

I) Géométrie des masses.

Rappel:



$$L = 2\pi R$$

$$S = \pi R^2$$



$$S = 2\pi R h$$

$$V = \pi R^2 h$$



$$S = 4\pi R^2$$

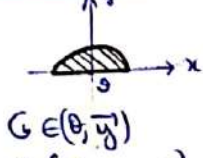
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

II) Centre d'inertie:

1) Eléments de symétrie géométrique:

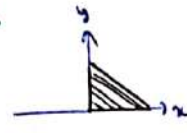


$$G = G$$



$$G \in (O, \vec{y})$$

$$G(0, y, 0)$$



$$G \in (O, \vec{z}, \vec{y})$$

$$G(x, y, z)$$

G = centre de symétrie

G ∈ axe de symétrie

G ∈ plan de symétrie

2) Détermination de centre d'inertie:

a) Solide simple:

$$m \overrightarrow{OG} = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

$$m = \lambda L \text{ (linéique)}$$

$$m = \delta S \text{ (surfauque)}$$

$$m = \rho V \text{ (volume)}$$

* Théorème de Guldin:

$$S_{\text{env}} = L_{\text{carré}} \cdot 2\pi x_G \text{ (si c'est rotation (O, } \vec{y}))$$

$$V_{\text{env}} = S \cdot 2\pi x_G \text{ (si c'est rotation (O, } \vec{y}))$$

Il est appliqué sur les contes plans, surfauques plans, axes qui appartiennent au même plan, car on ne traverse pas l'axe.

b) Solide composé:

$$E = \{S_1, S_2\}$$

$$S_1(\overrightarrow{OG_1}, m_1)$$

$$S_2(\overrightarrow{OG_2}, m_2)$$

$$m_E = m_1 \pm m_2$$

$$\Rightarrow m_E \cdot \overrightarrow{OG_E} = m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2}$$

II) Matrice d'inertie:

1) Moment d'inertie par rapport à l'axe:

$$* (O, \vec{x}) : A = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm$$

$$* (O, \vec{y}) : B = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm$$

$$* (O, \vec{z}) : C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

2) Produit d'inertie par rapport à des axes:

$$* (O, \vec{y}) \text{ et } (O, \vec{z}) : D = \int_{(S)} yz \cdot dm$$

$$* (O, \vec{x}) \text{ et } (O, \vec{z}) : E = \int_{(S)} xz \cdot dm$$

$$* (O, \vec{x}) \text{ et } (O, \vec{y}) : F = \int_{(S)} xy \cdot dm$$

3) Matrice d'inertie:

* La matrice d'inertie au point O, dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

4) Symétrie matérielle:

a) Plans de symétrie:

$$* (O, \vec{x}, \vec{y}) \text{ plan de symétrie} \rightarrow F \neq 0 \rightarrow E = D = 0$$

$$* (O, \vec{x}, \vec{z}) \text{ plan de symétrie} \rightarrow E \neq 0 \rightarrow F = D = 0$$

$$* (O, \vec{y}, \vec{z}) \text{ plan de symétrie} \rightarrow D \neq 0 \rightarrow E = F = 0$$

$$* 2 \text{ plans de symétrie} \rightarrow E = F = D = 0$$

b) Axe de révolution:



cylindre

cône

disque

(carré)

sphère

surfaces ayant axe de révolution

$$* (O, \vec{x}) \text{ axe de symétrie de révolution} \rightarrow A \rightarrow B = C$$

$$* (O, \vec{y}) \text{ axe de symétrie de révolution} \rightarrow B \rightarrow A = C$$

$$* (O, \vec{z}) \text{ axe de symétrie de révolution} \rightarrow C \rightarrow A = B$$

$$* 2 \text{ axes de symétrie de révolution} \rightarrow A = B = C$$

5) Théorème de Huygens:

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix} \text{ et } I_G(S) = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}$$

$$A_G = A_G + (y_G + z_G)^2 \cdot m$$

$$B_G = B_G + (x_G + z_G)^2 \cdot m$$

$$C_G = C_G + (x_G + y_G)^2 \cdot m$$

$$D_G = D_G + y_G z_G \cdot m$$

$$E_G = E_G + x_G z_G \cdot m$$

$$F_G = F_G + x_G y_G \cdot m$$

Cinématique et Cinétique

I Cinématique:

1 Tenseur cinématique:

$$\left\{ \mathcal{C}(S/R) \right\}_M = \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}(S/R) \\ \vec{v}(M \in S/R) \end{matrix} \right\}_M^R$$

$\vec{\omega}(S/R)$ = résultante cinématique (vitesses de rotation)

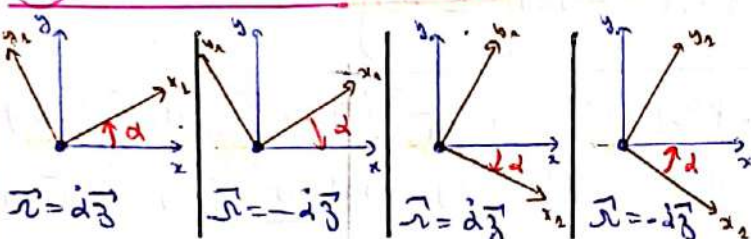
$\vec{v}(M \in S/R)$ = moment cinématique (vitesses de mouvement)

2 Relation de transfert du moment cinématique:

$$\vec{v}(B \in S/R) = \vec{v}(A \in S/R) + \vec{\omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

3 Détermination des composantes du tenseur cinématique:

a) Vitesses de rotation: $\vec{\omega}(S/R)$:



b) Vitesses de mouvement: $\vec{v}(M \in S/R)$:

Méthode 1: Méthode de dérivation:

* Si $\theta \in \mathbb{R}$: * Si $\theta \in \mathbb{R}_1$:

$$\vec{v}(M \in S/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_R \quad \vec{v}(M \in S_1/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}$$

Méthode 2: Méthode du champ de vecteurs:

$$\vec{v}(B \in S/R) = \vec{v}(A \in S/R) + \vec{\omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Méthode 3: Méthode de composition de mouvement:

$$\vec{v}(M \in S_1/S_3) = \vec{v}(M \in S_1/S_2) + \vec{v}(M \in S_2/S_3)$$

1) Notations générales:

* Invariant scalaire: $I = \vec{\omega}(S/R) \cdot \vec{v}(M \in S/R)$

* Moment central: $\vec{v}(M \in S/R) \wedge \vec{\omega}(S/R) = \vec{0}$

* Loi d'additivité: $\vec{0}\vec{0} = \vec{0}\vec{A} + \vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{0} = \vec{0}$

II Cinétique:

1 Tenseur cinétique:

$$\left\{ \mathcal{C}(S/R) \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{\text{cine}}(S/R) \\ \vec{\sigma}_A(S/R) \end{matrix} \right\}_A^R$$

$\vec{R}_{\text{cine}}(S/R)$ = résultante cinétique

$\vec{\sigma}_A(S/R)$ = moment cinétique.

2 Relation de transfert du moment cinétique:

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{R}_{\text{cine}}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

3 Détermination des composantes du tenseur cinétique:

a) Résultante cinétique: $\vec{R}_{\text{cine}}(S/R)$

$$\vec{R}_{\text{cine}}(S/R) = m \cdot \vec{v}(G \in S/R)$$

b) Moment cinétique: $\vec{\sigma}_A(S/R)$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}(A \in S/R) + [I_A(S)] \cdot \vec{\omega}(S/R)$$

III Energie cinétique:

1 Expressions:

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{C}(S/R) \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{C}(S/R) \right\}_A$$

* Solide composé: $E = \{S_1, S_2\}$

$$\Rightarrow E_C(E/R) = E_C(S_1/R) + E_C(S_2/R)$$

2 Cas particuliers:

① Masse nulle $\rightarrow m = 0 \rightarrow E_C = 0$

② A point fixe $\rightarrow \vec{v}(A \in S/R) = \vec{0} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot [I_A(S)]$

③ Mvt de translation $\rightarrow \vec{\omega}(S/R) = \vec{0} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \cdot V_G^2$

④ Mouvement en k $\rightarrow \vec{\sigma}_k(S/R) = \vec{0} \rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \cdot V_k^2$

⑤ $A = G \rightarrow E_C = \frac{1}{2} (m V_G^2 + \omega^2 \cdot [I_G(S)])$

IV Probabilités:

$$P(S_1 \rightarrow S_2/R) = \left\{ \mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{C}(S_2/S_1) \right\}_A$$

$$P(E \rightarrow E/R) = P(E \rightarrow S_1/R) + \dots + P(E \rightarrow S_n/R)$$

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \left\{ \mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{C}(S_2/S_1) \right\}_A = 0: \text{prob. 0}$$

$$\frac{dE_C}{dt}(E/R) = P(E \rightarrow E/R) + P_{\text{ext}} \quad \left(\begin{matrix} \text{P ext} = 0 \\ \text{si isolé} \end{matrix} \right) \quad \text{si isolé}$$

③ Statique et Dynamique.

I) Statique:

1) Tenseur statique: (des actions mécaniques)

$$\left\{ \mathcal{E}(S_2 \rightarrow S_1) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) \\ \vec{M}_A(S_2 \rightarrow S_1) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{11} & L_{21} \\ y_{11} & M_{11} \\ z_{11} & N_{21} \end{array} \right\}_A^R$$

$\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$: résultante d'action mécanique de S_2 sur S_1 .

$\vec{M}_A(S_2 \rightarrow S_1)$: moment d'action mécanique de S_2 sur S_1 .

2) Relation de transfert du moment d'action mécanique:

$$\vec{M}_B(S_2 \rightarrow S_1) = \vec{M}_A(S_2 \rightarrow S_1) + \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) \wedge \vec{AB}$$

3) Définition des composantes du tenseur statique:

a) Résultante d'action mécanique: $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$:

* Poids: $\vec{R} = m\vec{g}$.

* Charge ponctuelle: $\vec{R} = \int_{M \in D} \vec{F}_M \cdot dD$ avec $dD = dl/ds$.

b) Moment d'action mécanique: $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) = \vec{F}_B = (F, F)$

$$\vec{M}_A(S_2 \rightarrow S_1) = \vec{AB} \wedge \vec{R}(S_2 \rightarrow S_1) = \vec{AB} \wedge \vec{F}_B$$

4) Tenseurs d'action particuliers:

a) Liaison parfaite:

$$\left\{ \mathcal{V}(S_1/R) \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{11} & y_{11} \\ y_{11} & z_{11} \\ z_{11} & z_{11} \end{array} \right\} ; \begin{array}{l} x \wedge z \neq 0 \rightarrow R=0 \\ x \vee z \neq 0 \rightarrow R=0 \end{array}$$

$$\left\{ \mathcal{E}(S_1 \rightarrow S_2) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} x_{11} & L_{21} \\ y_{11} & M_{11} \\ z_{11} & N_{21} \end{array} \right\}_A^R$$

b) Action de la pesanteur:

$$\left\{ \mathcal{E}(S_2 \rightarrow S_1) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{g} \\ \vec{AC} \wedge m\vec{g} \end{array} \right\}_A^R$$

c) Action d'une charge répartie sur (D):

$$\left\{ \mathcal{E}(S_2 \rightarrow S_1) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \int_{M \in D} \vec{F}_M \cdot dD \\ \int_{M \in D} \vec{AM} \wedge \vec{F}_M \cdot dD \end{array} \right\}_A^R$$

II) Problème plan:

$$\text{Plon}(\theta, \vec{r}, \vec{g}) \begin{cases} \text{plan}(\vec{r}, \vec{g}) \rightarrow R_x = R_y = 0 \quad (L=M=0) \\ \text{non plan} \rightarrow R_z = 0 \quad (Z=0) \end{cases}$$

6) Extension d'un système matériel:

$\bar{E}$ = Tous ce qui est extérieur de E , capable d'exercer des AM

$$\{\bar{E}\} = \{ \dots \}$$

$$\left\{ \mathcal{E}(\bar{E} \rightarrow E) \right\}_A = \sum_i \left\{ \mathcal{E}(i \rightarrow E) \right\}_A$$

7) Principe fondamental de Statique et Dynamique:

$$\left\{ \mathcal{E}(\bar{E} \rightarrow E) \right\}_A = \{0\} \Rightarrow \text{système équilibré.} \quad \text{si } R_g$$

$$\text{TRS: } \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \quad \text{TRD: } \vec{R}_{dy}(S/R) = \vec{R}(\bar{S} \rightarrow S)$$

$$\text{TMS: } \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \quad \text{TMD: } \vec{S}_A(S/R) = \vec{M}_A(\bar{S} \rightarrow S)$$

8) Loi de Coulomb:

$$\vec{V}(A \in D/O) = \vec{0}$$

$$\|\vec{T}(O \rightarrow 1)\| \ll \|\vec{N}(O \rightarrow 1)\| \Rightarrow \text{cas d'adhérence.}$$

$$\vec{V}(A \in D/O) \neq \vec{0}$$

$$\text{Discussion: } \vec{T} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ m direction

Sens: $\vec{T}, \vec{V} < 0$.

$\Rightarrow$ sens opposés

$$\text{Valeur: } \|\vec{T}\| = -f \|\vec{N}\|$$

* les composantes normales sont déterminées à partir du tenseur des liaisons parfaites:

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ y_{01} & 0 \\ z_{01} & 0 \end{array} \right\} : \vec{N}(O \rightarrow 1) = y_{01}\vec{y} + z_{01}\vec{z}$$

$$\text{Avec ph plan: } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{N}(O \rightarrow 1) = y_{01}\vec{y}$$

* Loi de Coulomb: Si L_{02} admet porteur parfait:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} \pm f y_{01} & 0 \\ y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$$

II) Dynamique:

$$\left\{ \mathcal{D}(S/R) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_{dy}(S/R) = \frac{d}{dt}(R_{ur}(S/R)) \\ \vec{S}_A(S/R) = \frac{d}{dt} \vec{G}_A(S/R) + m\vec{V} \wedge \vec{r}_{AS} \wedge \vec{V}(G(S/R)) \end{array} \right\}_A^R$$