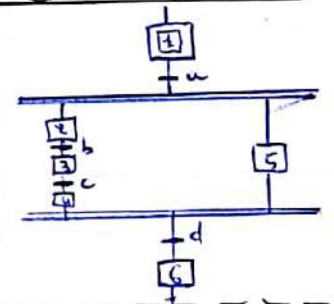
- L'étape d'avant validée.
 - Réceptivité R est vraie
- Transition.

V / Structures de base :

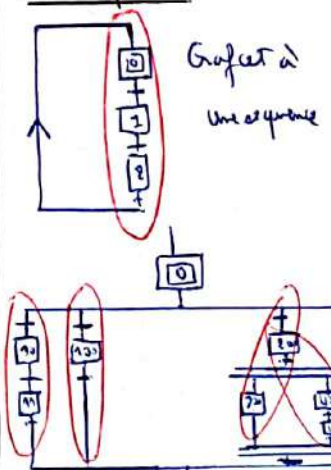
① Divergence en "ou" :



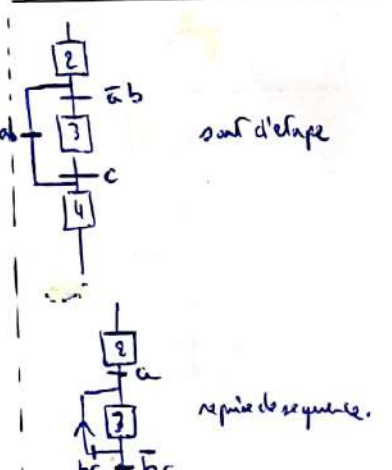
② Parallélisme "et" :



③ Séquence :

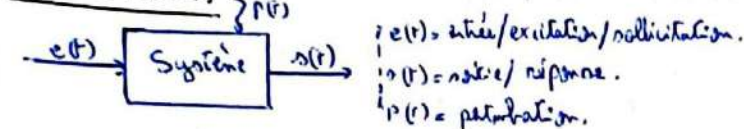


④ Saut d'étape - reprise de séquence :



I/ Modélisation des systèmes dynamiques

Vocabulaire:



Signaux Canoniques:

Impulsion: $S(t) : t \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ +\infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$: réponse impulsionnelle

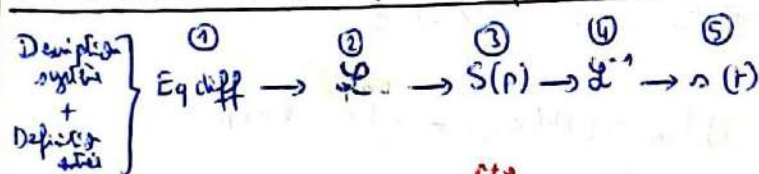
Echelon: $au(t) : t \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$: réponse indicielle

Rampe: $a(t) = K \cdot t \cdot u(t)$: réponse à rampe

Signal sinusoïdal: $e(t) = E \sin(\omega t + \varphi) \cdot u(t)$: réponse sinusoïdale

Réponse retardée de T: $u(t - T)$

Ordre de résolution de l'équation différentielle:



Transformée de Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$

Propriétés de Laplace:

① $\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$

② $\mathcal{L}\{f(t - T)\} = e^{-pT} \cdot F(p)$

③ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = p^n \cdot F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots$

④ $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} F(p)$

⑤ $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$

⑥ $\frac{dF(p)}{dp} = \mathcal{L}\{-t f(t)\}$

⑦ $\int_p^{+\infty} F(q) dq = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

⑧ $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) \end{cases}$

• Laplace des signaux:

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$

$u \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p}$

$K \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{K}{p}$

• Définition $S(p)$:

On écrit $S(p)$ sous forme de fraction rationnelle
 On applique $\mathcal{L}^{-1}$.

• Remarque:

Pour un signal périodique: on cherche $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(p)$; le premier signal entre $[0, T]$, puis $\mathcal{L}\{e(t)\} = F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-Tp}}$

II/ Analyse Temporelle:

• 1^{er} ordre:

Eq diff: $\varepsilon \frac{dy}{dt} + y(t) = K \cdot e(t)$ $\begin{cases} \varepsilon = \text{délai temp (s)} \\ K = \text{gain stat (..)} \end{cases}$

• Fonction Transfert: $\frac{K}{1 + \varepsilon p}$

Réponse impulsionnelle	Réponse indicielle
$s(t) = \frac{K}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon}$	$s(t) = K E_0 (1 - e^{-t/\varepsilon})$
$s(0) = \frac{K}{\varepsilon}$ et $s(+\infty) = 0$	$s(0) = 0$ et $s(+\infty) = K E_0$

• Temps de réponse 5%: $s(T_R(5\%)) = 0,95 s(+\infty) \rightarrow T_R(5\%) = 3\varepsilon$

• 2nd ordre:

Eq diff: $\frac{dy}{dt} + 2 \cdot \omega_n \cdot y + \omega_n^2 \cdot y(t) = K \cdot u(t)$ $\begin{cases} \omega_n = \text{fréq. d'oscillation} \\ \zeta = \text{coefficient d'amortissement} \end{cases}$

• Fonction Transfert: $\frac{K}{1 + 2 \zeta \frac{\omega_n}{p} + \frac{\omega_n^2}{p^2}}$ (Ec)

Aperiodique $m \gg 1$	Pseudo-périodique $m < 1$
de (Ec): $\begin{cases} p_1 = -\omega_n \cdot \zeta + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{\omega_n}{\varepsilon_1} \\ p_2 = -\omega_n \cdot \zeta - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{\omega_n}{\varepsilon_2} \end{cases}$	de (Ec): $\begin{cases} p_1 = -\omega_n \cdot \zeta + j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ p_2 = -\omega_n \cdot \zeta - j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases}$
Temps d'inertie $\tau_i = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$	
	$T_{pi} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$
$T_R(5\%) = 6,5 \frac{m}{\omega_n}$	$T_m = \text{Temps de volée à } 0,95 K E_0$
Critique $m = 1$	$T_R(5\%) = \text{Temps pour lequel } s(t) \text{ est à l'intérieur de } \pm 5\% \text{ de } K E_0$
de (Ec): $p = -\omega_n$	$D\% = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \zeta^2} \cdot 100$

III / Analyse Fréquentielle

1) Définitions:

- $G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$
- $G_{dB}(\omega) = 20 \log |G(j\omega)|$
- $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{si } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(\omega=0) - 3 \text{ dB}$

• Lien de Bode: $\begin{cases} G_{dB}(\omega) = f(\omega) & \text{échelle logarithmique} \\ \varphi(\omega) = f(\omega) & \text{échelle logarithmique} \end{cases}$

• Lien de Nyquist: $\text{Im}(G(j\omega)) = f(\text{Re}(G(j\omega)))$

• Lien de Bode: $G_{dB}(\omega) = f(\varphi(\omega))$

2) Systèmes usuels:

Action Proportionnelle	Intégrateur
$G(j\omega) = K$	$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$
$\rightarrow G_{dB}(\omega) = 20 \log(K)$	$\rightarrow G_{dB}(\omega) = -20 \log(\frac{\omega}{\omega_0})$
$\rightarrow \begin{cases} \varphi(\omega) = 0 & \text{si } K > 0 \\ \varphi(\omega) = -180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases}$	$\rightarrow \varphi(\omega) = -90^\circ$

3) Système 1^{er} ordre:

$$\textcircled{1} G(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$$

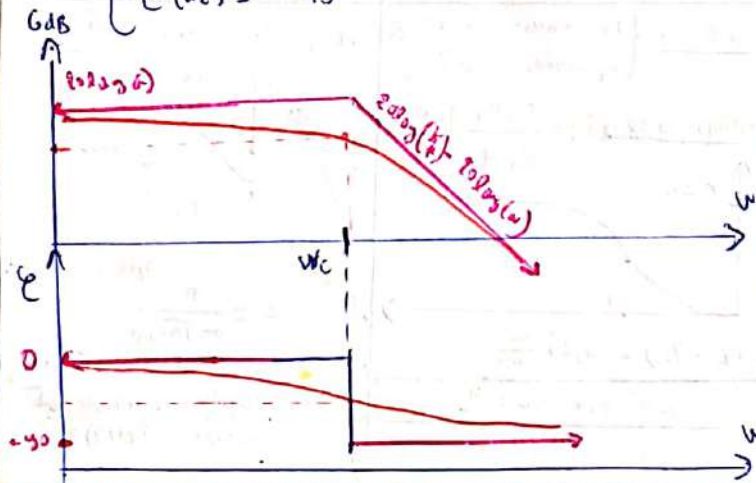
$$\rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}) \\ \varphi(\omega) = \arg(K) - \arg(1 + j\tau\omega) \end{cases}$$

② Asymptotes pour G_{dB} :

$$\begin{cases} \text{BF: } \omega \rightarrow 0: 20 \log(K) \\ \text{HF: } \omega \rightarrow \infty: 20 \log(\frac{K}{\tau}) - 20 \log(\omega) \end{cases} \begin{cases} \text{BF: } 0 \\ \text{HF: } -90^\circ \end{cases}$$

③ Période de coupure: $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$\rightarrow \begin{cases} G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(K) - 3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_c) = -45^\circ \end{cases}$$



ii) Systèmes 2nd ordre:

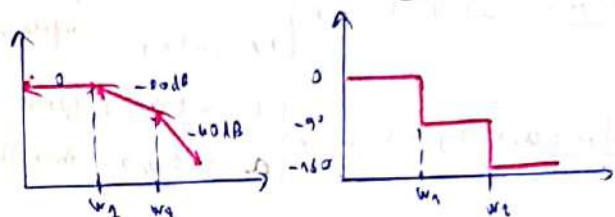
$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Pour $m > 1$: ($\omega_n \neq \omega_0$)

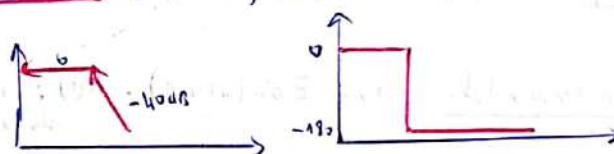
$$G(j\omega) = \frac{\sqrt{K}}{1 + \tau_1 j\omega} \cdot \frac{\sqrt{K}}{1 + \tau_2 j\omega} = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

$\rightarrow G(j\omega)$ est le produit de 2 systèmes 1^{er} ordre

$\rightarrow$ On étudie chacun d'eux puis on fait la somme.



Pour $m = 1$: ($\omega_n = \omega_0$)



IV Remarques:

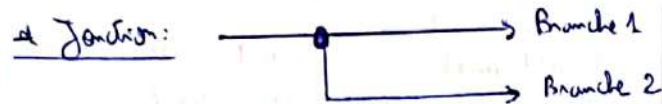
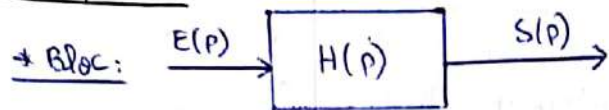
① En temps: $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$

② $T_m = t(90^\circ / K\epsilon_0) - t(17^\circ / K\epsilon_0)$

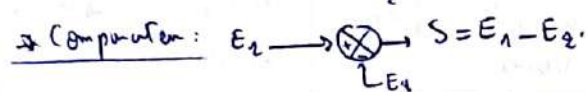
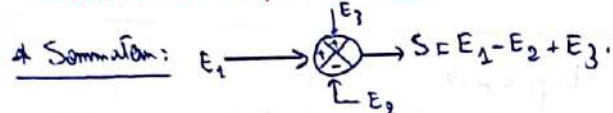
④ Synthèse des commandes et des performances

I / Schéma fonctionnel:

① Définitions:



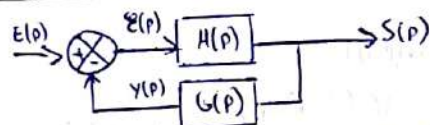
→ les branches ont pas n° variable.



② Principe:

- ① Écrire les équations de chaque élément du système.
- ② Appliquer Laplace, calculer $H(p)$
- ③ Caser les blocs.

③ FTBO - FTBF - E_c :



FTBO(p) = $H(p) \cdot G(p)$ → Fonction transfert boucle ouverte.

FTBF(p) = $\frac{H(p)}{1 + H(p) \cdot G(p)}$ → Fonction transfert boucle fermée.

$E_c(p) = 1 + H(p) \cdot G(p)$ → Eq caractéristique

• Retour unitaire: $G(p) = 1$:

FTBO(p) = $H(p)$

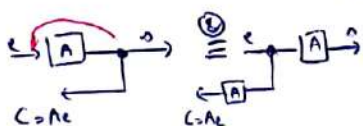
FTBF(p) = $\frac{H(p)}{1 + H(p)}$

$E_c(p) = 1 + H(p)$

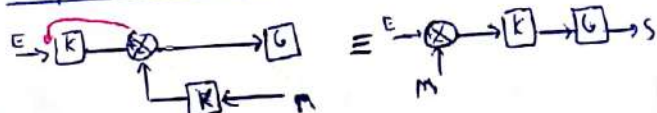
④ Manipulation du schéma fonctionnel:

• Produit: $\rightarrow [K] \rightarrow [F] \rightarrow [G] \equiv \rightarrow [KFG] \rightarrow$

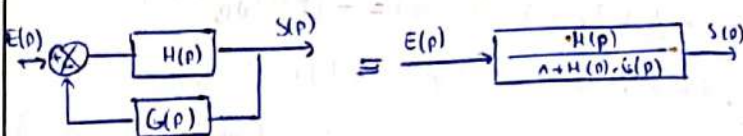
• Déplacement Jonction:



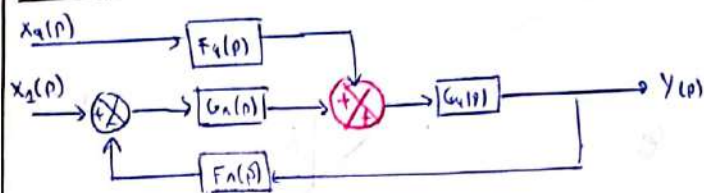
• Déplacement de sommation:



⑤ Fonction de Blocs:

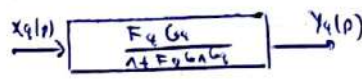


⑥ Superposition:



$$X_2(p) = 0$$

$$X_1(p) = 0$$



$$Y_1(p) = H_1(p) \cdot X_1(p)$$

$$Y_2(p) = H_2(p) \cdot X_2(p)$$

$$Y(p) = H_1(p) \cdot X_1(p) + H_2(p) \cdot X_2(p)$$

II / Stabilité et précision:

① Stabilité:

② Définition:

$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow c = \alpha + i\beta$ pôle de $H(p)$

- $\alpha > 0 \rightarrow$ sys instable
- $\alpha < 0 \rightarrow$ sys stable
- $\alpha = 0 \rightarrow$ limite de stabilité

③ Critères de Routh - Hurwitz: ($H(p) = FTBF(p)$)

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad ; \quad D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$$

1^{er} examen: $\left\{ \begin{array}{l} \text{signe de } a_i \text{ n'est pas le même} \\ \text{ou} \\ \exists a_i = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ sys instable

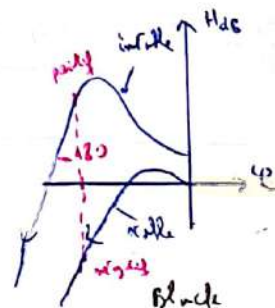
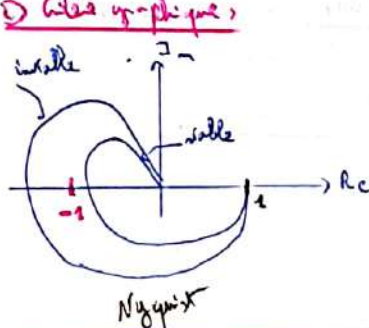
2^{ème} examen:

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	A_1	A_2		
$\vdots$				
p^0	B_1			

$$A_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

→ les tous de la 1^{ère} colonne $> 0 \rightarrow$ sys stable

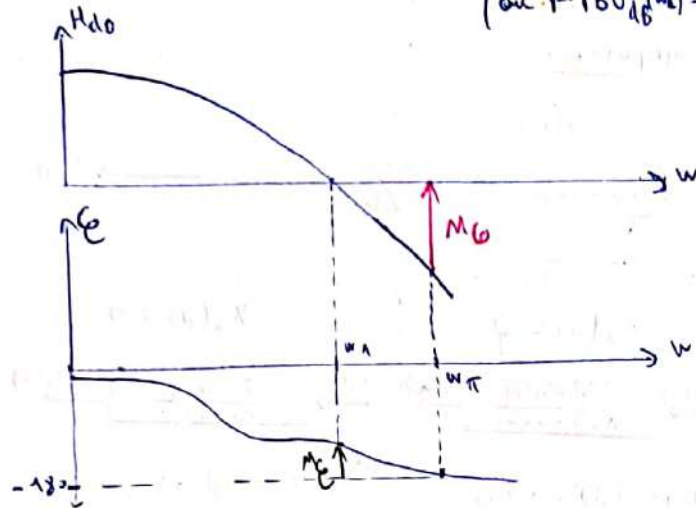
④ Critère graphique:



1) Marges de stabilité: ($H(p) = FTBO(p)$)

• Marge de gain: $M_G(dB) = -FTBO_{dB}(\omega_\pi)$

• Marge de phase: $M_\varphi = 180 + \varphi(\omega_\pi)$
(où $FTBO_{dB}(\omega_\pi) = 0$)



2) Précision: ($H(p) = FTBO(p)$)

* Précision: $\lim_{t \rightarrow \infty} e_o(t) = \lim_{p \rightarrow 0} E_s(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p(E(p) - S(p))$

* Signaux à résonner unitaire: $E_o(p) = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$

a) Influence de l'entrée:

* échelon $\rightarrow$ erreur de position Σ_p
* rampe $\rightarrow$ erreur de vitesse Σ_v
* parabol $\rightarrow$ erreur d'accélération Σ_a

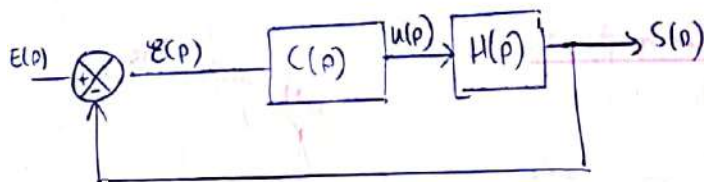
b) Influence de FTBO:

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^d} \cdot \frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_n p^n} \quad ; m \geq n$$

Précision	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Σ_p	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Σ_v	∞	$\frac{E_0}{K}$	0
Σ_a	∞	∞	$\frac{E_0}{K}$

III/ Correction des systèmes:

1. Correction à action proportionnelle



C(p)	Norm	Effets
K_p	Proportionnel (P)	(+) Précision (+) Rapidité (-) Stabilité
$K(1 + \frac{1}{T_i p})$	Proportionnel Intégral (PI)	(+) Précision (+) Rapidité (+) Stabilité
$K(1 + T_d p)$	Proportionnel Dérivé (PD)	(+) Rapidité (+) Stabilité (+) Précision
$K(1 + T_d p + \frac{1}{T_i p})$ $T \neq T$	Proportionnel Intégral Dérivé (PID)	(+) Précision (+) Rapidité (+) Stabilité $\rightarrow$ en BF

• Stabilité $\rightarrow M_\varphi$ et M_G

• Rapidité $\rightarrow T_R$

• Précision $\rightarrow \Sigma_e$

II/ Remarques:

1. Correction: a) prole (PD):

$$K(1 + T_d p) \leftrightarrow \frac{K(1 + d T_d p)}{1 + d T_d p} \quad \text{avec } d < 1$$

b) prole (PID):

$$* \text{PID en série: } C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) (1 + T_d p)$$

$$* \text{PID en ||: } C(p) = K_p + \frac{1}{T_i p} + T_d p$$

$$* \text{PID mixte: } C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$$

2. Asservissement: La consigne varie le temps.

Régulation: La consigne est de.