

Torseur cinétique

$$\left\{ \mathcal{C}(\Sigma/R) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P}(\Sigma/R) \\ \vec{\sigma}_A(\Sigma/R) \end{array} \right\}, \forall A$$

avec $\vec{P}$: résultante cinétique

$\vec{\sigma}_A$: moment cinétique au point A

$$\vec{P}(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

* Cas d'un solide matériel indéformable

$$\ominus \vec{P}(S/R) = m \cdot \vec{V}(G/R)$$

$\ominus \forall A \in S:$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + [\vec{I}_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

• $A \equiv G$:

$$\vec{\sigma}_G(S/R) = [\vec{I}_G(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

• A fixe dans R:

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = [\vec{I}_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

• Mouvement de translation de S/R:

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)$$

$\ominus \forall A:$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \vec{AG} \wedge \vec{V}(G/R) + [\vec{I}_G(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

$\Rightarrow$ Théorème de König.

$\forall A, B:$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{P}(S/R) \wedge \vec{AB}$$

* Cas d'un ensemble de solides

$$\left\{ \mathcal{C}(E/R) \right\}_A = \sum_{i=1}^n \left\{ \mathcal{C}(S_i/R) \right\}_A$$

Torseur dynamique

$$\left\{ \mathcal{D}(\Sigma/R) \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}(\Sigma/R) \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R) \end{array} \right\}$$

avec: $\vec{A}$: résultante dynamique

$\vec{\delta}_A$: moment dynamique en A

$$\vec{A}(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{\Gamma}(P/R) dm$$

$$\vec{\delta}_A(\Sigma/R) = \int_{P \in \Sigma} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm$$

* Cas d'un solide matériel indéformable

$$\ominus \vec{A}(S/R) = m \vec{\Gamma}(G/R)$$

$\ominus \forall A \in S:$

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt/R} + m \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

• $A \equiv G$:

$$\vec{\delta}_G(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_G(S/R)}{dt/R}$$

• A fixe dans R:

$$\vec{\delta}_A(S/R) = \frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt/R}$$

⊖ $\forall A, B:$

$$\vec{\sigma}_B(S/R) = \vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{A}(S/R) \wedge \vec{AB}$$

Energie cinétique:

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \vec{V}(P/R)^2 \cdot dm.$$

l'unité est joule (J)

* Cas d'un solide matériel indéformable

⊖ $\forall A \in (S):$

$$\begin{aligned} E_c(S/R) &= \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}_{(S/R)} \right\}_A \otimes \left\{ \mathcal{V}_{(S/R)} \right\}_A \\ &= \frac{1}{2} \left[\vec{p}_{(S/R)} \cdot \vec{V}_{(A \in S/R)} + \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R) \right] \end{aligned}$$

• En G:

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}(G/R)^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot ([I_G(S)] \cdot \vec{\Omega}_{S/R})$$

• A fixe dans R:

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot ([I_A(S)] \cdot \vec{\Omega}_{(S/R)})$$

• (S) en rotation autour d'un axe fixe par A
(A, $\vec{z}$)

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} I_{A3} \cdot \omega^2$$

avec I_{A3} : moment d'inertie de (S) %

$\vec{\alpha}(A, \vec{z})$

• (S) en translation:

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}(G/R)^2$$

Remarque:

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}_A(S/R)}{dt/R} \right] \cdot \vec{u} = \frac{d(\vec{\sigma}_A(S/R) \cdot \vec{u})}{dt/R} - \vec{\sigma}_A(S/R) \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]$$

1) Principe fondamental de la Dynamique

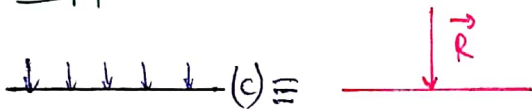
$$\exists R_g / \forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/R_g)} \right\}_A = \left\{ \mathcal{Z}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\}_A$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(\Sigma/R_g)} \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R_g) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \\ \vec{M}_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{array} \right\}_A$$

avec

 $\vec{A}$: résultante dynamique $\vec{\delta}$: moment dynamique en A. $\vec{R}$: résultante des actions mécaniques extérieures $\vec{M}$: moment résultant en A des actions mécaniques extérieures.

* Rappel :

 $\vec{f}_e(p) [N/m]$: densité linéique d'effort $d\vec{f}_e(p) = \vec{f}_e(p) \cdot d\ell$: effort élémentaire [N]

$$\vec{R} = \int_{(p \in C)} d\vec{f}_e(p) = \int_{(p \in C)} \vec{f}_e(p) \cdot d\ell$$

$$\vec{M}_A(\vec{f}_e(p)) = \int_{(p \in C)} \vec{AP} \wedge d\vec{f}_e(p)$$

2) Théorèmes généraux de la Dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{(\Sigma/R_g)} = \vec{R}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \\ \vec{\delta}_A(\Sigma/R_g) = \vec{M}_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \end{array} \right.$$

a) TRD : Théorème de la résultante dynamique

$$\vec{A}_{(\Sigma/R_g)} = \vec{R}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \Leftrightarrow m_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{(C/R_g)} = \vec{R}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)}$$

b) TMD : Théorème des moments dynamique :

$$\forall A ; \vec{\delta}_A(\Sigma/R_g) = \vec{M}_A(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$$

3) Théorème des actions réciproques (mutuelles)

$$\forall A ; \left\{ \mathcal{Z}_{(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)} \right\}_A = - \left\{ \mathcal{Z}_{(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)} \right\}_A$$

4) Cas Particulier de la statique

$$\forall A : \left\{ \mathcal{D}_{(\Sigma/R_g)} \right\}_A = \{0\} \Rightarrow \left\{ \mathcal{Z}_{(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} \right\}_A = \{0\}$$

c'est le Principe fondamental de la statique (PFS)

5) Utilité du RFD : déterminer :

* loi de mouvement (équation de mouvement) : Éq diff d'ordre 2 liant la cause

* l'action mécanique

des astuces :

$$\textcircled{*} \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{matrix} \text{direct} \\ \text{indirect} \end{matrix} \pm \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} / \vec{w} \perp (\vec{u}, \vec{v})$$

$\textcircled{*}$ Liaison hélicoïdale :

$$\text{à droite} \quad \text{à gauche}$$

$$\text{à droite} \quad \text{à gauche}$$

$$\vec{V}(A \in \mathcal{S}_2) = \begin{matrix} \text{à droite} \\ \text{à gauche} \end{matrix} \frac{P}{2\pi} \vec{\Omega}_{(1/2)} \quad \begin{matrix} \text{pas} [\text{mm}/\text{tour}] \\ \text{pas rectil} [\text{mm}/\text{sect}] \end{matrix}$$

(S_1/S_2) : hélicoïdale d'axe $(A, \vec{x})$

$$\{Z_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix} (\vec{x}, \dots)$$

$$\text{avec } L_{12} = \begin{matrix} \text{à gauche} \\ \text{à droite} \end{matrix} \pm \frac{P}{2\pi} X_{12}$$

$$\textcircled{*} \frac{d\vec{y}_1}{dt} = -\vec{\Omega}_{(S_1/S_2)} \wedge \vec{y}_1$$

$\textcircled{*}$ problème plan :

- La résultante doit être dans le plan de symétrie.

- Le moment doit être perpendiculaire au plan de symétrie.

I / Puissance:

- ① Puissance développée par une action mécanique extérieure à un ensemble matériel

$$P(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 / R) = \int_{P \in \Sigma_1} \vec{f}(P) \cdot \vec{v}(P/R) dm$$

- ② Puissance développée par une action mécanique extérieure à un solide indéformable

$$\forall A \in S: P(\Sigma \rightarrow S_1 / R) = \left\{ \vec{z}(\Sigma \rightarrow S_1) \right\}_A \otimes \left\{ \vec{v}_{S_1/R} \right\}_A$$

* indépendante du point.

* la puissance est nulle dans tout repère liés

- ③ Puissance développée par les actions intérieures

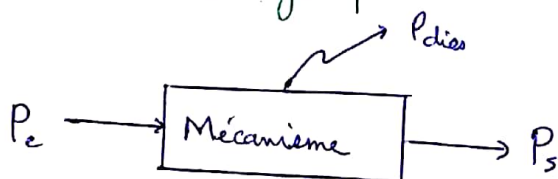
$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = \left\{ \vec{z}(S_1 \rightarrow S_2) \right\} \otimes \left\{ \vec{v}_{S_2/S_1} \right\} = \left\{ \vec{z}(S_2 \rightarrow S_1) \right\} \otimes \left\{ \vec{v}_{S_1/S_2} \right\}$$

Rq: La puissance développée par les inter-efforts de liaison est indépendante du repère de calcul.

- ④ Liaison parfaite

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$$

- ⑤ Rendement énergétique



$$P_e + P_s + P_{diss} = 0$$

$$\eta = \left| \frac{P_s}{P_e} \right|$$

$$|P_{diss}| = (1 - \eta) |P_e|$$

$$= \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) |P_s|$$

II / Energie potentielle:

- ① Energie potentielle d'un système matériel associée à une action mécanique extérieure

$$P(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 / R) = - \frac{dE_p(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 / R)}{dt}$$

* Il faut que la force soit conservative

- ② Energie potentielle de deux systèmes matériels associée à une action mécanique mutuelle:

$$P(\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2) = - \frac{dE_p(\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_2)}{dt}$$

III / Théorème de l'énergie cinétique

- ① Théorème d'énergie cinétique pour un solide

$$\frac{dE_c(S/R)}{dt} = P(\vec{s} \rightarrow S/R)$$

* Cette équation sert à trouver l'équation du mouvement.

② Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solide

$$\frac{dE_c(\Sigma/R_g)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_g) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(\xi_i \rightarrow \xi_j)$$

$\sum_{i,j=1}^n P(\xi_i \rightarrow \xi_j)$ correspond aux puissances des actions mutuelles de liaison entre les différents solides.

③ Intégrale première de l'énergie cinétique

$$E_c(\Sigma/R_g) + E_p(\Sigma/R_g) = E_m(\Sigma/R_g)$$

Astuces :

⊗ $P(0 \leftrightarrow 1) = 0$ (liaison parfaite)

$\Leftrightarrow P(0 \leftrightarrow 1) = P(0 \rightarrow 1) + P(1 \rightarrow 0)$

$\Rightarrow P(0 \rightarrow 1) = 0$ just: car liaison parfaite et R liée à 0

de façon générale : chaque liaison parfaite liée à 0, sa puissance est nulle.