

Chap 2 Transformée de

Laplace (Calcul symbolique)

en fonction de t

$f(t)$
Fonction définie

$F(p)$

en fonction de p

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Transformée ou image de $f(t)$

variable de Laplace

Originale ou transformée inverse de $F(p)$

Notation :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

À retenir

$f(t)$		$F(p)$
$u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{p}$
$\alpha \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{\alpha}{p}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{p+a}$
$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\delta(t)$	$\rightarrow$	1
$\alpha \cdot \delta(t)$	$\rightarrow$	α
$t^m \cdot u(t)$	$\rightarrow$	$\frac{m!}{p^{m+1}}$

• Propriétés de la T.L. •

(3)

1) La Transformée de la somme c'est la somme des Transformées.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^m f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^m F_i(p)$$

2) Transformée de la dérivée

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0) \rightarrow \text{Condition initiale}$$

En général :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

puissance
de p ↓

dérivée
de f ↑

3) Transformée de la primitive

$h(t)$: primitive de $f(t)$

$$H(p) = \frac{F(p) + h(0)}{p}$$

$$4) \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p+a)$$

$$5) \mathcal{L}[t^n \cdot u(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$6) \text{Théo de la valeur initiale : } f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

$$\text{Théo de la valeur finale : } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

7) Théorème du changement de l'échelle du temps

$$\mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a F(ap)$$

8)

$$\mathcal{L} [t^m \cdot f(t)] = (-1)^m \frac{d^m F(p)}{dp^m}$$

9) Théorème du retard

$$\mathcal{L} [f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$$

10) T.L. des fonctions périodiques

$g(t)$ une fonction périodique de période T
 $f(t)$ sa restriction $\dagger q$: $f(t) = \begin{cases} g(t) & \forall t \in [0, T] \\ 0 & \text{par ailleurs} \end{cases}$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-Tp}}$$

Chap 3: Fonction de Transfert

Fonction de transfert (transmittance opérationnelle)

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

avec $C.I = 0$

• $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

avec $\begin{cases} N(p) = \sum_{j=0}^m b_j p^j \rightarrow \text{entrée} \\ D(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^i \rightarrow \text{sortie} \end{cases}$

Fraction rationnelle irréductible

• $H(p)$ est invariante dans tous les cas.

~ Paramètres d'un système ~

	Domaine temporel	Domaine de Laplace
	Eq diff	$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$
L'ordre m	La plus grande dérivation de $s(t)$	Le degré le plus élevé de $D(p)$
La classe α	La plus petite dérivation de $s(t)$	Le plus petit degré de $D(p)$
Gain statique	$\frac{b_0}{a_0}$	$\lim_{p \rightarrow 0} H(p)$
Fondamental	Si $m=0$	Si $N(p) = \text{cte}$
Eq caractéris.	$\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i = 0$	$D(p) = 0$
Stabilité	Si toutes les racines de E.C sont à parties réelles < 0	Si tous les pôles de $H(p)$ sont à parties réelles < 0

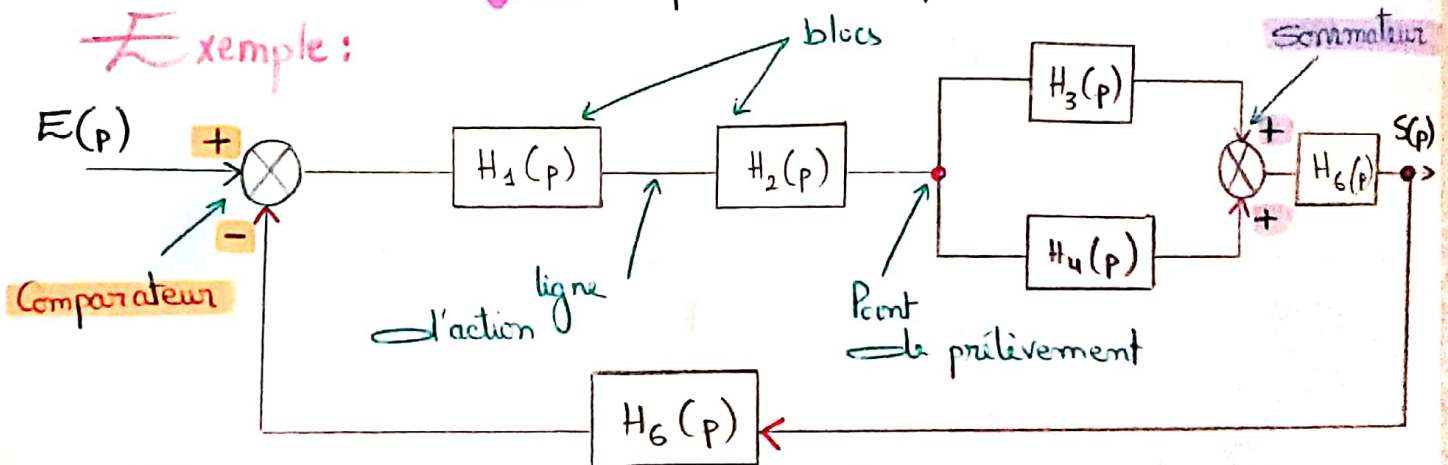
Chap 4 : Schémas fonctionnels et leurs transformations

- Schéma fonctionnel = Schéma - bloc

• C'est la représentation graphique simplifiée d'un procédé relativement complexe.

- Il contient :
- Des blocs
 - Des lignes d'action (lignes orientées)
 - Des points de sommation
 - Des points de prélèvement.

Exemple :



~ Règles de simplification ~

- Association en cascade (série) :

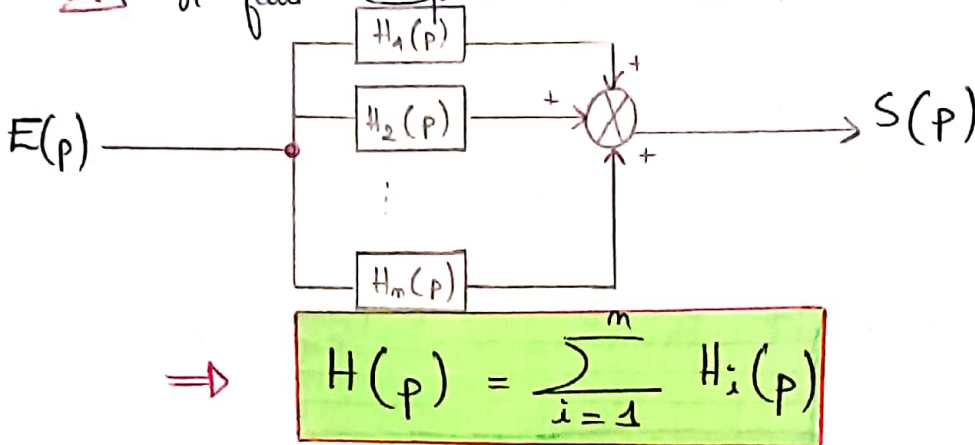


$$\Rightarrow H(p) = \prod_{i=1}^m H_i(p)$$

⚠ Il faut que entre l'entrée et la sortie, il n'y ait aucun lien

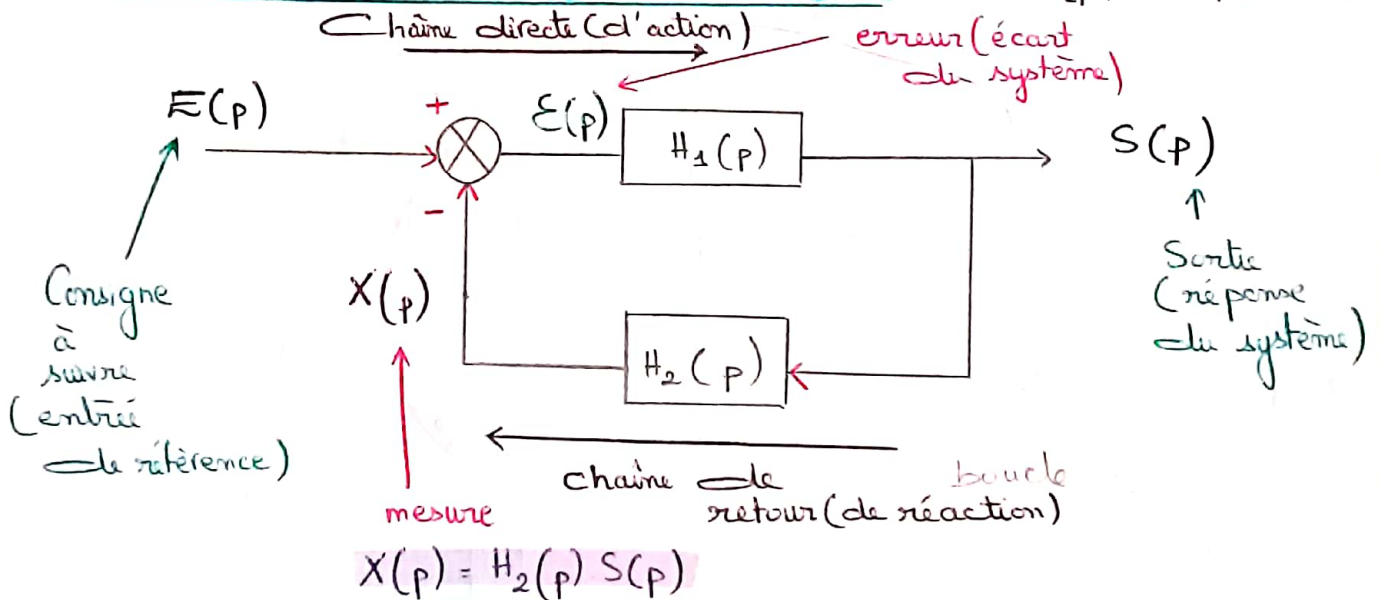
- Association en parallèle :

⚠ Il faut qu'ils ont tous la même entrée.



- Réduction des boucles :

$$E(p) = E(p) - X(p)$$



Boucle ouverte (B.O)

Dans cet exemple : $H_{BO}(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$

$H_{BO}(p)$ = Produit des fonctions de transfert de la chaîne directe et de retour de la boucle.

Boucle fermée (B.F)

Formule de Black

$$H_{BF} = \frac{\text{Fonction de transfert de la chaîne directe}}{1 + H_{BO}(p)}$$

Dans cet exemple : $H_{BF}(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$
 (The diagram shows arrows pointing from 'comparateur' to the '1' in the denominator and 'sommeur' to the '+' sign in the denominator.)

Advenant α

Fonction de transfert de l'erreur

$E(p)$ dans le cas ou

$$H_{err}(p) = \frac{E(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)}$$

$$E(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p)$$

Elle renseigne sur la performance "précision"

$E(\infty)$ est dite

erreur statique de position

erreur indicielle

si $e(t) = \alpha u(t)$
échelon de position

erreur statique de vitesse

erreur de traînage

si $e(t) = \alpha t u(t)$
échelon de vitesse (Rampe)

Perturbations

- Une perturbation $\bar{Z}(p)$ est une autre entrée.
- On trouve souvent :

$$S(p) = H_1(p) E(p) + H_2(p) \bar{Z}(p)$$

sortie du système en présence des 2 entrées simultanément

$\bar{Z}(p)$ reliée à la borne (+)

$\bar{Z}(p)$ reliée à la borne (-)

* on a 2 méthodes pour trouver $S(p)$

Méthode 1

Superposition

- 1^{ère} étape: $E(p) \neq 0$
 $Z(p) = 0$

on trouve $S_1(p) = H_1(p) \cdot E(p)$

- 2^{ème} étape: $Z(p) \neq 0$
 $E(p) = 0$

on trouve $S_2(p) = H_2(p) Z(p)$

- 3^{ème} étape: $E(p) \neq 0$
 $Z(p) \neq 0$

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p)$$

Méthode 2

Méthode directe

on écrit S en
fonction de E
et Z .

~ Correction (régulation) ~

* Pour corriger (régler) les performances d'un système asservi, on utilise un régulateur (correcteur) qu'on le note par $R(p)$ ou $C(p)$.

* Types du régulateur :

* Type P (Proportionnel) $\rightarrow R(p) = K(\text{cte})$

* Type I (Intégral) $\rightarrow R(p) = \frac{K}{p}$

* Type D (Dérivé) $\rightarrow R(p) = K p$

* Type PI $\rightarrow C(p) = K_1 + \frac{K_2}{p}$

* Type PD $\rightarrow C(p) = K_1 + K_2 p$

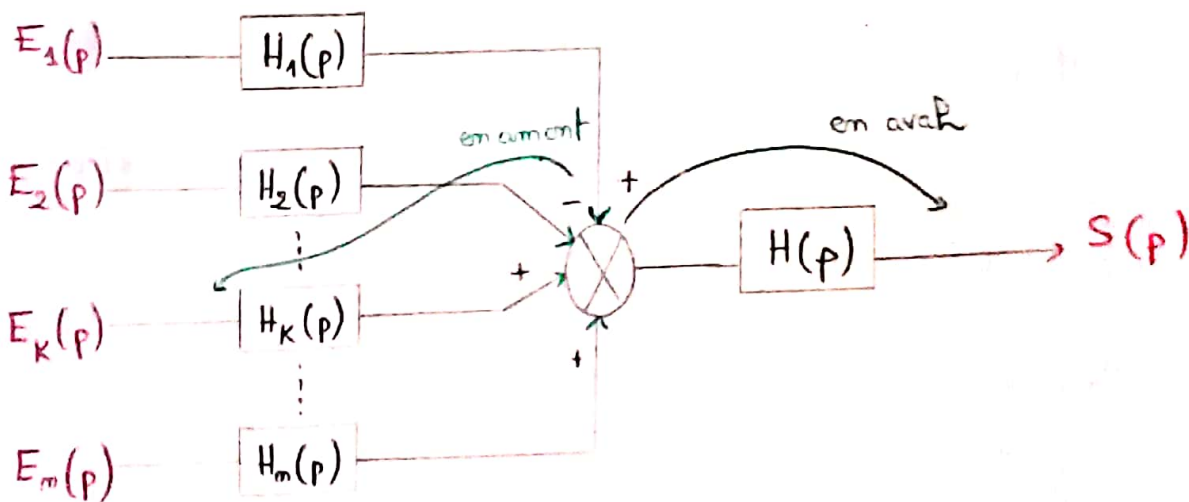
* Type PID $\rightarrow R(p) = K_1 + \frac{K_2}{p} + K_3 p$

Manipulation des schémas fonctionnels

- Déplacement d'un point de sommation :

- * Un point de sommation
 - une seule sortie
 - Plusieurs entrées

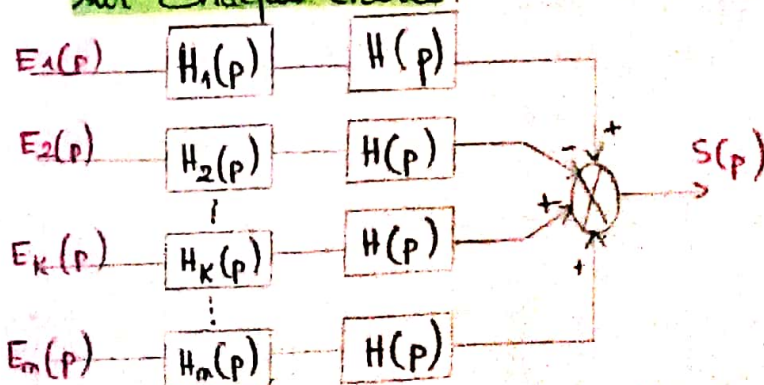
Schéma fonctionnel général



on peut déplacer le point de sommation

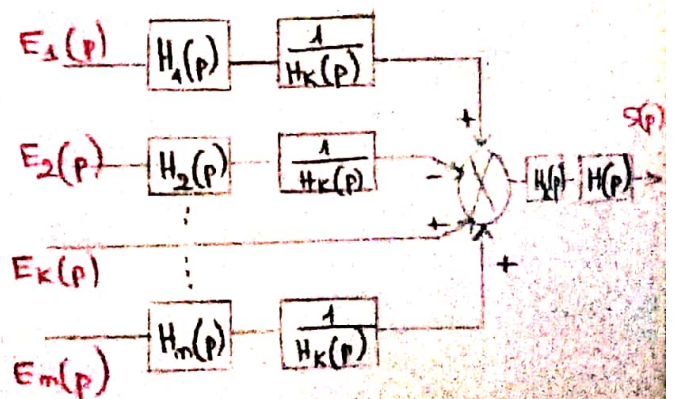
en aval

on ajoute un bloc $\frac{1}{H(p)}$ sur la sortie et un bloc $H(p)$ sur chaque entrée.



en amont

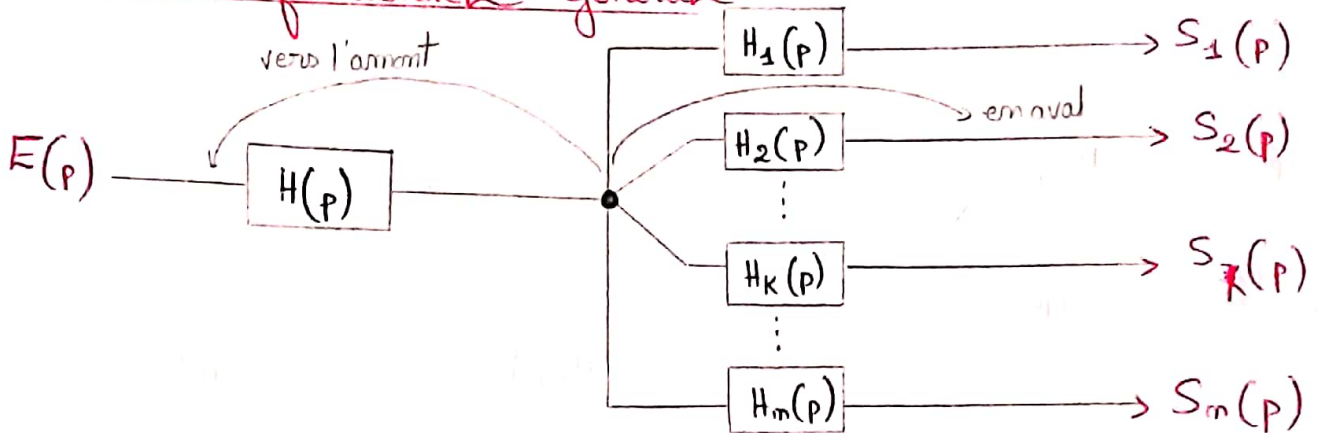
on ajoute un bloc $\frac{1}{H_K(p)}$ sur l'entrée du bloc $H_K(p)$ et sur chaque entrée et un bloc $H_K(p)$ sur la sortie



- Déplacement d'un point de prélèvement :

- Un point de prélèvement $\rightarrow$ une seule entrée $\rightarrow$ plusieurs sorties

• Schéma fonctionnel général :



on peut déplacer le point de prélèvement

Vers l'avant

Sur la sortie de l'un des blocs

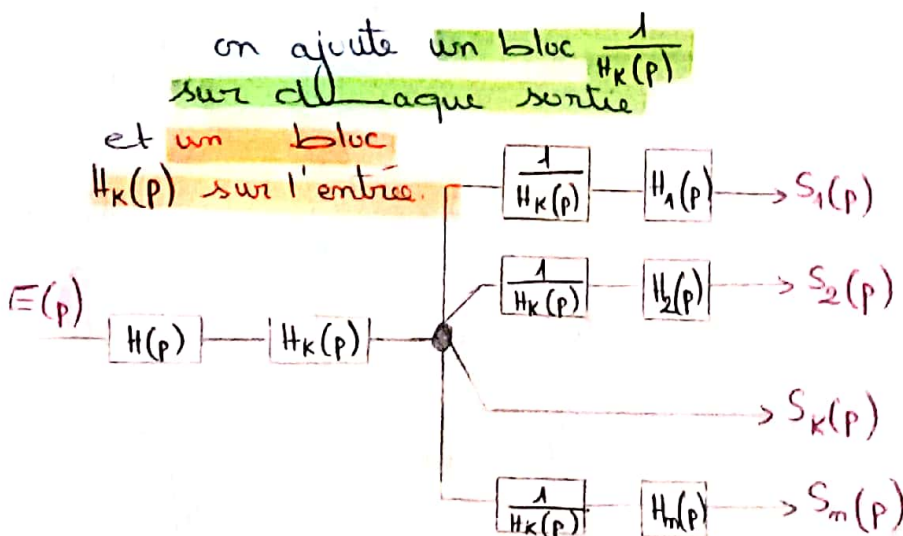
Vers l'arrière

on ajoute un

bloc $\frac{1}{H(p)}$

sur l'entrée et un bloc

$H(p)$ sur chaque sortie.



Chap 5: Système Linéaire de 1^{er} ordre

* 1^{er} ordre fondamental :

- Équation différentielle :

$$\tau \dot{y} + y = K e$$

$K > 0$
 $\tau > 0$

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$$K : \text{Gain} = \lim_{p \rightarrow 0} H(p)$$

$$K = \frac{y(\infty)}{e(\infty)}$$

- Réponses :

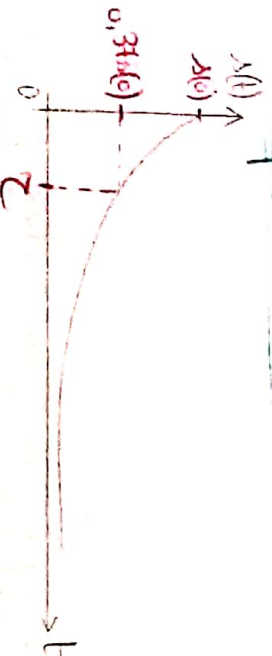
* Réponse impulsionnelle :

$$e(t) = \alpha \delta(t) \longrightarrow E(p) = \alpha$$

$$\text{ou } S(p) = H(p) E(p) = \frac{K\alpha}{\tau} \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{K\alpha}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} u(t)$$

Représentation :



$$\left\{ \begin{array}{l} s(0) = \frac{K\alpha}{\tau} \\ s(\infty) = 0 \\ s(\tau) = 0,37 s(0) \end{array} \right.$$

Pour déterminer τ :

• Soit par la tangente

• Soit par 0,37 s(0)

①

~ Diagramme de Bode ~

* 1^{er} ordre fondamental :

* Pulsation de
cassure :

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$\left. \begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log |H(j\omega)| \\ \varphi &= \arg(H(j\omega)) \end{aligned} \right\} \text{Cas général}$$

on on a : $H(j\omega) = \frac{k}{1+j\omega\tau}$
 $k = 1$

D'où $\left\{ \begin{aligned} G_{dB}(\omega) &= -10 \log [1 + (\omega\tau)^2] + 20 \log k \\ \varphi(\omega) &= -\text{Arctg}(\omega\tau) \end{aligned} \right.$ (La phase ne dépend de k)
Pour $k \neq 1$

Pour $\omega = \omega_0 \rightarrow \left\{ \begin{aligned} G_{dB}(\omega_0) &= -3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_0) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right.$

- En basses fréquences :

$$\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{\tau} \\ \rightarrow \omega\tau \ll 1$$

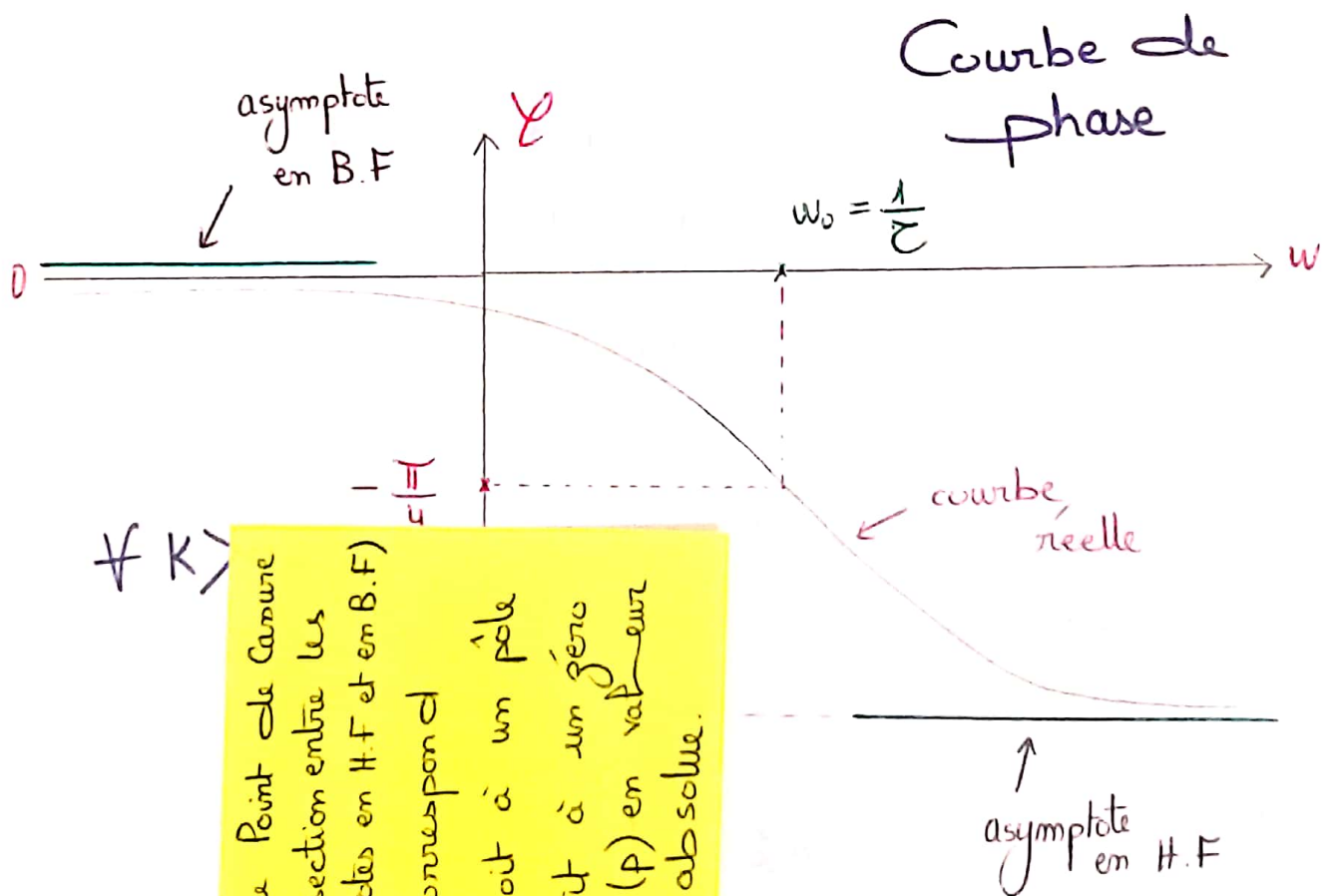
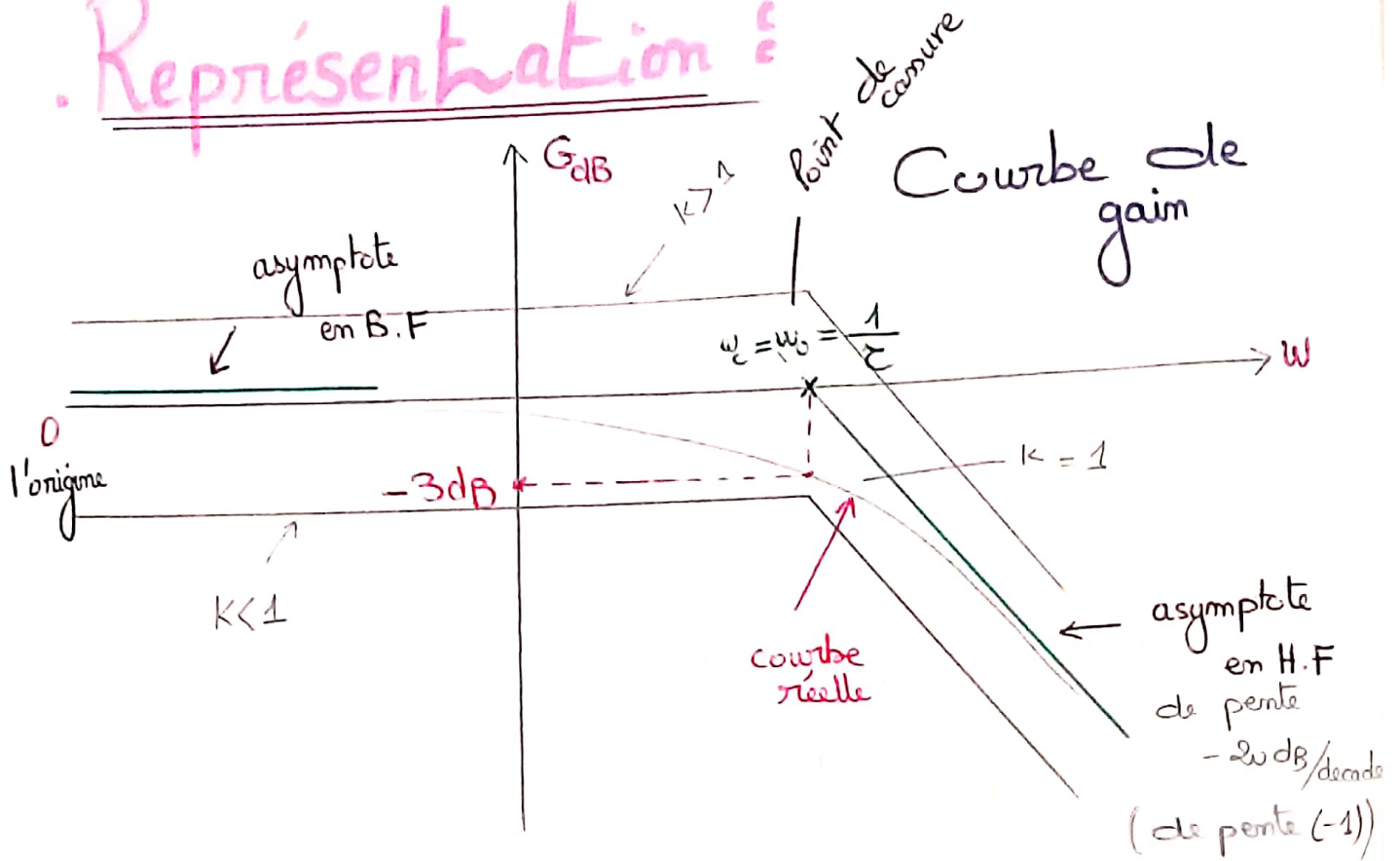
Donc $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$

- En hautes fréquences :

$$\omega \gg \omega_0 \\ \rightarrow \omega\tau \gg 1$$

Donc $G_{dB} = -20 \log(\omega\tau)$

Représentation :



$\forall K > 1$
 Chaque Point de Cornure
 (intersection entre les
 asymptotes en H.F et en B.F)
 correspond
 soit à un pôle
 soit à un zéro
 de $H(p)$ en valeur
 absolue.

Chap 6: Système fondamental de 2^{ème} ordre

- Équation différentielle :

$$a_2 s'' + a_1 s' + a_0 s = b_0 e$$

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2m \omega_0 p + \omega_0^2}$$

Un second ordre est stable si a_2, a_1 et a_0 sont non nuls et de même signe.

avec :

- $K = \lim_{p \rightarrow 0} H(p) = \frac{b_0}{a_0}$:
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$: Pulsation propre non amortie (ou ω_n pulsation naturelle)
- $m = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}$: Coefficient (Facteur) d'amortissement

$$m > 0$$

Un système est stable si $m > 0$

* Implantation polaire :

- Il s'agit de placer les 2 pôles de $H(p)$ dans le plan de Laplace (plan complexe).

Équation caractéristique : $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \Delta' = \omega_0^2 (m^2 - 1) \begin{cases} \Delta' > 0 \\ \Delta' = 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

1^{er} cas : $\Delta' > 0 \Rightarrow m > 1$

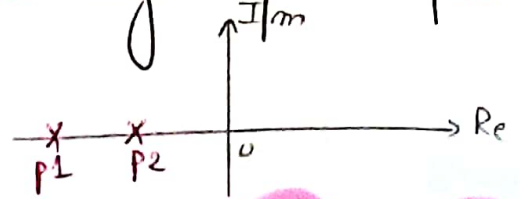
on a donc 2 pôles réels et distincts :

$$p_1 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} < 0$$

$$p_2 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} < 0$$

Le système est stable.

→ Régime aperiodique



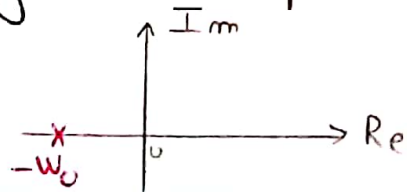
2^{ème} cas : $\Delta' = 0 \Rightarrow m = 1$

On a un pôle double réel

$$p_1 = p_2 = -\omega_0 < 0$$

Le système est stable

→ Régime critique



3^{ème} cas : $\Delta' < 0 \Rightarrow 0 < m < 1$

on a 2 pôles complexes conjugués

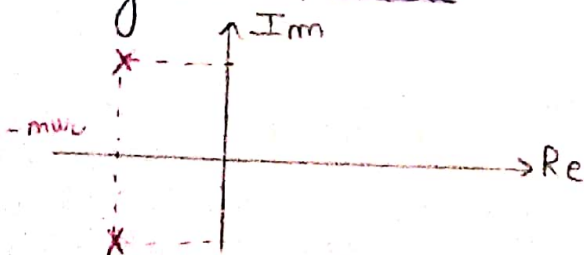
$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

Si $0 < m < 1$: Régime pseudo-périodique

$$\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = -m\omega_0 < 0$$

Le système est stable



Si $m = 0$: Régime périodique

$$\text{Re}[p_1] = \text{Re}[p_2] = 0$$

Le système est instable



Réponse à un système fondamental 2ème ordre

1) Réponse indicielle :

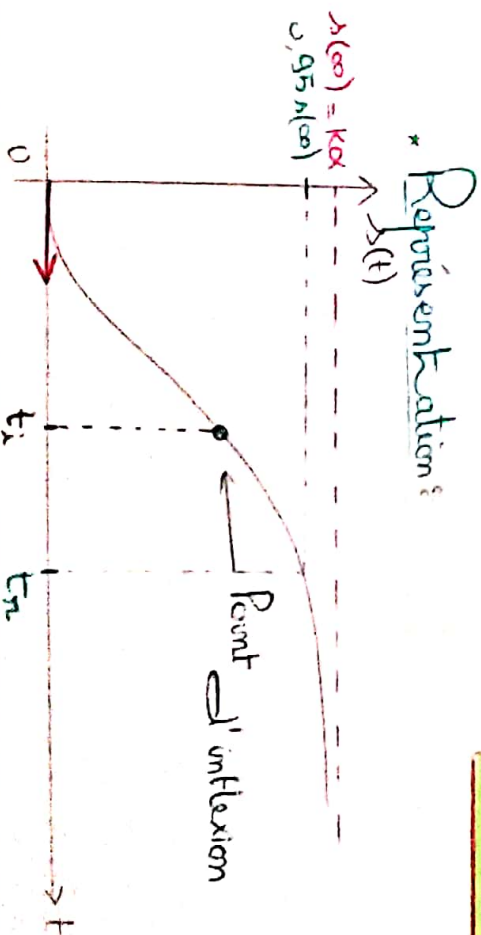
Echelon $\rightarrow$ la position $e(t) = \alpha u(t) \rightarrow E(p) = \frac{\alpha}{p}$

Réponse aperiodique $m > 1$

- fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Avec $\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} > 0 \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} > 0 \\ \tau_1 \neq \tau_2 \end{cases}$ (cas $p_1 < 0$ et $p_2 < 0$)



Donc :

$$S(p) = K\alpha \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\frac{-\tau_1}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{p + \frac{1}{\tau_2}} \right) \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = K\alpha \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] u(t)$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s'(\infty) = K\alpha \\ s'(t) = 0 \\ s''(t) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} D = 0 \\ \text{d'apurement} \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow t_i = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{\tau_1}{\tau_2}$$

Régime critique $m = 1$

- Fonction de Transfert :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)^2}$$

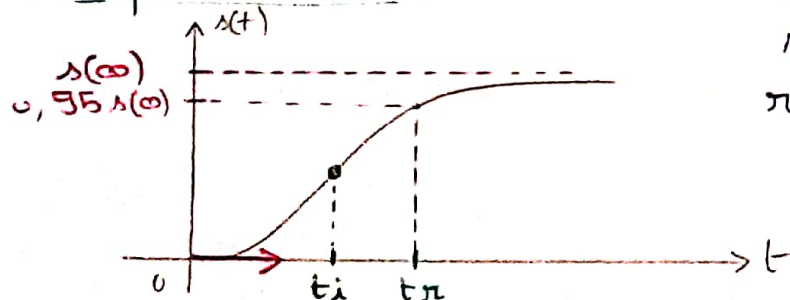
Donc on a :

$$S(p) = K\alpha \left[\frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{\tau}}{(p + \frac{1}{\tau})^2} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = K\alpha \left[1 - \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] u(t)$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(\infty) = K\alpha \\ s'(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \\ s''(t) = 0 \Rightarrow t_i = \tau \end{cases} ; D = 0$$

* Représentation :



Oma le max de rapidité

Régime périodique $m = 0$

$$\omega_p = \omega_0$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Voir régime pseudo-périodique})$$

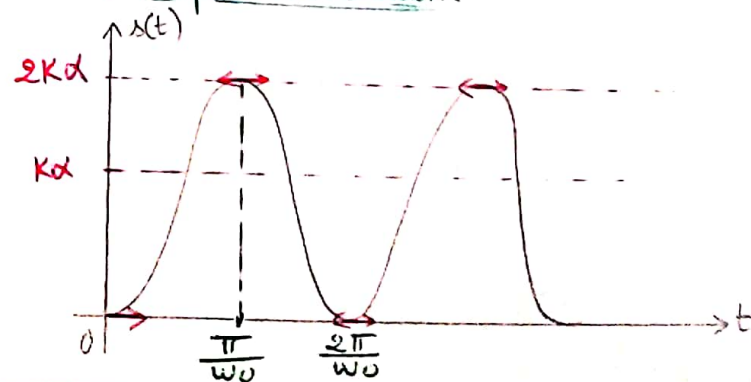
on a :

$$s(t) = K\alpha \left(1 - \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \right) u(t)$$

$$= K\alpha \left(1 - \cos(\omega_0 t) \right) u(t)$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ \text{Période propre : } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \\ \text{Dépassement : } 100\% \end{cases}$$

* Représentation :



Régime pseudo-périodique

$$0 < m < 1$$

- Fonction de Transfert :

$$H(p) = \frac{K p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

Donc on a : $S(p) = K \alpha \left(\frac{1}{p} + \left(\frac{p}{p_1 - p_2} \times \frac{1}{p - p_1} \right) + \frac{\frac{-p_1}{p_1 - p_2}}{p - p_2} \right)$

$$\Rightarrow s(t) = K \alpha \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_p} e^{-m \omega_0 t} \sin(\omega_p t + \Psi) \right] u(t)$$

Avec $\begin{cases} \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \\ \Psi = \arccos(m) \end{cases}$: pseudo-pulsation (pulsation des oscillations amorties)

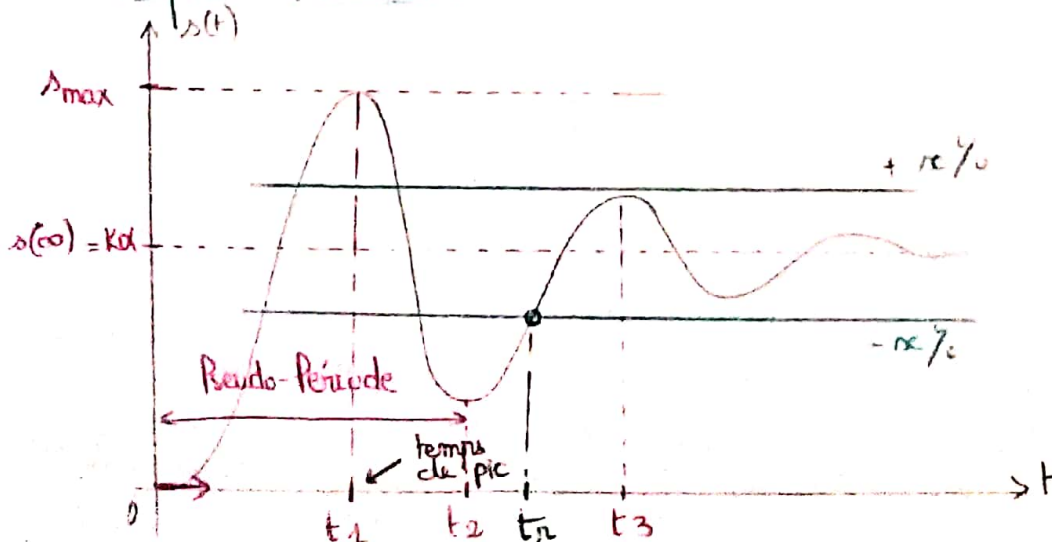
$$\begin{aligned} \cos \Psi &= m \\ \sin \Psi &= \sqrt{1 - m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(\infty) = K \alpha \\ s'(t_k) = 0 \\ s''(t_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_k = \frac{k\pi}{\omega_p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow t_i = \frac{k\pi + \Psi}{\omega_p}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

• Représentation :



Il y a déphasement

Pseudo-période

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} = 2t_{pic}$$

Temps de pic

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

$$s(t_{pic}) = s_{max}$$

Temps de réponse

★ c'est le 1^{er} instant pour lequel $s(t)$ pénètre dans l'intervalle $\pm \frac{sc}{\%}$ de $s(\infty)$ et ne sort pas

$$t_r \simeq \frac{1}{m\omega_0} \ln \frac{100}{sc}$$

$$\text{Pour } sc=5 : t_r \simeq \frac{3}{m\omega_0}$$

Dépassement

$$D = \frac{s_{max} - s(\infty)}{s(\infty)}$$

(Sans unité)

$$\text{et comme } s_{max} = K\alpha \left[1 + e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}} \right]$$

Donc

$$D = e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

$$m \nearrow \Rightarrow D \searrow$$

$$m \rightarrow 1 \Rightarrow D \rightarrow 0$$

$$m \rightarrow 0 \Rightarrow D \rightarrow 1$$

Résonance :

* Pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$$

* Condition de résonance :

$$m < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$$

* Pic de résonance :

en échelle linéaire

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

en échelle logarithmique

$$|H(j\omega_r)|_{dB} = 20 \log \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

* Facteur de résonance :

$$Q = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

* Pulsation de coupure ω_c :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H|_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dBmax} - 3 \text{ dB}$$

* Bande passante :
 ω_{BP}

Domaine de variation de ω pour lequel

$$G(\omega) > G(\omega_c)$$

~ Stabilité ~

- La plus importante des performances d'un système est la stabilité.

Stabilité

La condition de base de la stabilité est la suivante :

Un système est stable

ssi tous les pôles de sa fonction de Transfert sont à partie réelle négative stricte.

- Si l'ordre du système est > 2 , on utilise la méthode suivante :

Critère algébrique de Routh

- Ce critère est composé de 2 conditions :

→ Une 1^{ère} condition nécessaire mais non suffisante :

Il faut que tous les coefficients a_i du $D(p)$ soient non nuls et de même signe.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le système est instable, si elle est vérifiée, on passe à la 2^{ème} condition :

→ 2^{ème} condition nécessaire est suffisante :

Après la 1^{ère} condition, on trace le tableau de Routh suivant :

	colonne 1	colonne 2	...
p^m	a_m	a_{m-2}	
p^{m-1}	a_{m-1}	a_{m-3}	
p^{m-2}	A_{m-2}	B_{m-2}	
p			
p^0	A	B	

$$\text{avec } A_{m-2} = \frac{a_{m-1} \cdot a_{m-2} - a_m \cdot a_{m-3}}{a_{m-1}}$$

la plus importante des performances d'un système est la stabilité.

Stabilité

la condition de base de la stabilité est la suivante :

Un système est stable si tous les pôles de sa fonction de Transfert sont à partie réelle négative.

Si l'ordre du système est > 2 , on utilise la méthode suivante :

Critère algébrique de Routh

Ce critère est composé de 2 conditions :

➔ Une 1^{ère} condition nécessaire mais non suffisante :

Il faut que tous les coefficients a_i du $D(p)$ soient non nuls et de même signe.

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, le système est instable.

Condition :

➔ 2^{ème} condition :
Après la 1^{ère} condition :

avant :

	colonne 1	colonne 2	colonne 3
p^m	a_m	a_{m-2}	
p^{m-1}	a_{m-1}	a_{m-3}	
p^{m-2}	a_{m-2}	a_{m-4}	
p			
p^0	A	B	

Si m est l'ordre de $D(p)$, alors on a :

- $m+1$ lignes
- $E(\frac{m}{2})+1$ colonnes

Le critère de Routh dit : pour que le système soit stable, il faut que tous les termes de la 1^{ère} colonne soient de même signe (que les a_i)

a_{m-1}

Critère graphique de Revers

* Pour étudier ce critère, il faut revenir au diagramme de Bode et à l'analyse harmonique et définir :

→ un point critique par une FTBO $H_{BO}(j\omega) = -1$
 donc $|H(j\omega)| = 1$ et $\begin{cases} G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 0 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = \varphi = -\pi \end{cases}$

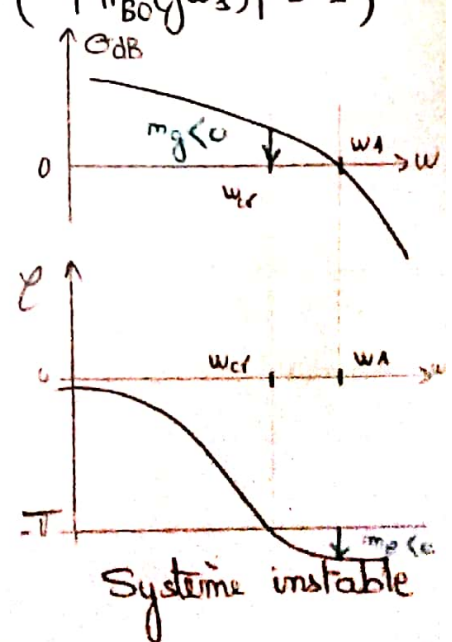
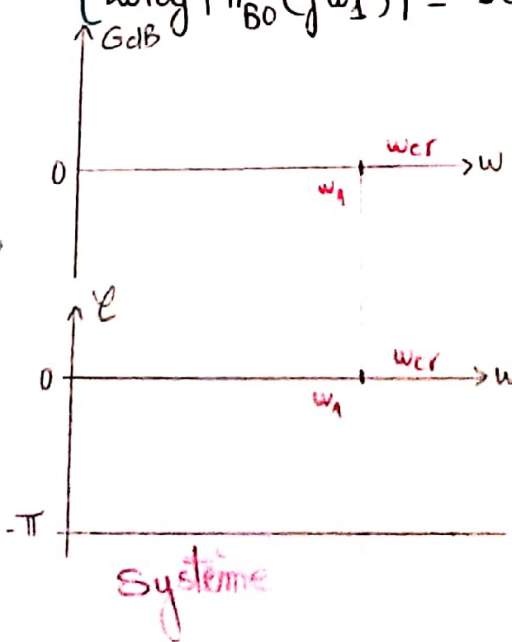
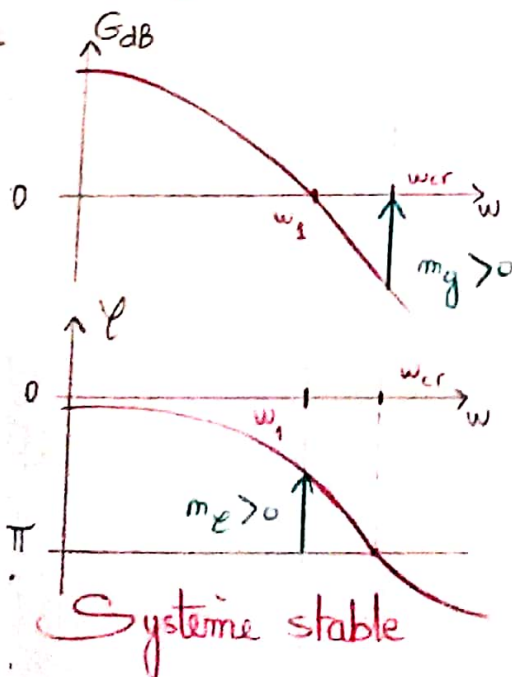
Ce point critique définit la limite de stabilité.

→ Le critère de Revers dit qu'un système est stable si, lorsque la courbe de phase passe par $-\pi$, la courbe de gain est $< 0 \text{ dB}$.

→ Pour déterminer la position du système par rapport au point critique, on définit 2 marges de stabilité :

- Marge de gain : $\begin{cases} m_g = 0 - 20 \log |H_{BO}(j\omega_{cr})| \\ \arg(H_{BO}(j\omega_{cr})) = -\pi \end{cases}$

- Marge de phase : $\begin{cases} m_\varphi = \pi + \arg(H_{BO}(j\omega_1)) \\ 20 \log |H_{BO}(j\omega_1)| = 0 \text{ dB} \quad (|H_{BO}(j\omega_1)| = 1) \end{cases}$



* Pour étudier ce critère, il faut revenir au diagramme de Bode et à l'analyse harmonique et définir :

→ un point critique par une FTBO $H_{BO}(j\omega) = -1$
 donc $|H(j\omega)| = 1$ et $\begin{cases} G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 0 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = \varphi = -\pi \end{cases}$

Ce point critique définit la limite de stabilité.

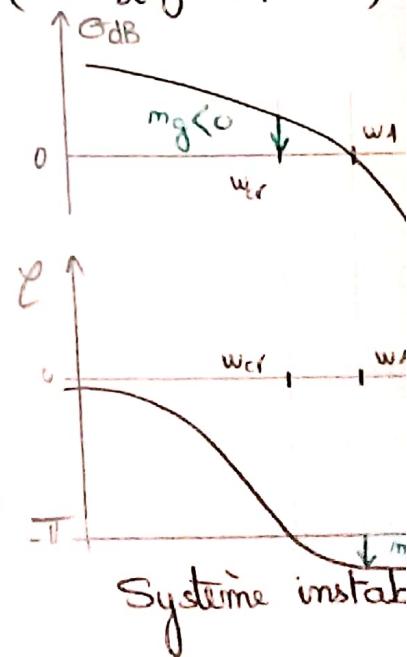
→ le critère de Revers dit qu'un système est stable si, lorsque la courbe de phase passe par $-\pi$, la courbe de gain est $< 0 \text{ dB}$.

→ Pour déterminer la position du système par rapport au point critique, on définit 2 marges de stabilité.

- Marge de gain : $\begin{cases} m_g = 0 - 20 \log |H_{BO}(j\omega_{cr})| \\ \arg(H_{BO}(j\omega_{cr})) = -\pi \end{cases}$

- Marge de phase : $\begin{cases} m_\varphi = \pi + \arg(H_{BO}(j\omega_1)) \\ 20 \log |H_{BO}(j\omega_1)| = 0 \text{ dB} \quad (|H_{BO}(j\omega_1)| = 1) \end{cases}$

G_{dB}	Système Stable	Système Critique	Système instable
Critère de Revers	$\omega_{cr} > \omega_1$	$\omega_{cr} = \omega_1$	$\omega_{cr} < \omega_1$
Marge de Gain	$m_g > 0$	$m_g = 0$	$m_g < 0$
Marge de Phase	$m_\varphi > 0$	$m_\varphi = 0$	$m_\varphi < 0$



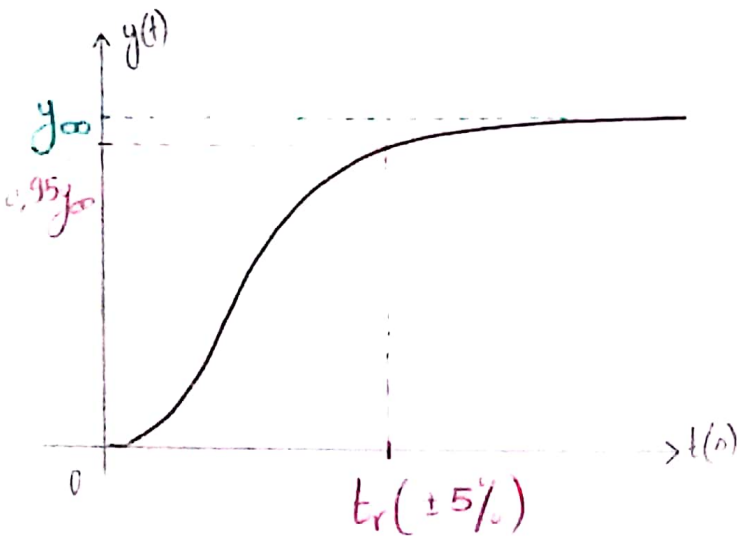
Rapidité

Un système est d'autant plus rapide que son temps de réponse t_r est d'autant plus ^{onnes} petit.

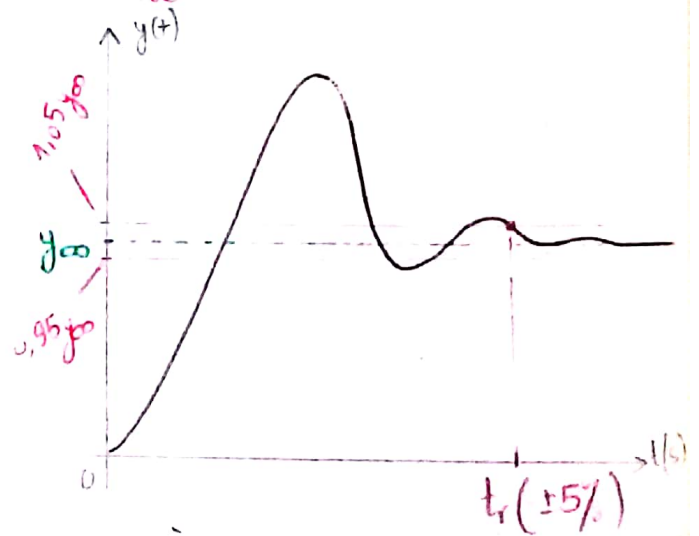
* L'étude de la rapidité concerne la durée du régime transitoire. La possède un régime transitoire très court, dépassement et à temps de montée minimal.

→ Pour analyser la rapidité, on définit le temps de réponse à $\pm 5\%$ (appelé aussi temps de stabilisation) par le temps mis par le système pour que sa réponse atteigne $\pm 5\%$ de sa valeur finale.

Pour cela on note l'intervalle $[0,95y_\infty, 1,05y_\infty]$ comme la bande de stabilité.



- 1^{er} ordre
- 2^{ème} ordre aperiodique
- 2^{ème} ordre critique



- 2^{ème} ordre pseudopériodique
- le dernier point où la réponse entre dans la bande de stabilité sans sortir.

Quelques formules à utiliser :

→ Pour les systèmes du 1^{er} ordre :

Plus τ plus la rapidité

$$t_r(\pm 5\%) \approx 3\tau$$

→ Pour les systèmes de 2^{ème} ordre, c'est encore plus compliqué car le temps de réponse dépend du coefficient d'amortissement :

• Pour $m = 0,707$



$$t_r(\pm 5\%) = \frac{3}{\omega_0}$$

Oscillation propre non amortie

• Pour $m \ll 1$



$$t_r(\pm 5\%) \approx \frac{3}{m\omega_0}$$

• Pour $m \gg 1$



$$t_r(\pm 5\%) \approx \frac{6m}{\omega_0}$$

* La rapidité peut être étudiée aussi avec la Bande Passante (BP) qui est définie par l'intervalle $]0, \omega_c]$

- 1^{er} ordre :

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Oscillation de coupure

Plus $\tau \downarrow$, $\omega_c \uparrow$ plus BP est étendue donc rapidité $\uparrow$

- 2^{ème} ordre :

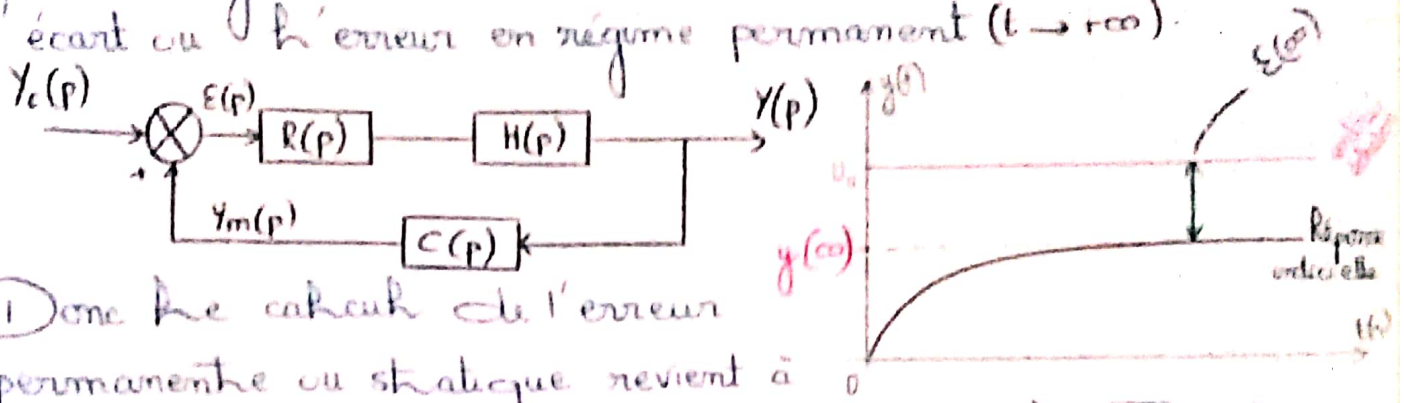
$$\omega_c = \omega_0$$

Plus $\omega_0 \uparrow$, $\omega_c \uparrow$ donc rapidité $\uparrow$

- Un système est d'autant plus rapide que sa bande passante à ab en boucle ouverte (l'intervalle $]0, \frac{1}{\tau}]$) est d'autant plus large.

~ Précision ~

• L'analyse de précision est basée sur l'étude de l'écart ou l'erreur en régime permanent ($t \rightarrow +\infty$).



1) Donc le calcul de l'erreur permanente ou statique revient à calculer la limite à $t \rightarrow +\infty$ en utilisant le Théorème de valeur finale :

$$E_{\infty} = E(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p)$$

Avec $E(p)$ peut être calculé à partir de la FTEE :

$$E(p) = \frac{Y_c(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

→ $E_{\infty} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{Y_c(p)}{1 + H_{BO}(p)}$ donc elle dépend de la consigne et de la FTBO

→ Si l'entrée est échelon → Erreur de position E_p

→ Si l'entrée est Rampe → Erreur de vitesse ou de traînage E_v

• L'erreur dépend aussi de la classe de la FTBO

1^{er} cas : Echelon et classe (FTBO) = 0 → Erreur de position

$$E_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p(1 + k \frac{1 + \dots}{1 + \dots})} = \frac{1}{1 + K}$$

Sachant que la FTBO a la forme générale suivante :

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p^c} \frac{1 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \dots + \alpha_n p^{n-c}}$$

2ème cas : Echelon et classe (FTBO) = 1 $\Rightarrow$ Erreur de position

$$E_p = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p(1 + \frac{k}{p} \cdot \frac{1+\dots}{1+\dots})} = 0$$

3ème cas : Rampe et classe (FTBO) = 0 $\Rightarrow$ Erreur de vitesse

$$E_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^0(1 + k \cdot \frac{1+\dots}{1+\dots})} = \infty$$

4ème cas : Rampe et classe (FTBO) = 1 $\Rightarrow$ Erreur de vitesse

$$E_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^1(1 + \frac{k}{p} \cdot \frac{1+\dots}{1+\dots})} = \frac{1}{k}$$

5ème cas : Rampe et classe (FTBO) = 2 $\Rightarrow$ Erreur de vitesse

$$E_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^2(1 + \frac{k}{p^2} \cdot \frac{1+\dots}{1+\dots})} = 0$$

Conclusion 1 : l'erreur statique de position est nulle pour une classe de la FTBO ≥ 1 (tjrs et sans faire de calcul).

Conclusion 2 : l'erreur statique de vitesse est nulle pour une classe de la FTBO ≥ 2

~ Correcteurs ~

* On utilise dans notre cas, 4 types de correcteurs :

Type 1 : Correcteur Proportionnel (P)

de fonction de transfert $R(p) = K_p$ $\xrightarrow{E(p)}$ $\boxed{K_p}$ $\xrightarrow{U(p)}$

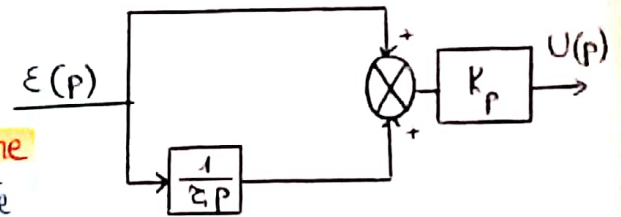
Ses caractéristiques :

- Plus K_p (grande) plus la rapidité (améliorée) et la stabilité (dégradée)
- Plus K_p (petite) plus la stabilité (améliorée) et la rapidité (dégradée)

Type 2 : Correcteur Proportionnel Intégral (PI)

$$R(p) = K_p + \frac{K_i}{p} = K_p \left(1 + \frac{1}{z_i p} \right)$$

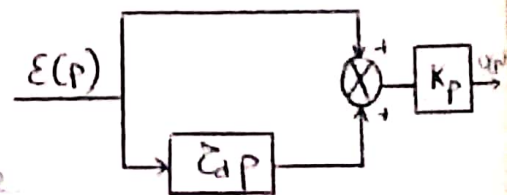
Ce correcteur annule l'erreur statique de position et améliore la précision car l'intégral ajoute 1 à la classe de FTBC.



Type 3 : Correcteur Proportionnel Dérivé (PD)

$$R(p) = K_p + K_d p = K_p (1 + z_d p)$$

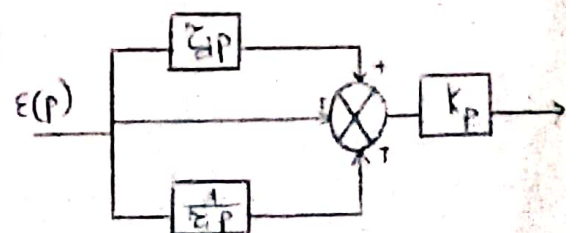
Ce régulateur améliore la stabilité en diminuant les dépassements en amplitude et en nombre.



Type 4 : Correcteur Proportionnel - Intégral - Dérivé (PID)

$$R(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p = K_p \left(1 + \frac{1}{z_i p} + z_d p \right)$$

Ce régulateur améliore pratiquement toutes les performances : stabilité, précision et rapidité.



Codage de l'information

* Les systèmes de numération :

- Nombre décimal : Base 10 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
- Code Binaire : Base 2 (0, 1)
- Code octal : Base 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
- Code Hexadécimal : Base 16 (0, 1, ..., 9, A, ..., F)
A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15

Codage : Du Base 10 $\xrightarrow{\text{Vers}}$ Base 2 Base 8 Base 16

1) Base 10 $\rightarrow$ Base 2 :

On divise le nombre par 2 jusqu'à avoir 0.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 2} \\ 1 \quad 6 \overline{) 2} \\ 0 \quad 3 \overline{) 2} \\ 1 \quad 1 \overline{) 2} \\ 1 \quad 0 \end{array}$$

Puis on écrit le nombre du bas vers le haut

D'où $(13)_{10} = (1101)_2$

2) Base 10 $\rightarrow$ Base 8 :

On divise le nombre par 8 jusqu'à avoir 0.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 139 \overline{) 8} \\ 3 \quad 17 \overline{) 8} \\ 1 \quad 2 \overline{) 8} \\ 2 \quad 6 \end{array}$$

D'où $(139)_{10} = (213)_8$

3) Base 10 $\rightarrow$ Base 16 :

On divise le nombre par 16 jusqu'à avoir 0.

Exemple :

$$\begin{array}{r} 139 \overline{) 16} \\ 11 \quad 8 \overline{) 16} \\ 8 \quad 0 \end{array} \quad \text{D'où } (139)_{10} = (8B)_{16}$$

Décodage : Base 2 $\xrightarrow{\text{Vers}}$ Base 10 Base 8 Base 16

* On multiplie chaque chiffre par le numéro de la base à la puissance de son ordre en commençant de droite vers la gauche.

Exemples :

• $(101101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 4 + 8 + 32 = (45)_{10}$

• $(7502)_8 = 2 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^3 = 2 + 320 + 3584 = (3906)_{10}$

• $(A093)_{16} = 3 \cdot 16^0 + 9 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^2 + A \cdot 16^3 = 3 + 144 + 40960 = (41107)_{10}$

Transcodage : le passage entre les bases autres que la base 10

1) Base 2 $\leftrightarrow$ Base 8 :

0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111

Exemple :

• $(101001011)_2 = (213)_8$

On divise le nombre en groupes de 3

2) Base 2 ↔ Base 16

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Exemple:

• $(10001011)_2 = (8B)_{16}$ On divise le nombre en groupes de 4

• $(A033)_{16} = (1010000100110011)_2$

* Code Binaire naturel

* Code Binaire réfléchi

Nombre décimal	Code Binaire pur				Nombre décimal	Code Binaire réfléchi			
	B ₄	B ₃	B ₂	B ₁		G ₄	G ₃	G ₂	G ₁
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	2	0	0	1	1
3	0	0	1	1	3	0	0	1	0
4	0	1	0	0	4	0	1	1	0
5	0	1	0	1	5	0	1	1	1
6	0	1	1	0	6	0	1	0	1
7	0	1	1	1	7	0	1	0	0
8	1	0	0	0	8	1	1	0	0
9	1	0	0	1	9	1	1	0	1
10	1	0	1	0	10	1	1	1	1
11	1	0	1	1	11	1	1	1	0
12	1	1	0	0	12	1	0	1	0
13	1	1	0	1	13	1	0	1	1
14	1	1	1	0	14	1	0	0	1
15	1	1	1	1	15	1	0	0	0

* Pour passer au Code Binaire réfléchi dans la table de vérité, il suffit de faire des miroirs.

Convention:

1) Binaire naturel → Binaire réfléchi

- Le 1^{er} chiffre (à gauche) reste le même.
- Si $B_{j+1} = B_j$ alors le chiffre en binaire réfléchi est 0
- Si $B_{j+1} \neq B_j$ alors le chiffre en binaire réfléchi est 1

Exemple:

→ miroir (2b)

→ miroir (4b)

Binaire pur: $B_4 B_3 B_2 B_1$
 $1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$
 $1 \neq 0 \neq 1 \neq 1$

2) Binaire réfléchi → Binaire pur

- Le 1^{er} chiffre reste le même.
- On compare le bit du rang $j+1$ du binaire pur à celui du rang j du binaire réfléchi.
- Si $B_{j+1} = G_j$ alors $B_j = 0$
- Si $B_{j+1} \neq G_j$ alors $B_j = 1$

Exemple:

Binaire réfléchi: $G_4 G_3 G_2 G_1$
 $1 \ 1 \ 0 \ 1$

Binaire pur: $B_4 B_3 B_2 B_1$
 $1 \ 0 \ 0 \ 1$