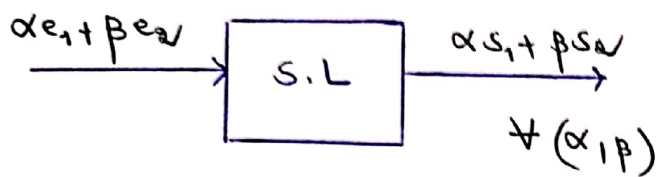


systemes lineaires continus invariants :

* linearite mathematique :
un systeme est lineaire au sens mathematique si :



* Invariance temporelle :



un systeme lineaire est invariant si $s_1 = s_2$: c'ad : ses parametres ne varient pas en fct du temps.

* Theoreme :

un S.L.C.I est caracterisee par une eq diff lineaire sous la forme :

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot s^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j \cdot e^{(j)}$$

a_i, b_j : des stes

n : ordre du systeme

! : $m \leq n$: la sortie doit suivre l'entree.

* on associe a l'eq diff une eq caracteristique :

(E.C) : $\sum_{i=0}^n a_i \lambda^i = 0$

(E.C) admet au total n racines

$\lambda_k = \alpha_k + j \beta_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$

! : un systeme lineaire est stable si : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$\alpha_k < 0$

* Gain statique $\Rightarrow$ regime permanent ($t \rightarrow \infty$)

$G_s = \frac{s(\infty)}{e(\infty)}$

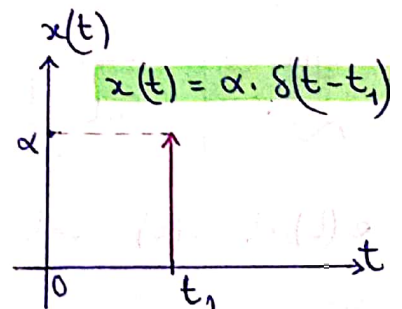
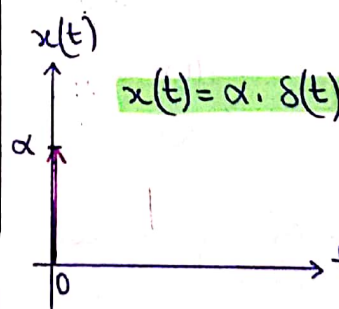
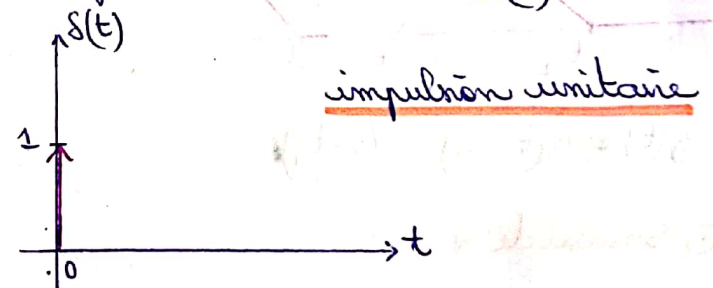
* toutes les derivees s'annulent :

eq diff : $a_0 s(\infty) = b_0 \cdot e(\infty)$

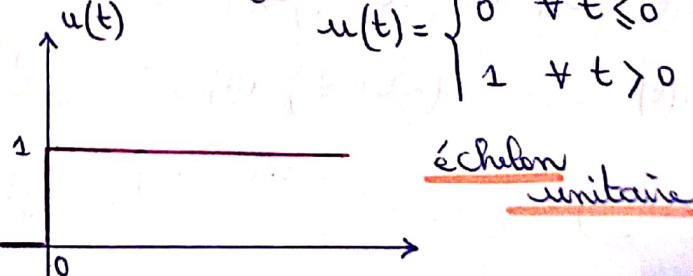
$\Rightarrow$ $G_s = \frac{b_0}{a_0}$

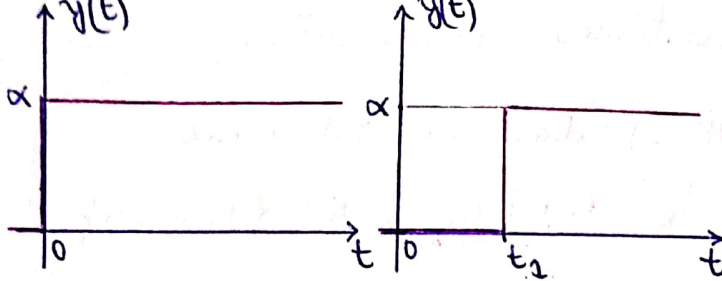
* Signaux canoniques : (tests)

o Impulsion de Dirac = $\delta(t)$



o Echelon = $u(t)$



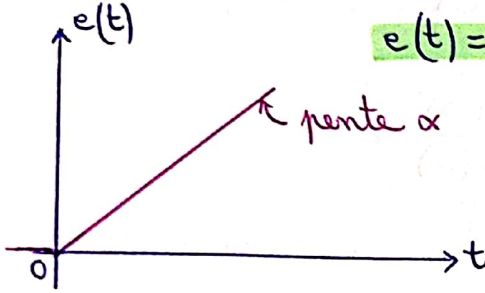


$$y(t) = \alpha \cdot u(t)$$

$$y(t) = \alpha \cdot u(t - t_1)$$

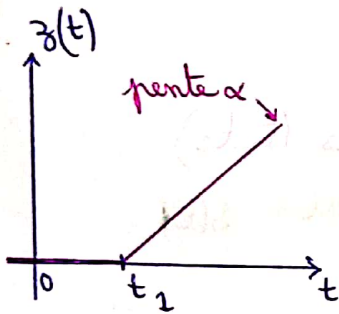
⚠: Echelon = primitive de impulsion
Rampe = primitive de Echelon

⊙ Rampe =

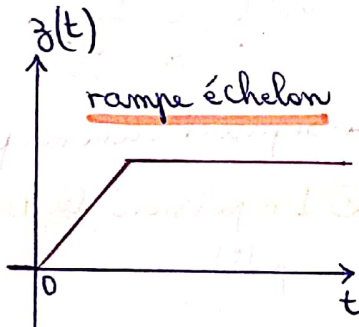


$$e(t) = \alpha \cdot t \cdot u(t)$$

si $\alpha = 1$: rampe unitaire. $e(t) = t \cdot u(t)$

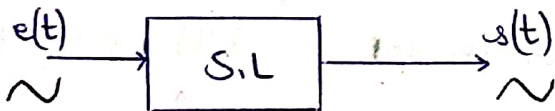


$$z(t) = \alpha(t - t_1) \cdot u(t - t_1)$$



rampe échelon

⊙ Sinusoïde =



$e(t)$ et $s(t)$ sont de même pulsation
avec: $\omega \geq 0$

$$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_e) \cdot u(t) \rightarrow E = E_m \cdot e^{j\varphi_e}$$

$$s(t) = S_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_s) \cdot u(t) \rightarrow S = S_m \cdot e^{j\varphi_s}$$

$$H(j\omega) = \frac{S}{E} = \frac{S_m}{E_m} \cdot e^{j(\varphi_s - \varphi_e)} = a + jb$$

Gain complexe

$$|H(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (module)}$$

$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e \Rightarrow \varphi = \arctg(b/a) \text{ (phase)}$$

(in $a \geq 0$)

Transformée de Laplace :

* Définitions :

$f(t)$: fct continue définie pour $t > 0$
 et : $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \cdot f(t)$ est fini.

alors :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt$$

transformée de Laplace

$$F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$$

on note :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

* Propriétés :

○ linéarité :

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^n f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n F_i(p)$$

○ Dérivation :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p \cdot F(p) - \underbrace{f(0)}_{\text{valeur initiale de } f(t)}$$



$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$$

pour le cas général : (et $f(0) = f'(0) = \dots = 0$)
 les CI sont nuls

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot F(p)$$

○ Intégration :

$$\mathcal{L}\left[\int f\right] = \frac{F(p)}{p}$$



$$\mathcal{L}[t^n \cdot u(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

○ Retard :

$$\mathcal{L}[f(t-c)] = e^{-cp} \cdot F(p)$$

○ Décalage fréquentiel :

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = F(p+a)$$

○ Changement de l'échelle du temps :

$$\mathcal{L}[f(t/a)] = a \cdot F(ap)$$

$$\mathcal{L}[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n \cdot \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

$\rightarrow$ si n pair = 1
 $\rightarrow$ si n impair = -1

○ T.L des fcts périodiques :

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

la période T .

19/

* Th de la valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$$

* Th de la valeur finale :

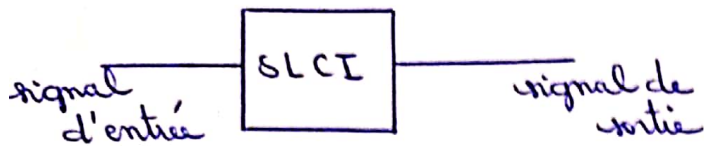
$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

* Méthode des dérivées successives :

$\Rightarrow$ Effectuer des dérivations successives jusqu'à on obtient une fct qui ne dépend que des impulsions
 $\Rightarrow$ la dérivée d'une discontinuité est représentée par une impulsion.

Fonction de transfert = (F.T)

* Expression de F.T :



SLCI est caractérisé par :

$$\sum_{i=0}^n a_i s^{(i)} = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}$$

et (avec CI=0)

$$\left[\sum_{i=0}^n a_i p^i \right] S(p) = \left[\sum_{j=0}^m b_j p^j \right] E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \text{fonction de transfert (CI=0)}$$

$$H(p) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

(transmittance opérationnelle)
fraction rationnelle irréductible

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

pour $N(p)$: m racines : $\rightarrow$ zéros

pour $D(p)$: n racines : $\rightarrow$ pôles

* des propriétés de F.T :

○ **ordre** = le degré le plus élevé de $D(p)$ ordre de F.T

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

○ **la classe** = le plus petit degré de $D(p)$

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_c p^c}$$

classe de F.T

○ **Gain statique** =

on sait que : $G = \frac{b_0}{a_0}$

pour la F.T : $G = \lim_{p \rightarrow 0} H(p)$

ou bien =

$$H(p) = \frac{1}{p^c} \times \underbrace{\frac{b_0}{a_c}}_{\text{Gain statique}} \times \frac{1 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_{n-c} p^{n-c}}$$

○ **E.C.** :

on sait que : $(E.C) = \sum_{i=0}^n a_i r^i = 0$

pour la F.T : $D(p) = 0$

○ **stabilité du système** :

on sait que pour le système soit stable : tl les racines de E.C sont à partie réelle < 0 .

pour la F.T : le système est stable si tl les pôles de $H(p)$ sont à partie réelle < 0 $D(p)$



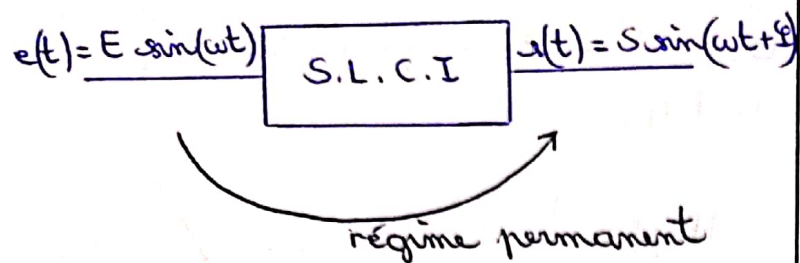
* si l'un des zéros, $z_1 = 0$

$$H(p) = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{p(p - z_1) \dots}{D(p)} = \underbrace{p}_{\text{dérivateur}} \times \frac{b_m}{a_n} \times \dots$$

* si l'un des pôles, $p_1 = 0$ intégrateur

$$H(p) = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{N(p)}{p(p - p_1) \dots} = \underbrace{\left(\frac{1}{p} \right)}_{\text{intégrateur}} \times \frac{b_m}{a_n} \times \dots$$

* Transmittance harmonique =



$$e(t) = E \sin(\omega t) \rightarrow \bar{E} = E \cdot e^{j\omega t}$$

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \bar{S} = S \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

↙ F.T harmonique

$$H(j\omega) = H(p) \text{ avec : } p = j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{\bar{S}}{\bar{E}} = \frac{S}{E} \cdot e^{j\varphi}$$

$H(j\omega)$ est caractérisé par =

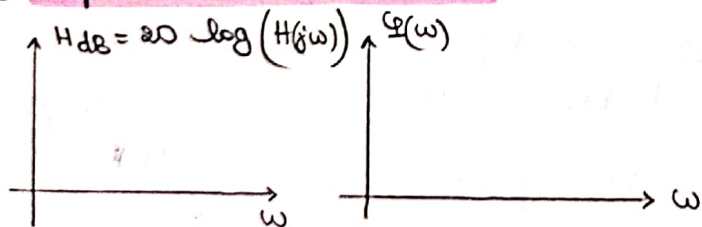
○ module : $|H(j\omega)| = \frac{S}{E}$

$$S = E \times |H(j\omega)|$$

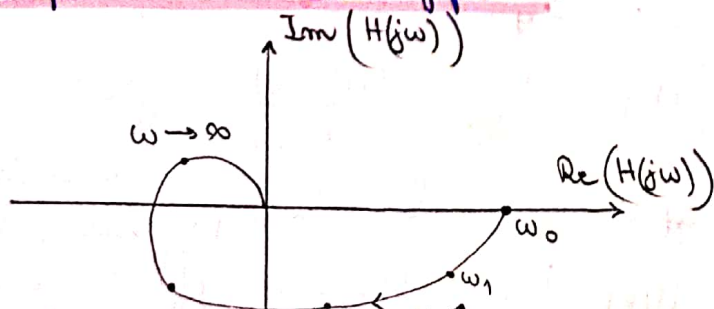
○ arg = $\arg(H(j\omega)) = \varphi(\omega)$
(phase)

⚠ : les différentes représentations fréquentielles =

○ Représentation de Bode =



○ Représentation de Nyquist =



○ Représentation de Black =

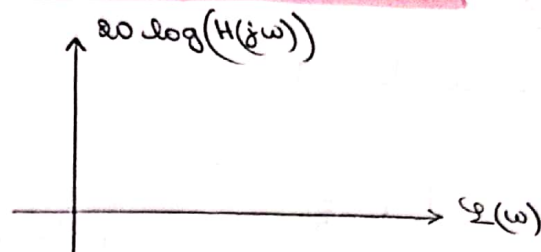


TABLE DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-nT)$	e^{-nTp}
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$\frac{1}{2} t^2 u(t)$	$\frac{1}{p^3}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^3}$
$(1-e^{-at}) \cdot u(t)$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\left(t-T+T \cdot e^{-t/T}\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^2(1+Tp)}$
$\frac{\omega_0^2}{\omega_p} e^{-m\omega_0 t} \sin \omega_p t \cdot u(t)$	$\frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$
$\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_p} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_p t + \psi)\right) \cdot u(t)$	$\frac{1}{p \left(1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$

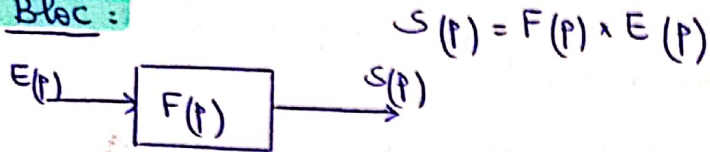
Avec :

$$\begin{cases} \omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2} \\ \psi = \text{Arccos } m \end{cases} \quad 0 \leq m < 1$$

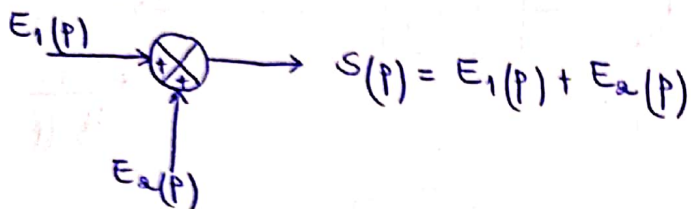
Schémas fonctionnels:

* Le schéma fonctionnel est constitué de :

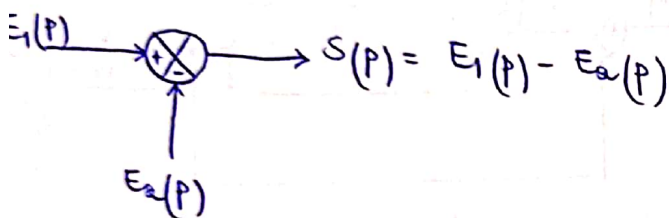
Bloc :



Sommateur :

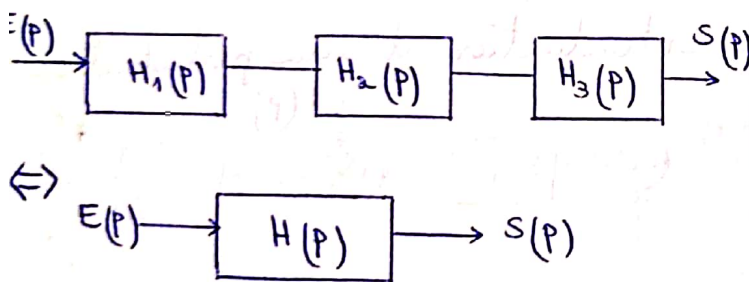


Comparateur :



* Règles de simplification :

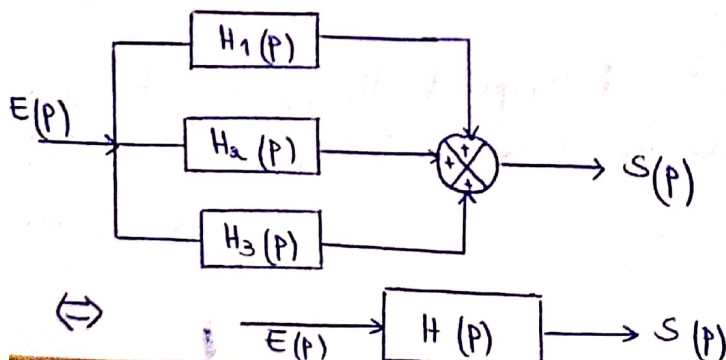
en série :



$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times H_3(p)$$

! : en série $\Leftrightarrow$ produit ($\times$)

en parallèle :



$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

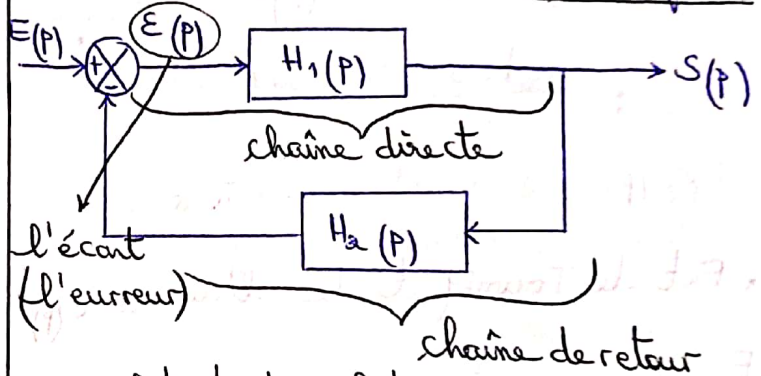
! : en parallèle ($=$) somme ($+$)

! : Réponse fréquentielle dans le plan de Bode :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \times H_2(j\omega) \times H_3(j\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{dB} = H_{1dB} + H_{2dB} + H_{3dB} \\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$

* schéma fonctionnel en boucle fermée



$\rightarrow$ fct de transfert = B.F

$$F_{BF}(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \times H_2(p)} = \text{Formule de Black}$$

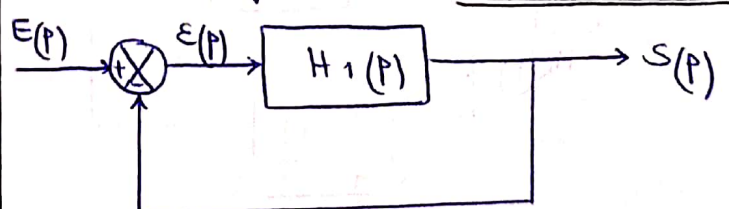
! : comparateur = **B.F.**

$$F_{BF}(p) = \frac{c. \text{ directe}}{1 + c. \text{ directe} \times c. \text{ retour}}$$

sommateur :

$$F_{BF}(p) = \frac{c. \text{ directe}}{1 - c. \text{ directe} \times c. \text{ retour}}$$

* schéma fonctionnel à retour unitaire

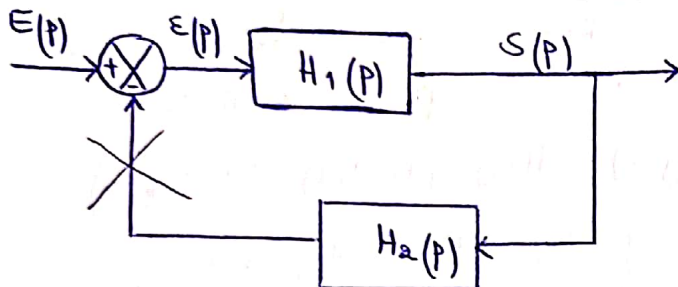


$$F_{BF}(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)}$$

⚠ : retour unitaire =

$$F_{BF}(p) = \frac{c. directe}{1 + c. directe}$$

* schéma fonctionnel en boucle ouverte =



→ fct de Transfert = F_{BO}

$$F_{BO}(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$

⚠ : en boucle ouverte = BO

$$F_{BO}(p) = c. directe \times c. retour$$

* Fct de Transfert de l'erreur $E(p)$:

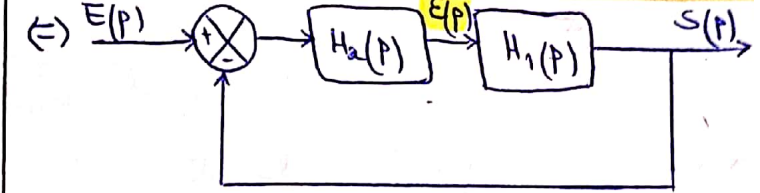
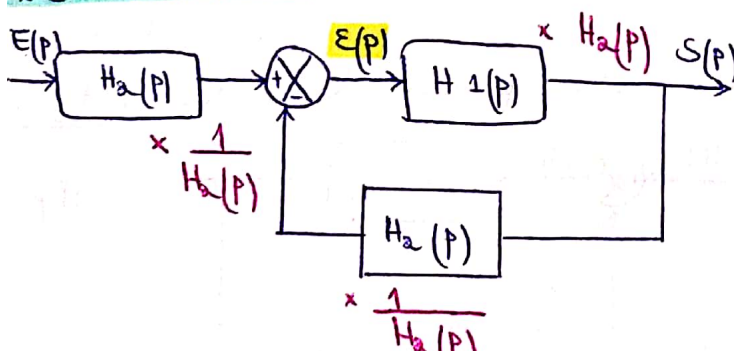
$$F_{err} = \frac{1}{1 + F_{BO}}$$

$$= \frac{1}{1 + c. directe \times c. retour}$$

* Transformation en schéma à retour unitaire =

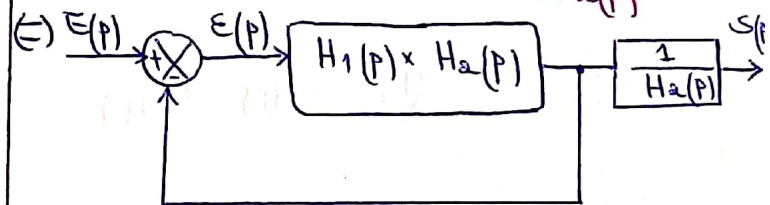
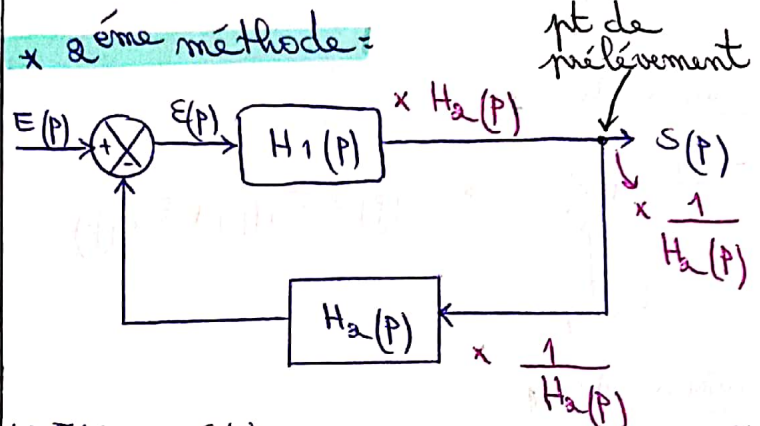
schéma fct $\xrightarrow{?}$ schéma fct à retour unitaire
B.F

* 1^{ère} méthode =



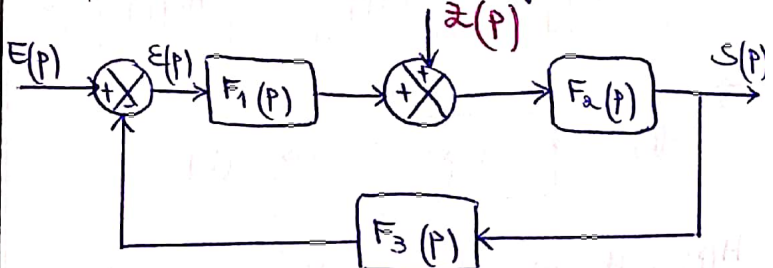
⇒ déplacement de comparateur par division par $H_2(p)$ à l'entrée du comparateur.

* 2^{ème} méthode =



⇒ déplacement du pt de prélèvement par division par $H_2(p)$ aux sorties du pt de prélèvement.

* Introduction d'une perturbation :



Th de superposition = $S(p) = S_1(p) + S_2(p)$

* 1^{ère} étape = $Z(p) = 0 \dots \Rightarrow S_1(p) = \dots$

$H_1(p) = \dots \Rightarrow S_1(p) = H_1(p) \times E(p)$

* 2^{ème} étape = $E(p) = 0 \dots \Rightarrow S_2(p) = \dots$

$H_2(p) = \dots \Rightarrow S_2(p) = H_2(p) \times Z(p)$

⚠ : $H_1(p)$ et $H_2(p)$ doivent avoir le m^{ême} dénominateur.

systeme fondamental du 1^{er} ordre :

* Définition =

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} = \text{forme canonique de 1^{er} ordre}$$

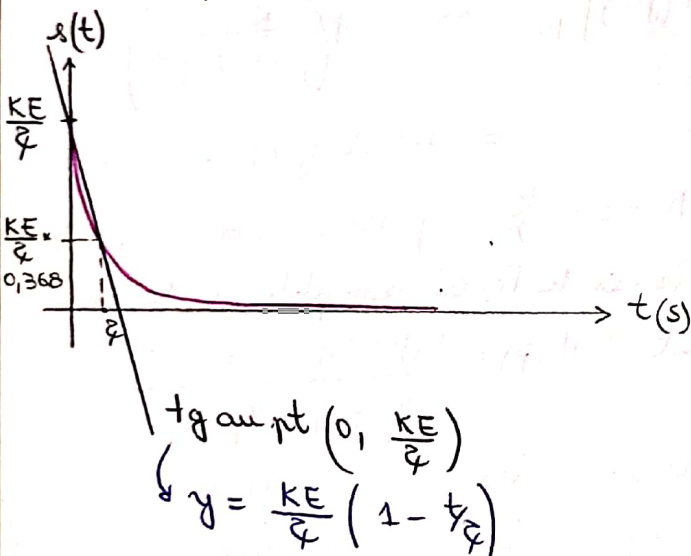
avec = $\begin{cases} K = H(0) = \text{Gain statique} \\ \tau: \text{cte du temps (en s)} \end{cases}$

stabilité: pôles: $p = -1/\tau < 0$ = le système est stable.

* Réponses temporelles =

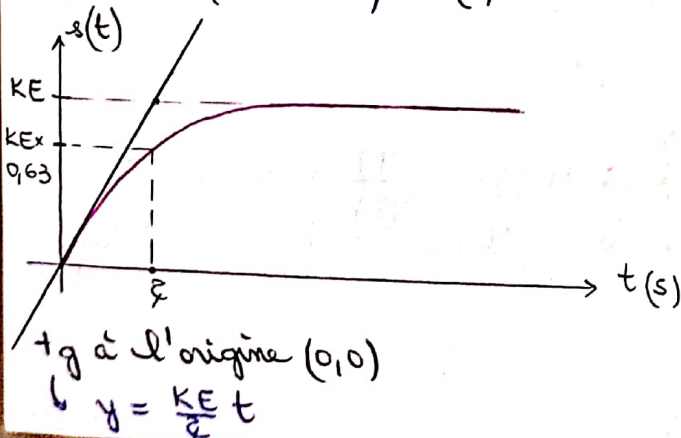
1/ réponse impulsionnelle = $e(t) = E \cdot \delta(t)$

$$s(t) = \frac{KE}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot u(t)$$



2/ réponse indicielle = $e(t) = E \cdot u(t)$

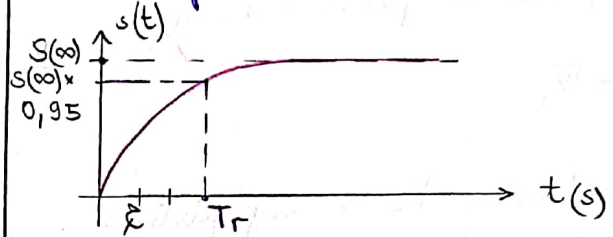
$$s(t) = KE (1 - e^{-t/\tau}) \cdot u(t)$$



* Temps de réponse = T_r = c'est le temps mis par le système pour que la sortie atteigne 95% de sa valeur finale.

$$T_r = 3\tau$$

T_r = temps de stabilisation



* Identification =

la réponse indicielle a une allure expo ↗ sans pt d'inflexion

⇒ sys. fond. du 1^{er} ordre.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$\begin{cases} K = ? & \text{on a: } s(\infty) = KE \Rightarrow K = \frac{s(\infty)}{E} \\ \tau = ? & \begin{cases} \text{on a: } s(\tau) = 0.63 s(\infty) \\ \text{ou} \\ s(T_r) = 0.95 s(\infty) \Rightarrow T_r = \dots \\ \tau = \frac{T_r}{3} \end{cases} \end{cases}$$

3/ réponse fréquentielle ($K > 0$) =

$$e(t) = E \sin(\omega t) \cdot u(t)$$

$$s(t) = S \sin(\omega t + \varphi) \cdot u(t)$$

avec = $\begin{cases} S = |H(j\omega)| \times E = \frac{KE}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$

(2)

* Tracé asymptotique de Bode =

$$\omega \sim 0 \Rightarrow H(j\omega) \sim K$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) \\ * \varphi = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow H(j\omega) \sim \frac{K}{j\omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\omega) \\ \rightarrow \text{droite de pente } -20 \text{ dB/décade} \\ * \varphi = -\pi/2 \end{array} \right.$$

* Intersection entre 2 asymptotes =
 $(\omega_c, 20 \log K)$ $\omega_c = 1/\tau$ = pulsation de coupure

⚠: intersection entre $y=0$ et l'asymptote ($\omega \rightarrow +\infty$) = $\omega = 1/\tau$

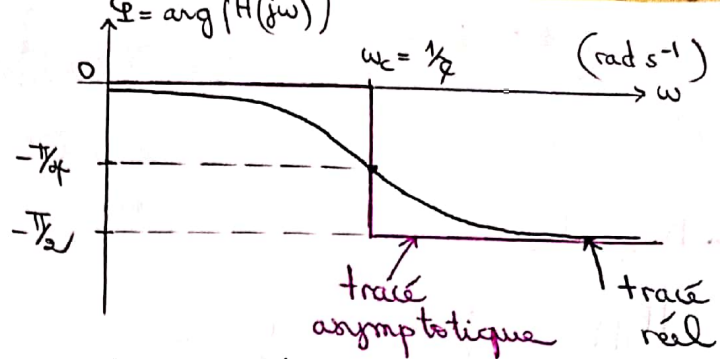
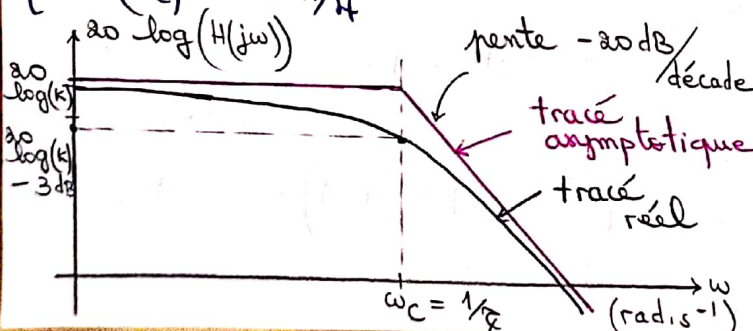
* Tracé réel dans le plan de Bode:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \right) \\ * \varphi = -\arctan \left(\frac{\tau\omega}{1} \right) \end{array} \right.$$

pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$

$$\left\{ \begin{array}{l} * |H(j\omega_c)|_{dB} = 20 \log(K) - 3 \text{ dB} \\ * \varphi(\omega_c) = -\pi/4 \end{array} \right.$$



* Bande passante =

C'est l'intervalle des pulsations pour lequel la perte de gain est inférieure à 3 dB.

* Graphiquement = pour ω_c : la perte de gain = 3 dB

$$\Rightarrow \omega_{BP} = [0, \omega_c] \text{ avec } \omega_c = 1/\tau$$

$\Rightarrow$ c'est un filtre passe bas.

* Analytiquement =

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{dB} &= 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_c = 1/\tau = \text{pulsation de coupure.}$$

* Règles de Tracé asymptotique de Bode =

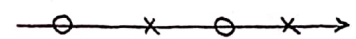
$$\text{soit: } H(p) = \frac{K(p-z_1) \dots (p-z_n)}{(p-p_1) \dots (p-p_n)}$$

les z_i = les zéros de $H(p)$

les p_i = les pôles de $H(p)$

① Placer les pulsations de $|z_i|$ et $|p_i|$ sur l'axe des ω :

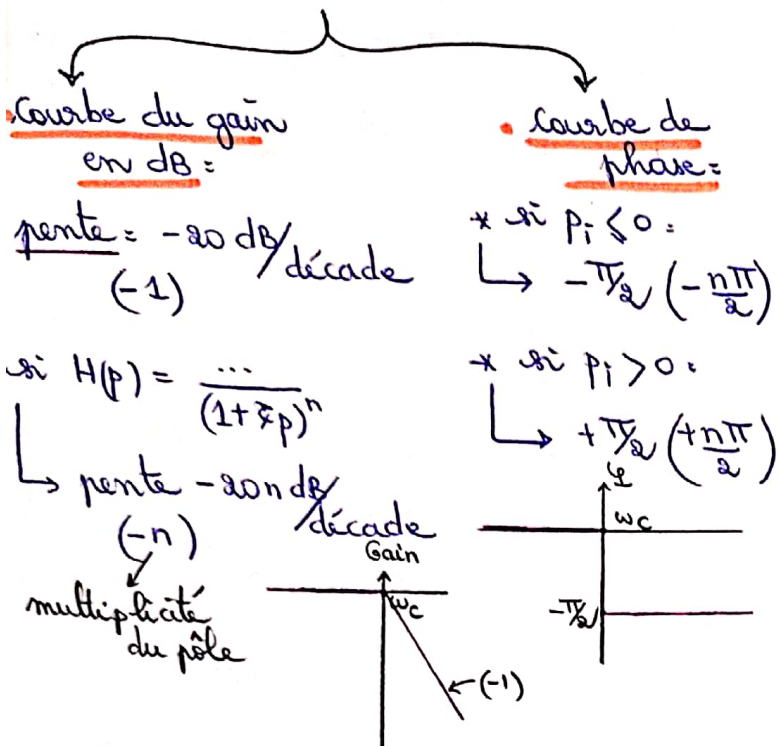
$\circ$: zéro
 $\times$: pôle



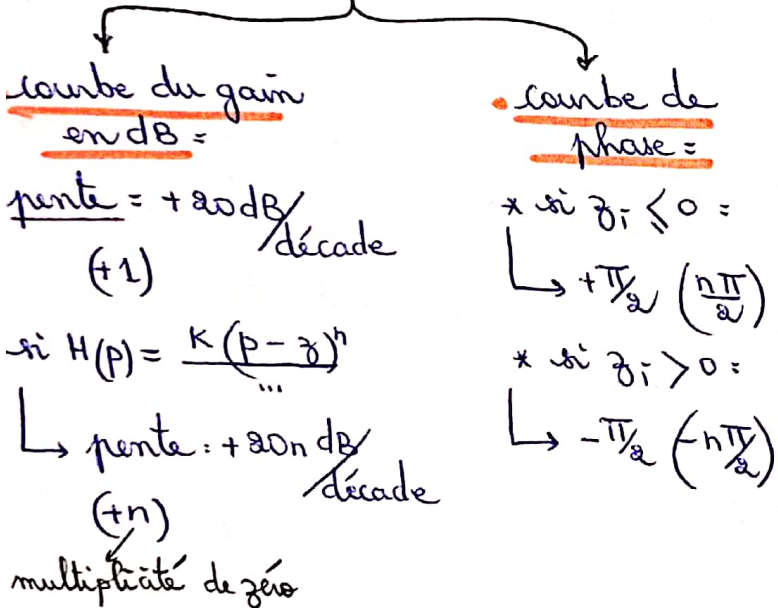
⚠: $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ si $N(p) = \text{cte}$
 $\rightarrow$ le système est fondamentale.

(2)

② Chaque fois on rencontre un pôle =



③ Chaque fois on rencontre un zéro =



*/ Système de 1^{er} ordre généralisé =

soit $H(p) = K \cdot \frac{1+\tau'p}{1+\tau p}$

$\begin{cases} K = \text{Gain statique} \\ \tau, \tau' = \text{les ctes du temps} \end{cases}$

• 1^{er} cas = si $\lambda = \frac{\tau'}{\tau} > 1$ ($\tau' > \tau$)
→ système à avance de phase

• 2^{ème} cas = si $\lambda = \frac{\tau'}{\tau} < 1$ ($\tau' < \tau$)
→ système à retard de phase.

systeme fondamental du second ordre :

* Définition =

$$H(p) = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2m \omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0} p + 1}$$

formes canoniques de 2nd ordre.

avec : $\begin{cases} K = H(0) : \text{gain statique} \\ m = \text{coeff ou facteur} (\xi, \gamma) \text{ d'amortissement} \\ \omega_0 : \text{pulsation propre} - (\omega_n) \end{cases}$

* Différents régimes :

① Régime aperioclique = ($m > 1$)

$\Delta' > 0$: 2 pôles réels $\neq$

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} < 0 \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_2} < 0 \end{cases}$$

→ le sys est stable. ($\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2}$)

avec : $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = \omega_0^2$

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

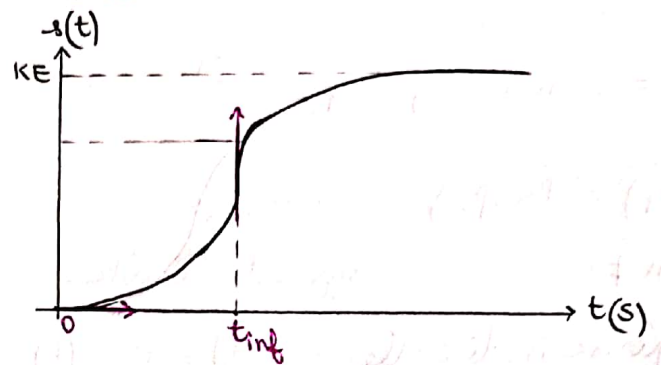
* Réponse indicielle : $e(t) = E \cdot u(t)$

$$\Rightarrow s(t) = KE \left[1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] u(t)$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(\infty) = KE \end{cases} \quad \begin{cases} s'(0) = 0 \text{ tg horizontale} \\ \text{à l'origine} \end{cases}$$

→ pt d'inflexion =

$$t_{inf} = \frac{\ln(\tau_1) - \ln(\tau_2)}{\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}} = \frac{\ln|p_2| - \ln|p_1|}{|p_2| - |p_1|}$$



* Réponse fréquentielle = $K > 0$

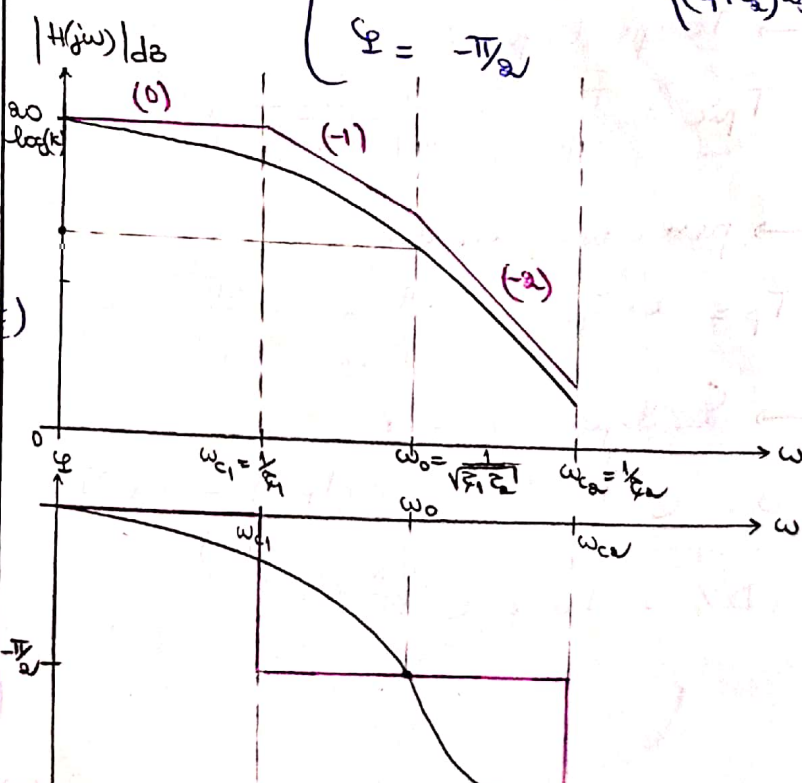
→ Tracé asymptotique de Bode :

$$\begin{cases} \omega_{c1} = \frac{1}{\tau_1} \\ \omega_{ca} = \frac{1}{\tau_2} \end{cases} \quad \text{les pulsations de} \\ \text{carrure.}$$

→ Tracé réel de Bode :

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{(1 - 2\xi\omega/\omega_0)^2 + (\xi + \xi_2)^2 \omega^2}} \right) \\ \varphi = -\arctan(\xi_1 \omega) - \arctan(\xi_2 \omega) \end{cases}$$

pour $\omega = \omega_0$: $\begin{cases} |H(j\omega_0)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{(\xi_1 + \xi_2) \omega_0} \right) \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$



② Régime pseudo-périodique :

$$(0 < m < 1)$$

$\Delta' < 0 \Rightarrow$ 2 pôles complexes conjugués.

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0 \sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0 \sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

$$\text{Re}(p_1) = \text{Re}(p_2) = -m\omega_0 < 0$$

si $m \neq 0 \Rightarrow$ le sys est stable.

* Réponse indicielle : $e(t) = E u(t)$

$$s(t) = KE \left[1 - e^{-m\omega_0 t} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_p} \sin(\omega_p t + \psi) \right] u(t)$$

$$\text{avec} : \begin{cases} \omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2} \\ \psi = \arccos(m) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s(\infty) = KE \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

→ Extremums :

$$t_{\text{ext}} = k \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} \cdot KE N$$

$$s(t_{\text{ext}}) = KE \left[1 - (-1)^k \exp\left(\frac{-k\pi m}{\sqrt{1-m^2}}\right) \right]$$

→ Temps de pic :

$$T_{\text{pic}} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

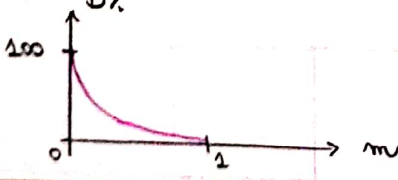
→ pseudo-période :

$$T_p = 2 \times T_{\text{pic}} = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

→ Le dépassement :

$$D = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = \frac{s(T_{\text{pic}}) - s(\infty)}{s(\infty)}$$

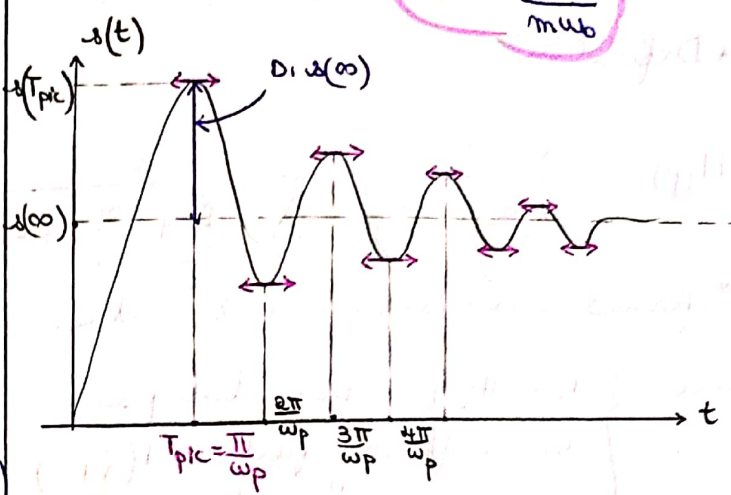
$$D\% = 100 \times e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$



→ Temps de réponse : $\pm x\%$ de $s(\infty)$

$$T_r \approx \frac{1}{m\omega_0} \ln \frac{100}{x\%}$$

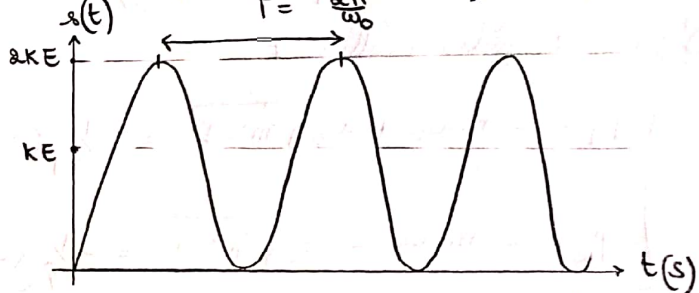
$$\Delta \pm 5\% \text{ de } s(\infty) \Rightarrow T_r \approx \frac{3}{m\omega_0}$$



⚠ : Cas particulier : $m = 0$.

$$\Rightarrow \omega_p = \omega_0$$

$$s(t) = KE (1 - \cos(\omega_0 t)) u(t)$$



⇒ oscillateur parfait sans amortissement

* Réponse fréquentielle :

→ Tracé asymptotique de Bode :

ω_0 : pulsation de coupure

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log k \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log(k) + 40 \\ \log(\omega_0) - 40 \log \omega \\ \varphi = -\pi \end{cases}$$

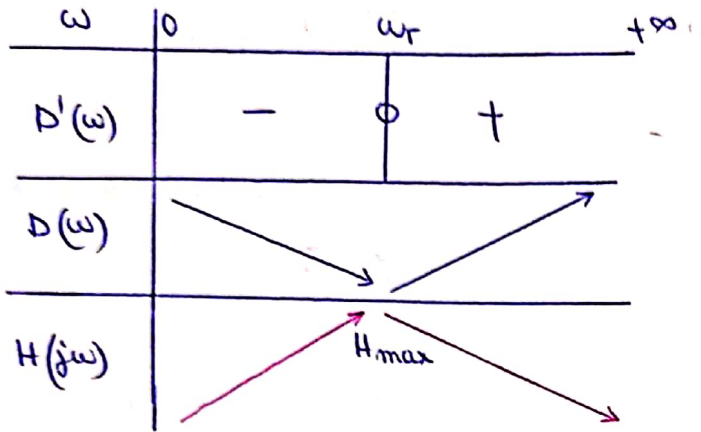
→ droite de pente : -40 dB/décade passant par $\omega_0 = 20 \log(k)$

→ Tracé réel :

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega_0^2\omega^2}} \right) \\ \varphi = -\arctan \left(\frac{2m\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \end{cases}$$

pour $\omega = \omega_0 = \begin{cases} |H(j\omega_0)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{K}{2m}\right) \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$D'(\omega) = -4\omega \left(\underbrace{\omega_0^2 (1 - 2m^2)}_{\omega_r^2} - \omega^2 \right)$$



→ Pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$$

ω_r existe si : $m < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$

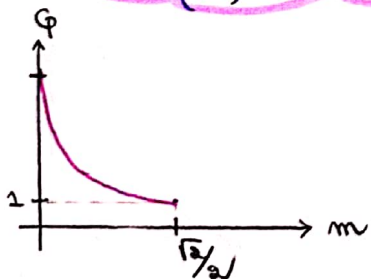
→ Pic de résonance :

$$H_{max} = |H(j\omega_r)| = \frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

$$20 \log(H_{max}) = 20 \log\left(\frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}\right)$$

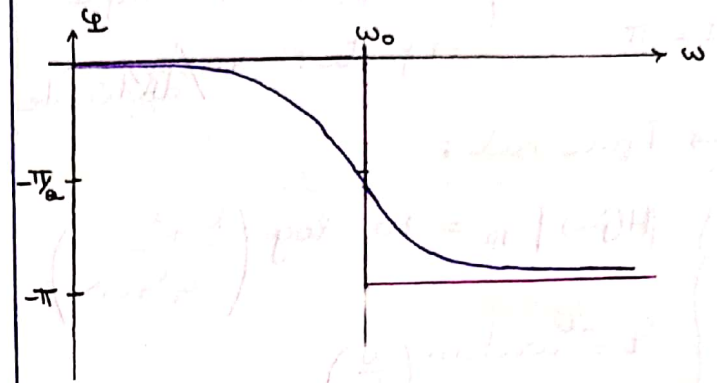
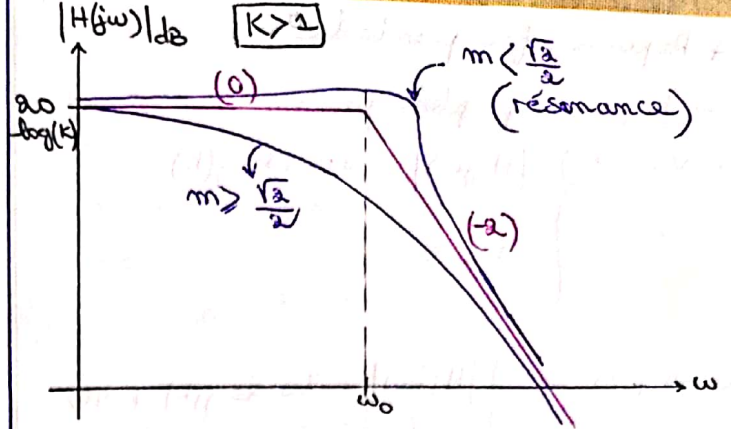
→ Facteur de résonance :

$$\varphi = \frac{H_{max}}{H(j\omega_0)} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$



⚠ : si $m \uparrow \Rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2} \downarrow$

$$\Delta = \begin{cases} \text{si } K > 1 \Rightarrow 20 \log(K) > 0 \\ \text{si } K < 1 \Rightarrow 20 \log(K) < 0 \end{cases}$$



③ Régime critique : ($m = 1$)

$D' = 0 \Rightarrow 1$ pôle double.

$$P_{1,2} = -m\omega_0 = -\omega_0 < 0$$

$\Rightarrow$ le sys est stable.

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

* Réponse indicielle : $e(t) = E u(t)$

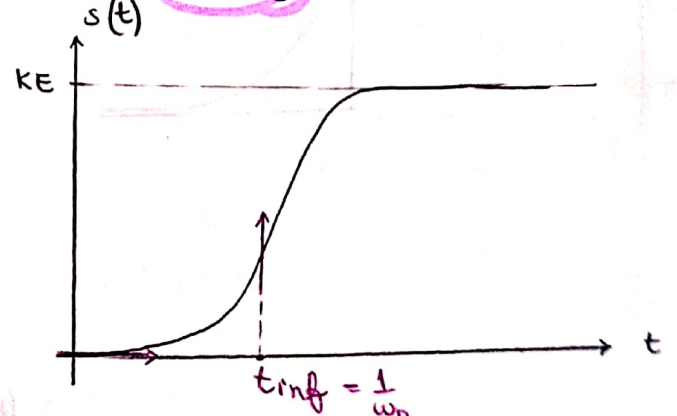
$$\Rightarrow s(t) = KE \left(1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right) u(t)$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(\infty) = KE \end{cases}$$

$s'(0) = 0$ tg horizontal à l'origine

→ pt d'inflexion :

$$t_{inf} = \frac{1}{\omega_0}$$



* Réponse fréquentielle =

→ Tracé asymptotique :

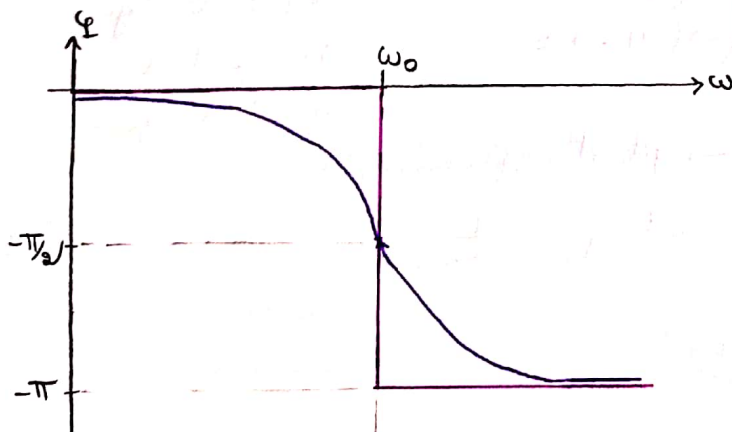
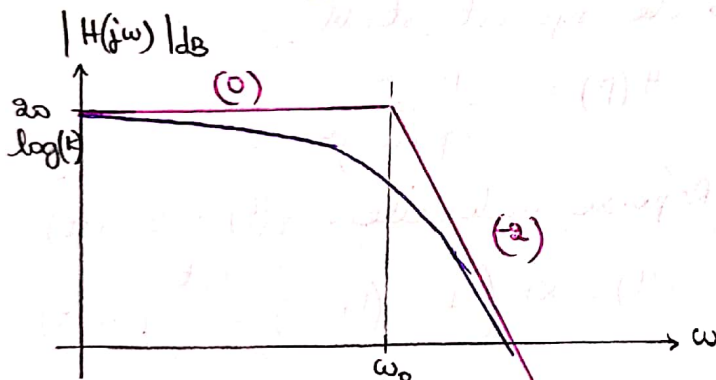
$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = 20 \log(K) \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = 20 \log(K) + 40 \\ \log(\omega_0) - 40 \log \omega \\ \varphi = -\pi \end{cases} \rightarrow \text{pente : } -40 \text{ dB/décade}$$

→ Tracé réel :

$$\begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \right) \\ \varphi = -2 \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{cases}$$

$$\text{pour } \omega = \omega_0 = \begin{cases} |H(j\omega_0)|_{dB} = 20 \log \left(\frac{K}{2} \right) \\ \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$



Stabilité :

* Condition nécessaire et suffisante de stabilité :

$$\text{Re}(\text{pôles}(H(p))) < 0$$

Etudier la stabilité

méthode
algébrique :

critère de Routh

méthode
graphique :

critère de Revers
(marge de gain,
marge de phase)

① Critère de Routh :

$$\text{on a : } H_{BF}(p) = \frac{F.T.C.D(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

→ l'éq caractéristique :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

→ a/ Condition nécessaire :

stabilité $\Leftrightarrow$ tous les a_i sont
strictement de même signe.

⚠ : cette condition est nécessaire +
suffisante pour les sys de 1^{er} et 2nd
ordre.

→ b/ Condition nécessaire + suffisante :
stabilité $\Leftrightarrow$ tous les élt de la 1^{ère}
colonne de tableau de Routh sont
présents + de même signe.

⚠ : si a/ et b/ sont vérifiées

↓
sys. stable.

* Tableau de Routh :

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
p^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
$\vdots$	c_1	c_2	c_3	...
p				
$p^0 = 1$				

⚠ : pour trouver
les autres élt =
anti déterminant
(colonne des privés) (les 2 lignes avant)
avec = 1^{ère} ligne + sur le 1^{er} élt la
ligne précédente ligne avant

$$\begin{cases} b_1 = \frac{(a_{n-1} a_{n-2}) - (a_{n-3} a_n)}{a_{n-2}} \\ b_2 = \frac{(a_{n-2} a_{n-4}) - (a_{n-5} a_n)}{a_{n-1}} \\ c_1 = \frac{(b_1 a_{n-3}) - (b_2 a_{n-1})}{b_1} \\ c_2 = \frac{(b_1 a_{n-5}) - (b_3 a_{n-1})}{b_1} \end{cases}$$

⚠ : * Le critère de Routh
s'applique aux $H_{BO}(p)$ et $H_{BF}(p)$

* nb des pôles instable ($\text{Re} > 0$) =
changement de signe 1^{ère} colonne

* Certains sys ne sont pas décrits
par des polynômes.

→ Exemple = $H_{BF}(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 10p + e^{-2p}}$

② Critère de Revers =

$$\text{on a } H_{BF}(j\omega) = \frac{F.T.C. D(j\omega)}{1 + H_{BO}(j\omega)}$$

$$\text{on } H_{BO}(j\omega) = -1$$

$$\Rightarrow 1 + H_{BO}(j\omega_{cr}) = 0 \Rightarrow H_{BF}(j\omega_{cr}) \rightarrow +\infty$$

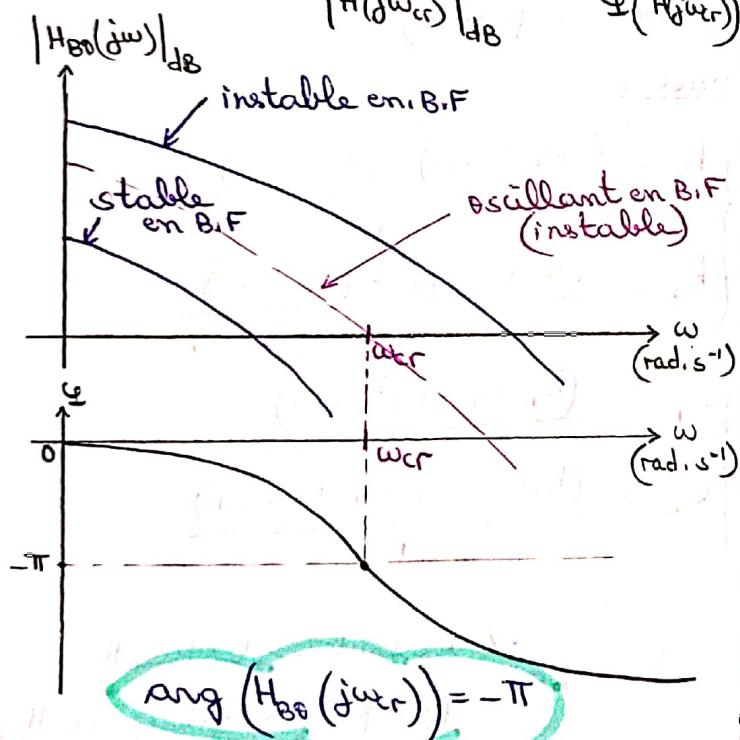
ω_{cr} : pulsation critique.

$(-1, 0) \equiv$ pt critique

$$\begin{matrix} \swarrow \\ \text{Re}(H_{BO}(j\omega_{cr})) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \searrow \\ \text{Im}(H_{BO}(j\omega_{cr})) \end{matrix}$$

⚠ Critère de Revers étudie la stabilité à partir B.O. seulement.

$(-1, 0) \xrightarrow{\text{plan de Bode}} (0 \text{ dB}, -\pi)$



$$\arg(H_{BO}(j\omega_{cr})) = -\pi$$

stabilité $\Leftrightarrow$ la courbe de $|H_{BO}(j\omega)|_{dB}$ en B.F. est au dessous l'axe des abscisses lorsque $\omega = \omega_{cr}$

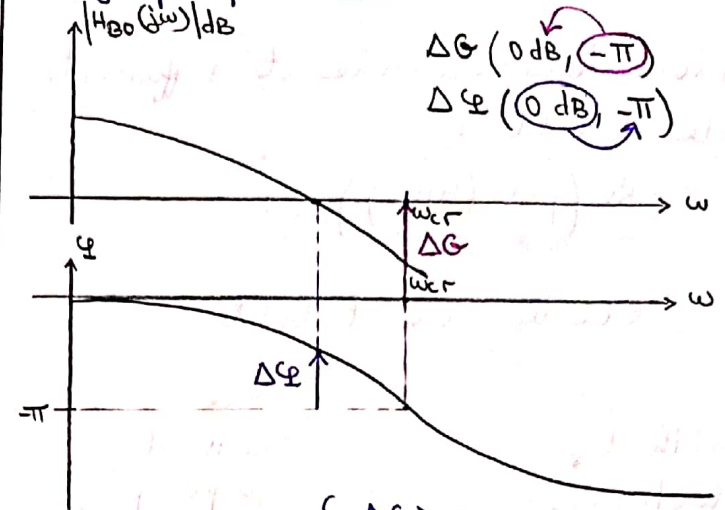
autrement dit,

$$|H_{BO}(j\omega_{cr})|_{dB} = 20 \log(|H_{BO}(j\omega_{cr})|) < 0$$

$$\Rightarrow |H_{BO}(j\omega_{cr})| < 1.$$

* Marge de gain ΔG - Marge de phase $\Delta \phi$

$\rightarrow$ graphiquement =



sys stable $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta G > 0 \\ \Delta \phi > 0 \end{cases}$ en B.F.

⚠ * ΔG et $\Delta \phi$ est une garantie que stabilité persiste malgré la variation de $|H_{BO}(P)|$ et les retards parasites imprévus.

* En pratique : on a tj : $\Delta G \in [6 \text{ dB}, 12]$
 $\Delta \phi \sim \frac{\pi}{4}$

* sys instable $\xrightarrow{\text{correcteur}}$ sys stable

* pour les sys de 1^{er} et 2nd ordre =

$$\begin{cases} \Delta G = \infty \\ \omega_{cr} = \infty \end{cases}$$

$\rightarrow$ Analytiquement =

$$\Delta G = -20 \log |H_{BO}(j\omega_{cr})|$$

$$\text{avec } \omega_{cr} \equiv \arg(H_{BO}(j\omega_{cr})) = -\pi$$

$$\Delta \phi = \arg(H_{BO}(j\omega_1)) + \pi$$

$$\text{avec } \omega_1 = |H(j\omega_1)| = 1 \text{ ou } |H(j\omega_1)|_{dB} = 0$$

Précision :

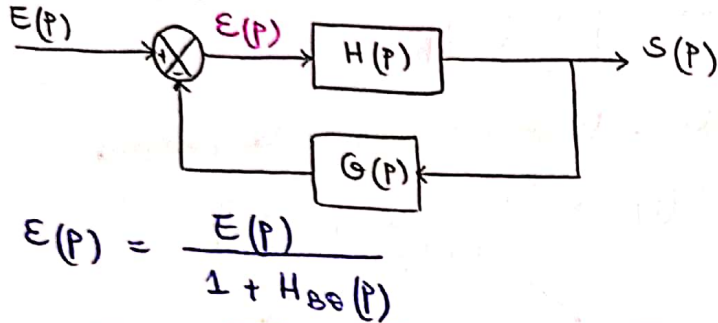
* Erreur en régime permanent :

→ sys à retour unitaire =

$$E(p) = E(p) - S(p)$$

$$E(\infty) = e(\infty) - s(\infty)$$

→ Cas général :



$$\Rightarrow E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p E(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

* Erreur statique (de position)

$$E(p) = \frac{E}{p} : \text{échelon}$$

$$E_0 = E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot \frac{E}{p}}{1 + H_{BO}(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$\Rightarrow E(\infty) = \frac{E}{1 + k_p} \text{ si } \text{classe}(H_{BO}(p)) = 0$$

avec : $k_p = \lim_{p \rightarrow 0} H_{BO}(p) = \text{cte d'erreur de position}$

* Erreur relative :

$$E_r = \frac{E(\infty)}{e(\infty)} \text{ exprimé en \%}$$

$$E_r \% = 100 \times \frac{E(\infty)}{e(\infty)}$$

* Précision absolue : $100 - E(\infty) \%$

* Erreur de vitesse :

$$E(p) = \frac{E}{p^2} : \text{rampe}$$

$$E_1 = E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p^2}}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{p(1 + H_{BO}(p))}$$

$$\Rightarrow E(\infty) = \frac{E}{k_v} \text{ si } \text{classe}(H_{BO}(p)) = 1$$

avec : $k_v = \lim_{p \rightarrow 0} p H_{BO}(p) = \text{cte d'erreur de vitesse}$

* Erreur en accélération :

$$E(p) = \frac{E}{p^3} = \text{entrée parabolique}$$

$$e(t) = E \frac{t^2}{2} u(t)$$

Δ: Rappel : $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{p^{n+2}}$

$$E_a = E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p^3}}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E}{p^2(1 + H_{BO}(p))}$$

$$\Rightarrow E(\infty) = \frac{E}{k_a} \text{ si } \text{classe}(H_{BO}(p)) = 2$$

avec : $k_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 H_{BO}(p) = \text{cte d'erreur d'accélération}$

* Tableau résumé de $E(\infty)$:

$\alpha \backslash E(p)$	E	$\frac{E}{p}$	$\frac{E}{p^2}$	$\frac{E}{p^3}$	$\frac{E}{p^4}$
0	0	$\frac{E}{1+k}$	∞	∞	∞
1	0	0	$\frac{E}{k}$	∞	∞
2	0	0	0	$\frac{E}{k}$	∞

$$\alpha = \text{classe}(H_{BO}(p))$$

$$\text{classe}(E(p)) \leq \alpha \Rightarrow E(\infty) = 0$$

$$\text{classe}(E(p)) = \alpha + 1 \Rightarrow E(\infty) = \text{cte}$$

$$\text{classe}(E(p)) > \alpha + 1 \Rightarrow E(\infty) = \infty$$

Δ: améliorer précision : $\alpha \uparrow$
 → + ajouter intégrations ($\frac{1}{p}$) en série.

Correction :

système asservi :

stabilité

(marge de gain + de phase)

précision

$\varepsilon(\infty) \downarrow$
ou
 $\varepsilon(\infty) = 0$
idéale

rapidité

$T_r \downarrow$
ou
 $\omega_{BP} \uparrow$

1/ Correcteur proportionnel (P) : $C(p) = K$

→ Influence de K sur stabilité

$$\text{si } K \uparrow = \begin{cases} \Delta \varphi \downarrow \\ \Delta G \downarrow \end{cases}$$

→ Influence de K sur précision :

$$\text{si } K \uparrow = \varepsilon(\infty) \downarrow$$

2/ Correcteur proportionnel Intégral (PI)

$$C(p) = K_i \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right)$$

Avantages :

$\begin{cases} \varepsilon(\infty) = 0 \\ + \\ \text{meilleur} \\ \text{amortissement} \end{cases}$

Inconvénients :

$\begin{cases} \text{système lent} = \\ T_r \uparrow \\ + \\ \omega_{BP} \downarrow \end{cases}$

3/ Correcteur proportionnel Dérivé (PD)

théorique : $C(p) = K_d (1 + \tau_d p)$

→ approximation : $\tau_d \gg \tau_i$

$$\tau_d = a \tau_i \quad |a| \gg 1$$

$$\Rightarrow C(p) = K_d \frac{1 + a \tau_i p}{1 + \tau_i p} : \text{correcteur à avance de phase}$$

Avantages :

$\begin{cases} \omega_{BP} \uparrow + T_r \downarrow \\ \downarrow \text{résonance} \\ \text{meilleur stabilité} \\ \text{meilleur amortissement} \end{cases}$

Inconvénients :

$\begin{cases} G \uparrow \text{ en H.F} \\ + \\ \text{bruits parasites} \\ \text{en H.F} \end{cases}$

4/ Correcteur proportionnel Intégral dérivé = (PID)

→ parallèle : $C(p) = K + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p$

→ série : $C(p) = K_p \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right) \cdot (1 + \tau_d p)$

avec : $\left| \frac{1}{\tau_i} < \frac{1}{\tau_d} \right|$

○ Correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K \cdot \frac{1 + a \tau_i p}{1 + \tau_i p} \quad |a| > 1$$

Avantages :

$\begin{cases} \omega_{BP} \uparrow + \downarrow T_r \\ \text{meilleur stabilité} \\ \downarrow \text{résonance} \\ + \text{meilleur amortissement} \end{cases}$

Inconvénients :

$\begin{cases} G \uparrow \text{ en H.F} \\ + \\ \text{bruits parasite} \\ \text{en H.F} \end{cases}$

○ Correcteur à retard de phase :

$$C(p) = K \frac{1 + \tau_i p}{1 + a \tau_i p} \quad |a| < 1$$

Avantages :

$\begin{cases} G \downarrow \text{ en H.F} \\ \text{meilleur stabilité} \end{cases}$

Inconvénients :

$\begin{cases} \text{système lent} = \\ T_r \uparrow \\ + \\ \downarrow \omega_{BP} \end{cases}$