

Résumé de cours :

Espaces vectoriels et applications linéaires

Ici, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Généralités sur les espaces vectoriels :

① Soit E un K -ev.

• Une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E est un vecteur $x \in E$ qui s'écrit sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \text{ où } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K.$$

• Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

• Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si elle n'est pas libre :

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \text{ non tous nuls tq } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0_E.$$

• Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est dite génératrice de E si :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \text{ tq } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

P Soit $x, y \in E$.

• la famille (x) est libre $\Leftrightarrow x \neq 0_E$.

• la famille (x, y) est libre $\Leftrightarrow x$ et y ne sont pas colinéaires.

• Toute famille contenant 0_E est liée.

• Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

$$\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ tq } x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j x_j ; \text{ où } \alpha_j \in K$$

1

① Soit $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel (sev) de E si F est non vide et $(F, +, \cdot)$ est un K -ev.

P Soit $F \subset E$.

$$(F \text{ est un sev de } E) \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda \in K : \lambda x + y \in F \end{cases}$$

⚠ L'intersection de plusieurs sev est un sev.
La réunion de deux sev n'est pas un sev en général.

① Soit $X \subset E$. On appelle sev engendré par X et on note $\text{vect}(X)$ le plus petit sev de E engendré par X .

Cas particulier important : si $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i ; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K \right\}$$

Vocabulaire : Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. $\text{vect}(x)$ est appelé droite vectorielle engendrée par x .

P Soit $X, Y \subset E$.

$$\text{vect}(\emptyset) = \{0_E\} ; \text{vect}(0_E) = \{0_E\}.$$

$$\text{Si } F \text{ est un sev de } E : \text{vect}(F) = F$$

$$X \subset Y \Rightarrow \text{vect}(X) \subset \text{vect}(Y)$$

① Soit F et G deux sev de E . On appelle somme de F et G le sev noté $F+G := \{x+y ; x \in F \text{ et } y \in G\}$.

• Si de plus, $F \cap G = \{0_E\}$, la somme est appelée somme directe et est notée $F \oplus G$.

$$F+G = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

2

Généralisation:

- Soit $F_1, \dots, F_p$ des sev de E . On définit le sev $F_1 + \dots + F_p = \{x_1 + \dots + x_p; x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p\}$.
- La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si:
 $\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p: x_1 + \dots + x_p = 0_E \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0_E$

⚠ Pour $p \geq 3$:
 $(F_1 + \dots + F_p \text{ est directe}) \Leftrightarrow (F_i \cap F_j = \{0_E\}, \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j)$

ⓓ Soit F et G deux K -ev. Une application $f: E \rightarrow F$ est dite linéaire si $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in K: f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Vocabulaire: $f: E \rightarrow F$ linéaire ($\mathcal{L}(E, F)$)

$E = F:$

- f endomorphisme ($\mathcal{L}(E)$)
- f bijective: f isomorphisme ($GL(E, F)$)
- f automorphisme ($GL(E)$)

ⓓ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit:

- le noyau de f noté $\text{Ker}(f) = \{x \in E: f(x) = 0_F\} \subset E$.
- L'image de f notée $\text{Im}(f) = \{f(x); x \in E\} \subset F$.

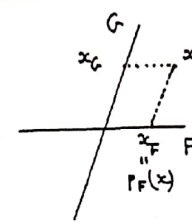
ⓑ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{0_E\}$
- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$

Endomorphismes particuliers

Soit E un K -ev et F et G deux sev supplémentaires de E (càd: $E = F \oplus G$)

p projection



On appelle projection sur F parallèlement à G notée

$$p_F: E = F \oplus G \rightarrow E$$

$$x = x_F + x_G \mapsto x_F$$

• Notons que p_F est un endo de E

$$p_F \circ p_F = p_F$$

$$p_F + p_G = \text{id}_E$$

$$\text{Ker}(p_F) = G$$

$$\text{Im}(p_F) = F$$

$$E = \text{Ker}(p_F) \oplus \text{Im}(p_F)$$

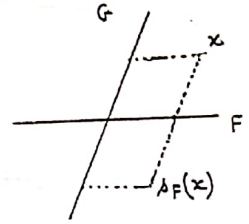
$$\text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - \text{id}_E)$$

• Caractérisation:

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$

$$(p \text{ est une projection}) \Leftrightarrow (p \circ p = p)$$

s symétrie



On appelle symétrie par rapport à F et parallèlement à G notée

$$s_F: E = F \oplus G \rightarrow E$$

$$x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$$

• Notons que s_F est un endo de E

$$s_F \circ s_F = \text{id}_E$$

s_F est un automorphisme de E
 et $s_F^{-1} = s_F$

$$\text{Ker}(s_F - \text{id}_E) = F$$

$$\text{Ker}(s_F + \text{id}_E) = G$$

$$E = \text{Ker}(s_F - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s_F + \text{id}_E)$$

$$p \text{ est une projection} \Leftrightarrow 2p - \text{id}_E \text{ symétrie}$$

• Caractérisation:

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$

$$(s \text{ est une symétrie}) \Leftrightarrow (s \circ s = \text{id}_E)$$

I) Espaces vectoriels de dimension finie

1) Théorie de la dimension:

[D] Soit E un K -ev. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

[D] Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E . On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si elle est libre et génératrice de E .

[T] Tout K -ev de dimension finie admet une base.
Toutes ces bases ont même cardinal appelé dimension de E
notée $\dim E := \text{card}(B)$, où B base de E .

[T] (de la base extraite) De toute famille génératrice d'un K -ev de dimension finie, on peut extraire une base.

[T] (de la base incomplète) Soit E un K -ev de dimension finie et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de E . Alors
 $\exists x_{p+1}, \dots, x_n \in E$ tq $(x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E .

[T] Soit E un K -ev de dimension finie et B une famille de E .
• B est une base de $E \iff B$ est libre et $\text{card}(B) = \dim E$
• B est une base de $E \iff B$ est génératrice et $\text{card}(B) = \dim E$

Exemples: Soit E et F deux K -ev de dimension finie.

- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$
En particulier, $\dim K^n = n$.
- $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F$
- $\dim(M_{n,p}(K)) = n \times p$
En particulier, $\dim(M_n(K)) = n^2$
- $\dim(K_n[X]) = n+1$

[5]

[T] Soit E un K -ev de dimension finie et F un sev de E :

- F est de dimension finie.
- $\dim F \leq \dim E$.
- $E = F \iff \dim F = \dim E$
- F admet au moins un supplémentaire dans E .

[T] (Formule de Grassmann) Soit E un K -ev de dimension finie et F, G deux sev de E . Alors:

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

En particulier:

$$F+G = F \oplus G \iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G.$$

2) Notion du rang:

a) Rang d'une famille de vecteurs:

[D] Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E , le rang de $(x_1, \dots, x_n)$ est:

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\text{vect}(x_1, \dots, x_n))$$

[!] $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ est le nombre maximal de vecteurs libres dans $(x_1, \dots, x_n)$.

[P] Soit E un K -ev de dimension $n \geq 1$ et $L = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de E .

- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p \iff L$ est libre dans E .
- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = n \iff L$ est génératrice de E .
- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p = n \iff L$ est une base de E .

[6]

b) Rang d'une application linéaire:

P Soit E un K -ev de dimension $n \geq 1$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et F un K -ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$\text{Im } f = \text{vect} \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$$

D Soit E un K -ev de dimension finie et F un K -ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de f noté $\text{rg}(f) := \dim(\text{Im } f)$

T (Théorème du rang) Soit E et F deux K -ev, avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors:

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f \quad (\dim(\text{Im } f))$$

P Soit E et F deux K -ev de dimension finie. On suppose que $\dim E = \dim F$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

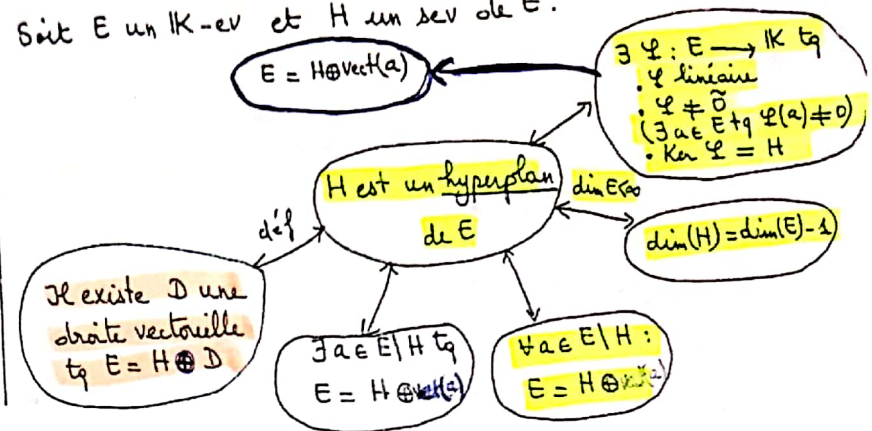
$(f \text{ est un isomorphisme}) \Leftrightarrow (f \text{ injective}) \Leftrightarrow (f \text{ surjective})$

! $f \text{ isomorphisme} \Rightarrow \dim E = \dim F$
 $\Leftarrow$ (pas toujours)

3) Formes linéaires - Hyperplans:

D Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E vers K . On note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ l'ensemble des formes linéaires appelé espace dual.

Soit E un K -ev et H un sev de E .



Résumé de Cours:

Les matrices

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

I) Les matrices:

D Une matrice à n lignes et p colonnes est un tableau de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

aussi noté $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, avec $a_{ij} \in K$.

L'ensemble $M_{n,p}(K)$ est un K -ev des matrices à n lignes et p colonnes



• $\dim M_{n,p}(K) = np$

• la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ième

forme une base appelée base canonique de $M_{n,p}(K)$

• Si $n = p$, la matrice est dite carrée. On note $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées.

N.B. $\dim M_n(K) = n^2$.

- $M_{n,1}(K)$ est l'ensemble des vecteurs colonnes
- $M_{1,n}(K) = K^n$ est l'ensemble des vecteurs lignes
- $M_{1,1}(K) = K$

1

D Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$.

• On dit que A est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

→ La somme et le produit de deux matrices diagonales est encore diagonale

Notation: $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \lambda_2 & \\ (0) & & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \text{diag}(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n) = \text{diag}(\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_n \beta_n)$$

$$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k), \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'identité $I_n = \text{diag}(1, \dots, 1)$

• On dit que A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (resp. $i < j$)

→ La somme et le produit deux matrices triangulaires sup/inf est encore une matrice triangulaire sup/inf.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & (*') \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda'_1 & & (*'') \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \lambda'_n \end{pmatrix}$$

D (Somme de deux matrices) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(K)$

La somme $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

2

D (Produit de deux matrices)
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(K)$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in M_{n,p}(K)$

Le produit $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{m,p}(K)$

$$\text{avec } c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

avec $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$.

D Soit $A, B \in M_n(K)$. On dit que A et B commutent si $AB = BA$.

T (Binôme de Newton) Soit $A, B \in M_n(K)$ avec $AB = BA$. Alors:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}; \text{ pour } k \geq 1$$

D On dit que $A \in M_n(K)$ est inversible si $\exists B \in M_n(K)$ tq $AB = BA = I_n$.
On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles

P Si $A, B \in GL_n(K)$, alors $AB \in GL_n(K)$ et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

D Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{p,n}(K)$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ avec

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

P • Soit $A, B \in M_{n,p}(K)$: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
• Soit $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$: ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$
• Soit $A \in GL_n(K)$: ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

II Matrice d'une application linéaire:

Soit E, F, G des K -ev de dimensions respectives n, p, m .

On note $B_E = (e_1, \dots, e_n)$, $B_F = (v_1, \dots, v_p)$ et $B_G = (w_1, \dots, w_m)$ des bases de E, F, G .

D Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de f de B_E vers B_F la matrice de $M_{p,n}(K)$ donnée par

$$\text{mat}(f, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \in M_{p,n}(K)$$

• Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$. Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice de x dans la base B_E .

T • Soit $x \in E$, $y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 $y = f(x) \iff \text{mat}(y, B_F) = \text{mat}(f, B_E, B_F) \text{mat}(x, B_E)$

• Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in K$:
 $\text{mat}(\lambda f + g, B_E, B_F) = \lambda \text{mat}(f, B_E, B_F) + \text{mat}(g, B_E, B_F)$

• Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$:
 $\text{mat}(g \circ f, B_E, B_G) = \text{mat}(g, B_F, B_G) \cdot \text{mat}(f, B_E, B_F)$

• $f \in GL(E, F) \iff \text{mat}(f, B_E, B_F)$ est inversible
Dans ce cas: $\text{mat}(f^{-1}, B_F, B_E) = [\text{mat}(f, B_E, B_F)]^{-1}$

- ① Soit $A \in M_{n,p}(K)$. On définit l'endomorphisme canoniquement associé à A par $u_A: K^p \rightarrow K^n$ avec $\text{mat}(u_A, B_p, B_n) = A$ où B_p, B_n sont les bases canoniques de K^p, K^n .

III) Noyau - Image - Rang d'une matrice:

- ① Soit $A \in M_{n,p}(K)$. On définit:
- Le noyau de A noté $\text{Ker } A = \{X \in M_{p,1}(K) : AX = 0_{n,1}\}$
 $\rightarrow \text{Ker}(A)$ sev de $M_{p,1}(K)$
 - L'image de A notée $\text{Im}(A) = \{AX; X \in M_{p,1}(K)\}$
 $\rightarrow \text{Im}(A)$ sev de $M_{n,1}(K)$
 - On note $c_1, \dots, c_p$ les vecteurs colonnes de A .
 On définit le rang de A noté $\text{rg}(A) = \text{rg}(c_1, \dots, c_p)$

- ② Soit $A \in M_{n,p}(K)$
- $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im } A)$
 - $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$: "Le rang de A est aussi égale au rang de ses vecteurs lignes".
 - Si $B \in GL_p(K)$: $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$
 - Si $C \in GL_n(K)$: $\text{rg}(CA) = \text{rg}(A)$
 - (Théorème du rang matriciel) : $p = \dim(\text{Ker } A) + \text{rg}(A)$

- ③ Soit $A \in M_n(K)$
 A est inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

IV) Changement de bases:

- Soit E et F deux K -ev de dimension finie. On note B_E, B'_E deux bases de E et B_F, B'_F deux bases de F .
- L'application $\text{id}_E: (E, B_E) \rightarrow (E, B'_E)$ est bijective d'inverse $\text{id}_E: (E, B'_E) \rightarrow (E, B_E)$.

On pose $P_{B'_E \rightarrow B_E} = \text{mat}(\text{id}_E, B_E, B'_E)$:
 écrire les vecteurs de la base B_E dans B'_E

$$\text{d'inverse } (P_{B'_E \rightarrow B_E})^{-1} = P_{B_E \rightarrow B'_E}$$

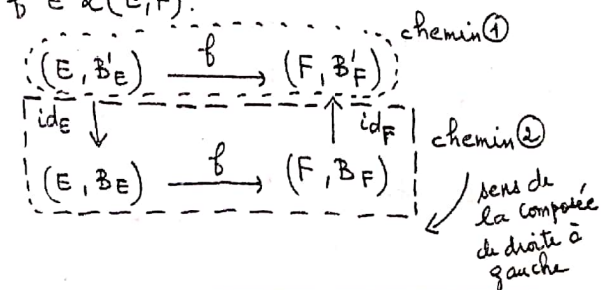
1) Cas d'un vecteur:

Soit $x \in E$. Alors:

$$\text{mat}(x, B'_E) = P_{B'_E \rightarrow B_E} \cdot \text{mat}(x, B_E)$$

2) Cas d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.



$$\text{mat}(f, B'_E, B'_F) = P_{B'_F \rightarrow B_F} \cdot \text{mat}(f, B_E, B_F) P_{B_E \rightarrow B'_E}$$

3) Cas d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

Formule de changement de base:

$$\text{mat}(f, \mathcal{B}'_E) = P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E} \text{mat}(f, \mathcal{B}_E) P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$$

D Soit $A, B \in M_n(K)$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in GL_n(K)$ tel que

$$B = P A P^{-1} \quad (\text{ou } B = P^{-1} A P)$$

T Deux matrices associées à un même endomorphisme dans deux bases différentes sont semblables.

IV) Trace d'un endomorphisme:

D Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$. On définit la trace de A par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

T $\text{tr}: M_n(K) \rightarrow K$ est une forme linéaire surjective.

• Soit $A, B \in M_n(K)$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$$(A \text{ et } B \text{ sont semblables}) \implies (\text{tr}(A) = \text{tr}(B))$$

D Soit E un K -ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la trace de f par

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(A); \text{ où } A = \text{mat}(f, \mathcal{B}_E).$$

VI) Matrices carrées remarquables:

D Soit $N \in M_n(K)$. On dit que N est nilpotente si $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $N^p = O_n$.

D Soit $M \in M_n(K)$.

• On dit que M est symétrique si ${}^t M = M$.

On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques ($S_n(K)$ sev de $M_n(K)$).

• On dit que M est antisymétrique si ${}^t M = -M$.
On note $\mathcal{A}_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques ($\mathcal{A}_n(K)$ sev de $M_n(K)$).

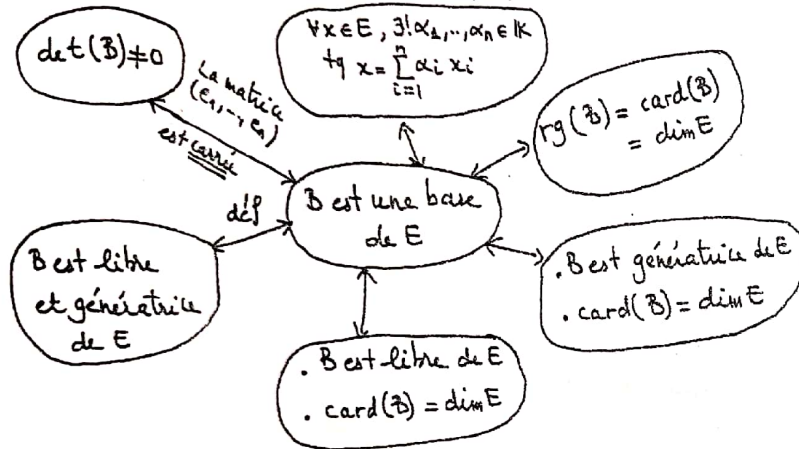
T $M_n(K) = S_n(K) \oplus \mathcal{A}_n(K)$

$$\dim S_n(K) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{A}_n(K) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Annexe: Méthodes pratiques

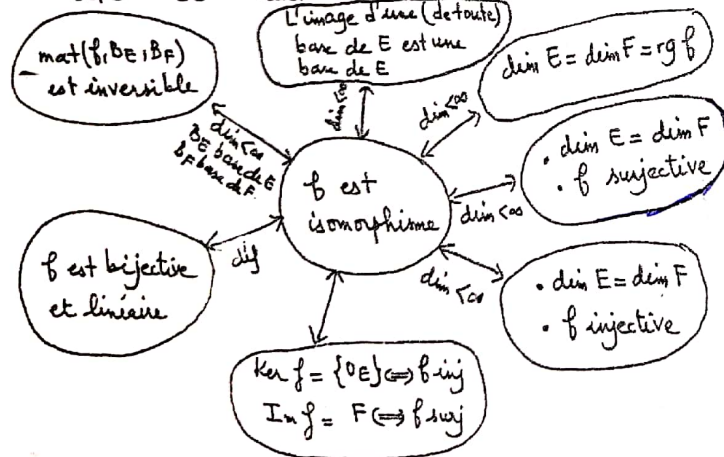
1°) Montrer base:

Soit E un K -ev de dimension finie et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de E (càd $e_1, \dots, e_n \in E$).



2°) Montrer isomorphisme =

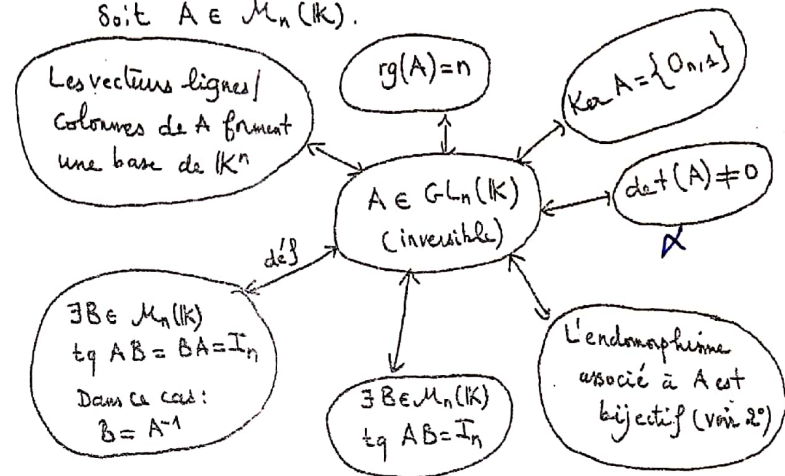
Soit E et F deux K -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$



1

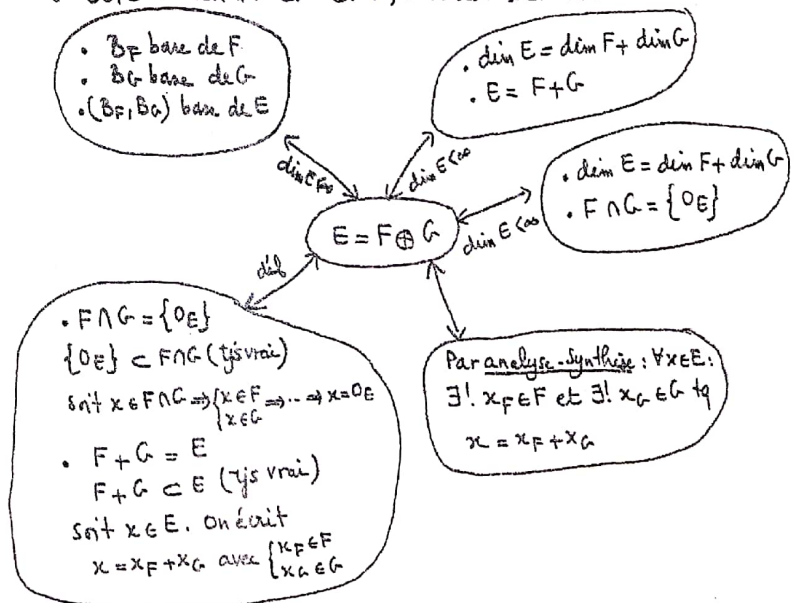
3°) Montrer matrice inversible:

Soit $A \in M_n(K)$.



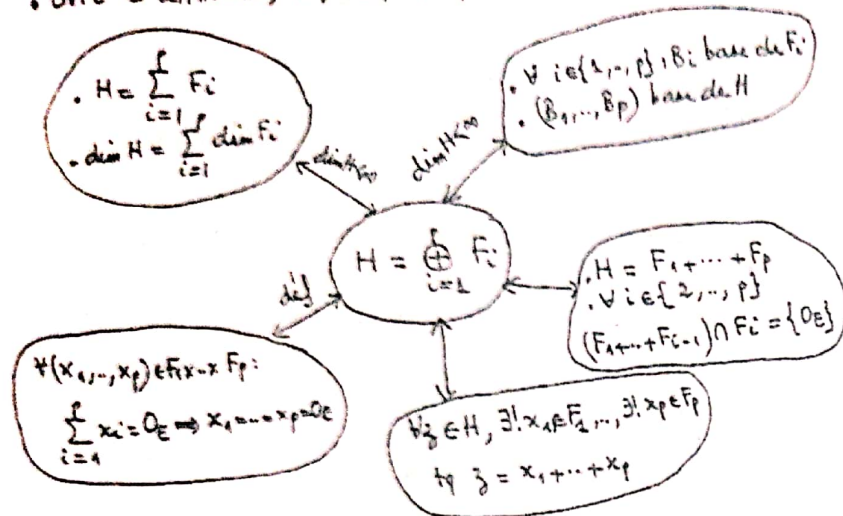
4°) Montrer somme directe:

Soit E un K -ev et F, G deux sev de E .



2

• Soit E un K -ev, $H, F_1, \dots, F_p$ des sev de E avec $F_i \subset H$



5° Famille libre de polynômes:

[T] Soit $(P_1, \dots, P_k)$ une famille de polynômes vérifiant

- $\forall 1 \leq i \leq k: P_i \neq 0$.
- $\forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ avec $i \neq j: P_i \neq P_j$.

Alors $(P_1, \dots, P_k)$ est libre dans $K[X]$.

6° Egalité d'applications linéaires en dimension finie:

Soit E et F deux K -ev avec $\dim E < \infty$.

Soit $g = (e_1, \dots, e_m)$ une famille génératrice de E
et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$(f = g) \iff (f(e_i) = g(e_i), \forall 1 \leq i \leq m)$$

N.B. • Le résultat reste valable si g est base de E .
I • Le résultat n'est plus valable si g est libre de E .

Résumé: Déterminant

E un K -ev de dimension $n \geq 1$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

I] Déterminant d'une famille de vecteurs:

On définit le déterminant d'une famille de vecteurs par:

$$\det_B : E^n = E \times \dots \times E \rightarrow K$$
$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

(i) $\det_B$ est n -linéaire:

$$\forall u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u'_i, u_{i+1}, \dots, u_n \in E \text{ et } \forall \alpha \in K:$$

$$\det_B(u_1, \dots, u_{i-1}, \alpha u_i + u'_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$
$$= \alpha \det_B(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) + \det_B(u_1, \dots, u_{i-1}, u'_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

(ii) $\det_B$ est alternée:

$$\forall 1 \leq i < j \leq n:$$

$$\det_B(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) = - \det_B(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n)$$

(iii) $\det_B(B) = 1$

(i) $(u_1, \dots, u_n)$ base de $E \iff \det_B(u_1, \dots, u_n) \neq 0$

(ii) $(u_1, \dots, u_n)$ liée dans $E \iff \det_B(u_1, \dots, u_n) = 0$

$\forall u_1, \dots, u_n \in E$ et $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K:$

$$\det_B(\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_n u_n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

II] Déterminant d'un endomorphisme:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit:

$$\det(f) = \det_B(f(B))$$

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\alpha \in K:$

(i) $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*: \det(f^k) = [\det(f)]^k$

(iii) f est inversible = automorphisme $\iff \det(f) \neq 0$

Dans ce cas:

$$\det(f^{-1}) = [\det(f)]^{-1} = \frac{1}{\det(f)}$$

(iv) $\det(\alpha f) = \alpha^{\dim E} \det(f)$

III] Déterminant d'une matrice carrée

$A = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \in M_n(K)$ (avec $c_1, \dots, c_n$ les vecteurs colonnes de A)

$$\det(A) = \det_B(c_1, \dots, c_n)$$

Soit $A, B \in M_n(K)$ et $\alpha \in K:$

(i) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*: \det(A^k) = [\det(A)]^k$

(iii) A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

Dans ce cas:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(iv) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$

(v) $\det({}^t A) = \det(A)$

(vi) $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{mat}(f, B)$.
 $\det(f) = \det(A)$

IV) Calcul pratique du déterminant:

1°) Matrice triangulaire:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ & \ddots \\ (*) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \dots \lambda_n$$

• Inverse d'une matrice triangulaire:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ inversible } \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n: \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (*) \\ (0) & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & (*) \\ & \ddots \\ (0) & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

• Inverse d'une matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ inversible } \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n: \lambda_i \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ (0) & \ddots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & (0) \\ & \ddots \\ (0) & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

2°) Invariance du déterminant:

Le déterminant est invariant par:

$$\begin{cases} L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j & (j \neq i) \\ C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j & (j \neq i) \end{cases}$$

3°) Développement % à une ligne (ou colonne)

Δ_{ij} = déterminant restant en supprimant la ligne et colonne où se trouve le coefficient.

$$\begin{cases} \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad (\% \text{ à } i^{\text{ème}} \text{ ligne}) \\ \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad (\% \text{ à } j^{\text{ème}} \text{ colonne}) \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \overbrace{a_1}^{\text{coeff}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{pas ligne + 1}^{\text{ère}} \text{ colonne} \\ \text{du coeff}}} \cdot \underbrace{\det}_{\text{det qui reste en supprimant ligne et colonne du facteur}}$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

4°) Déterminant par blocs:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A) \cdot \det(C) \quad \left(\begin{array}{l} \text{avec } A \text{ et } C \text{ des} \\ \text{matrices carrées} \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & (0) \\ A_2 & \ddots \\ (0) & & A_k \end{vmatrix} = \det(A_1) \dots \det(A_k)$$

(avec $A_1, \dots, A_k$ des matrices carrées)

Réduction des endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$ -ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

I / Stabilité

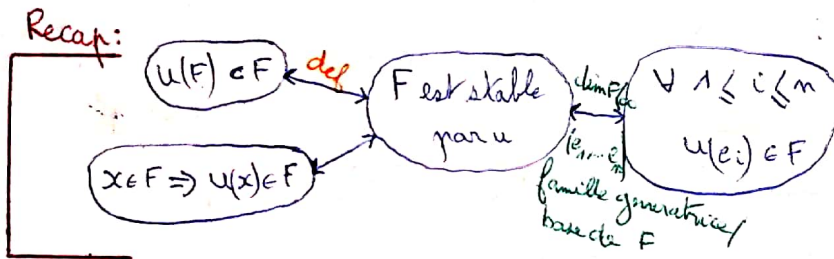
D: Soit F un sev de E . on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$

on définit ainsi l'endomorphisme

$$u_F : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto u_F(x) = u(x)$$

appelé endomorphisme induit par u sur F .



P: Soit F un sev stable par u

i) $\forall x \in F : u_F(x) = u(x)$

ii) $\text{Ker}(u_F) = \text{Ker}(u) \cap F$

iii) $\text{Im}(u_F) \subset \text{Im}(u) \cap F$.

P: Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$

i) $u \circ v = v \circ u \Rightarrow \text{Ker } v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u
(En particulier: $\text{Ker } u = \lambda \text{Id}_E$ stable par u)

ii) Si F est stable par u et v , alors F est stable par $(\alpha u + v)$ et $(u \circ v)$ ($\alpha \in \mathbb{K}$)

de plus:
$$\begin{cases} (\alpha u + v)_F = \alpha u_F + v_F \\ (u \circ v)_F = u_F \circ v_F \end{cases}$$

-1-

T: Interprétation de la stabilité en $\dim < \infty$

On suppose que E est de dimension finie

Soit F un sev de E et G un supplémentaire de F dans

$$(E = F \oplus G)$$

Notons $B_E = (B_F, B_G)$ une base adoptée à cette décomposition

$$(F \text{ est stable par } u) \Leftrightarrow \text{mat}(u, B_E) = \begin{pmatrix} u(B_F) & u(B_G) \\ A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}_{B_E}$$

Dans ce cas $A = \text{mat}(u_F, B_F)$

II / Elements propres:

vectoriel

• On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tq $u(x) = \lambda \cdot x$

• Dans ce cas le vecteur non nul x est appelé vecteur propre de u associé à la v.p λ

• $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{K}$

le spectre de u est l'ensemble des v.p de u

• Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \subset E$$

est le sous-espace propre associé à la v.p λ de u

matriciel

• On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tq $A \cdot x = \lambda x$

$$\text{tq } A \cdot x = \lambda x$$

• Dans ce cas, le vecteur colonne non nul x est appelé vecteur propre de A associé à la v.p λ

• $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{K}$

le spectre de A est l'ensemble des v.p de A

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) \in M_n(\mathbb{K})$$

est le sous-espace propre associé à la v.p λ de u

$$E_\lambda(A) = \{0_{n,1}\} \cup \left\{ \begin{matrix} \text{les vecteurs (colonnes)} \\ \text{propres de } A \text{ associé} \\ \text{à la v.p } \lambda \end{matrix} \right\}$$

- T: (i) si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des vp distinctes de u alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe
- (ii) Des vecteurs propres associés à des vp distinctes forment une famille libre de E.
- (iii) Si $\dim E = n \gg 1$ alors u admet au plus n v.p.

E est désormais de dimension $n \gg 1$:

- D: • Le polynôme $\chi_u(x) = \det(x \text{id}_E - u)$ est appelé polynôme caractéristique de u.
- Le polynôme $\chi_A(x) = \det(x I_n - A)$ est appelé polynôme caractéristique de A.

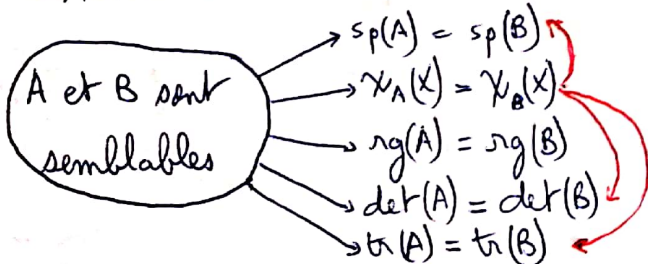
- T: • χ_u est un polynôme unitaire de degré n
- $\chi_u(x) = x^n - \text{tr}(u) x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$
- (de même pour les matrices)

N.B. $\begin{cases} \text{tr}(u) \text{ est le coeff de } x^{n-1} \\ \det(u) = (-1)^n \chi_u(0) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{tr}(u) &= \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \\ \det(u) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i^{m_i} \end{aligned}$$

⚠ Soit $A, B \in M_n(K)$

Rappelons: (A et B semblables) $\Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(K) \text{ tq } B = P A P^{-1})$



Toutes les réciproques sont fausses

- D: Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ (resp. $\lambda \in \text{Sp}(A)$) on appelle ordre de multiplicité de λ son ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique de u (resp. de A) qu'on note $\text{mult}(\lambda)$ ($m(\lambda)$)

Rappel: (Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme)

Soit $P \in K[x]$ et $a \in K$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} a \text{ est une racine de } P \\ P \text{ d'ordre de multiplicité } m \gg 1 \end{array} \right) &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists Q \in K[x] \text{ tq } \\ P(x) = (x-a)^m Q(x) \\ Q(a) \neq 0 \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

P: Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$: $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \text{mult}(\lambda)$

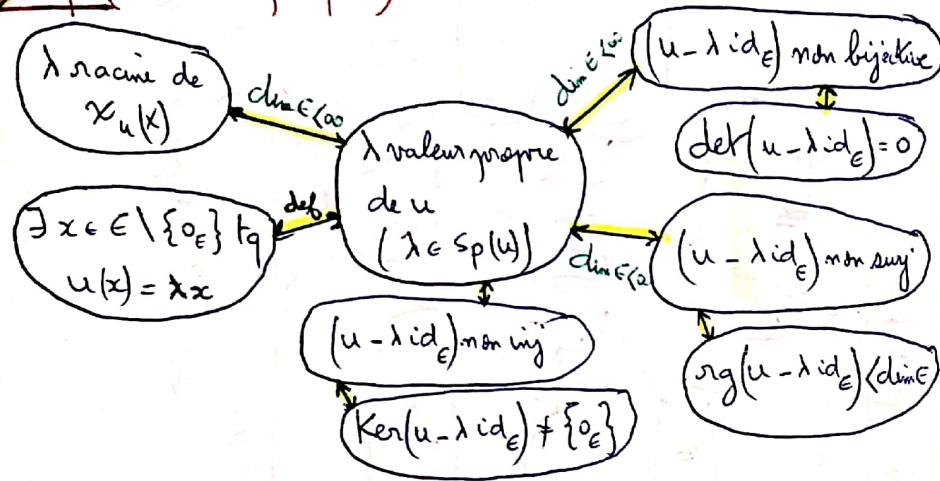
cas particulier si λ est une vp simple de u ($\text{mult}(\lambda)=1$) alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

P: Soit F un s.e.v stable par u alors $\chi_{u|_F}$ divise χ_u .

P: $\chi_A(x)$ scindé sur K, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ v.p de A comptés avec leur ordre de multiplicité alors $\begin{cases} \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \\ \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{m_i} \end{cases}$

⚠ Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les coefficients de la diagonale.

Recap (valeurs propres)



II / Diagonalisabilité

Vectorel

On dit que u est diagonalisable si il existe une base B de E tq $\text{mat}(u, B)$ diagonale c.à.d. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tq

$$\text{mat}(u, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

⚠ matrice diagonale $\not\Rightarrow$ matrice diagonalisable

Matriciel

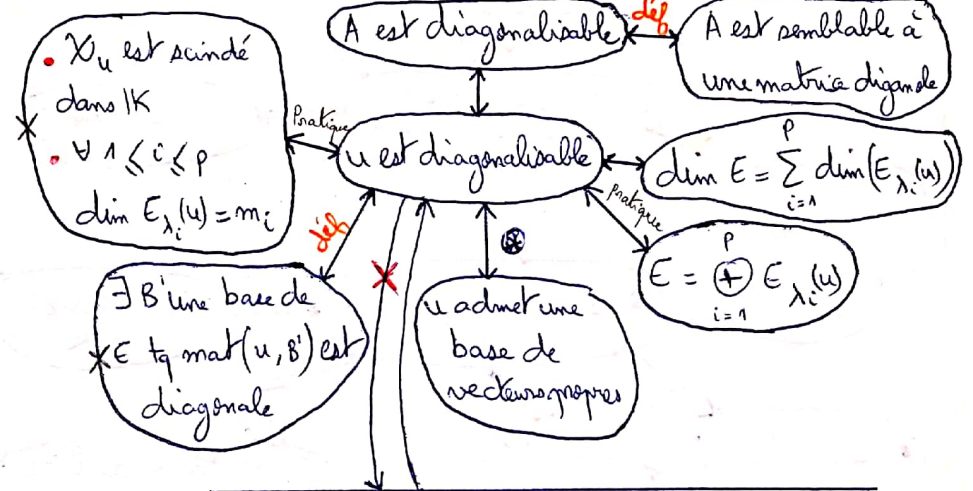
On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec P la matrice de changement de base de la base canonique à une base B formée par les vecteurs propres de A .

Recap : (diagonalisabilité)

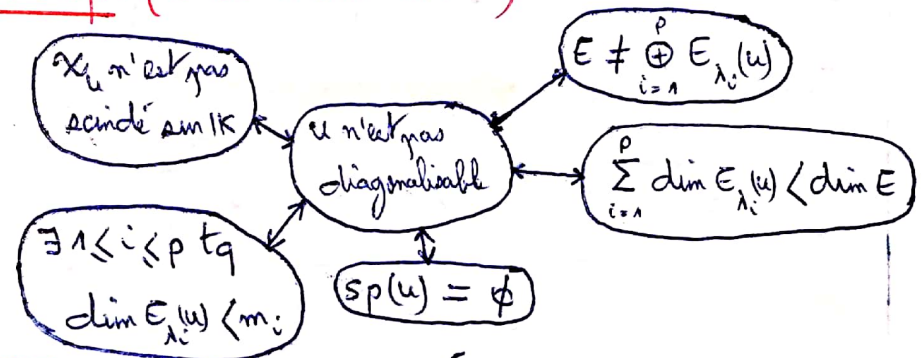
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les v.p distinctes de u d'ordre de multiplicité resp $m_1, \dots, m_p$. Soit B une base de E et $A = \text{mat}(u, B)$



Les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles ($\dim=1$)

- façon ①: u admet $n = \dim E$ vp distincts
- façon ②: $\chi_u(x)$ est scindé à racines simples
- façon ③: $\text{card}(\text{Sp}(u)) = \dim E$
- façon ④: $A \in M_n(K)$ admet n vp distincts

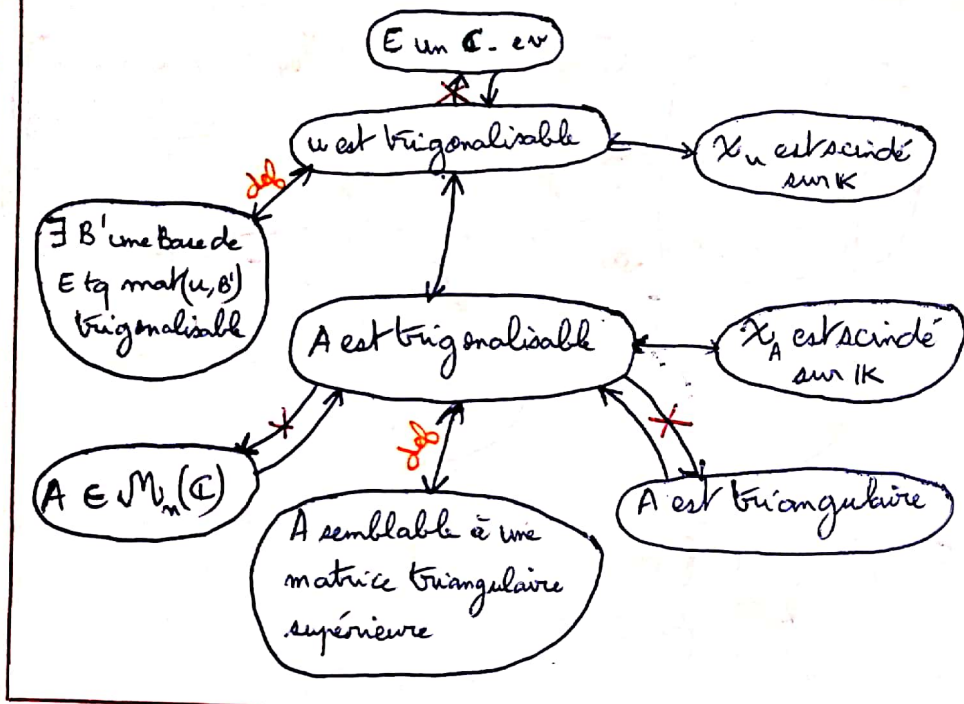
Recap : (critères éliminatoires)



III / Trigonalisabilité

Recap:

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$; B une base de E et $A = \text{mat}(u, B)$



T Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp distinctes de u d'ordre de multiplicité respectifs $m_1, \dots, m_p$

On suppose que χ_u est scindé

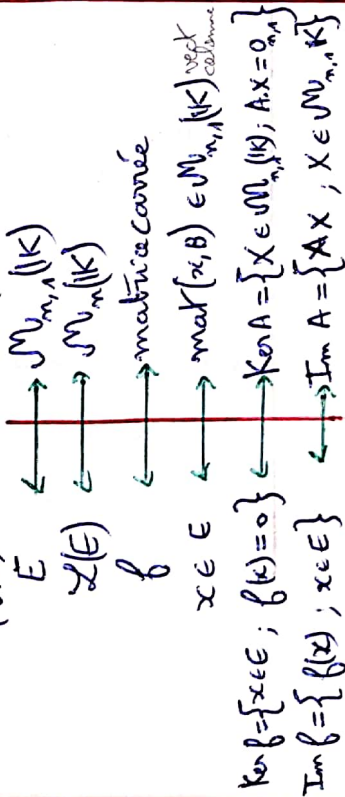
$$\text{tr}(u) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i \quad \text{et} \quad \det u = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_i}$$

-7-

Analogie : endomorphisme / matrice

Soit E un K -ev de dimension n , 2 ; $f \in \mathcal{L}(E)$
 Soit B et B' 2 bases de E .

$A = \text{mat}(f, B)$ et $A' = \text{mat}(f, B')$



$$P = \text{mat}(B, B')$$

f diagonalisable / triangulable $\iff A$ diagonalisable / triangulable

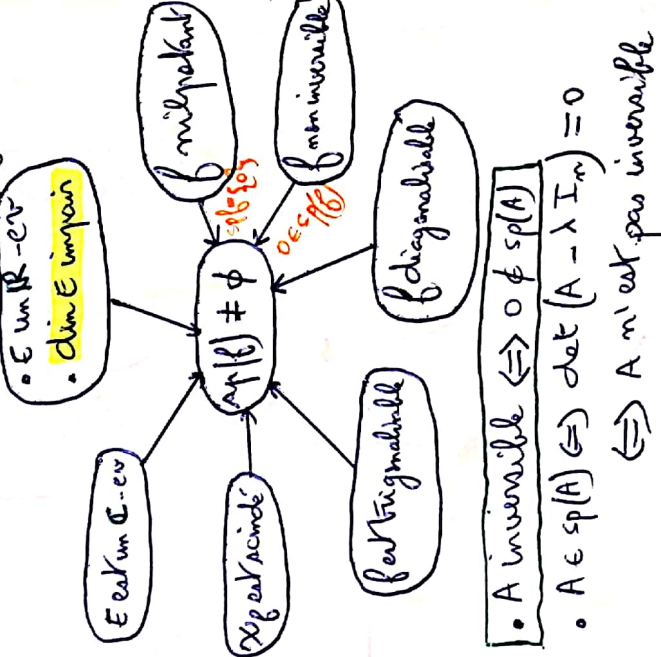
B' base de vect. p de f $\iff P$ $\begin{matrix} B \rightarrow B' \\ \text{(base qui diagonalise } f) \end{matrix}$: matrice de passage qui diagonalise A .

$\{ \text{mat}(f, B) \}$ $\iff A$ et A' sont semblables

$\chi_f = \det(X \text{Id}_E - f) \iff \chi_A = \det(X I_n - A)$

Cas où $\text{sp}(f) \neq \emptyset$.

Soit E un K -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$



Espaces préhilbertiens - espaces euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}$ -ev

I) Produit scalaire:

D Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire si:

$$\forall x, y, z \in E \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) bilinéaire:

$$\begin{cases} \langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \end{cases}$$

ii) symétrique:

$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$$

iii) positive:

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

iv) définie:

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

- L'espace E muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est appelé espace préhilbertien réel et on note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
- Tout espace préhilbertien de dimension finie est appelé espace euclidien



- Pour montrer i) et ii) on montre $\begin{cases} \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est symétrique} \\ \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ linéaire : la 1er variable} \end{cases}$
- iii) et iv) $\Leftrightarrow (\forall x \in E / \{0_E\}; \langle x, x \rangle > 0)$ ①

Dans la suite $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien

P L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$
$$x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

T (Théorème de Cauchy - Schwarz)

$$\forall x, y \in E : |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité $\Leftrightarrow$ La famille (x, y) est liée.

P (Identités remarquables)

i) $\forall x, y \in E$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

$$\langle x - y, x + y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$$

ii) Relation produit scalaire $\Leftrightarrow$ norme.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

T (Inégalité triangulaire)

$$\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité $\Leftrightarrow$ la famille (x, y) est positivement liée ②

II) Orthogonalité

- D** • Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$
 • un vecteur $x \in E$ est unitaire si $\|x\| = 1$.

- D** Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E
 • $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonal de $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i, j \in I$
 avec $i \neq j : \langle x_i, x_j \rangle = 0$
 • $(x_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée de $E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall i, j \in I$
 $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

- P** • Toute famille orthogonal ne contient pas 0_E est libre
 • Toute famille orthonormée est libre.

- T** Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale
 alors $\boxed{\| \sum_{k=1}^p x_k \|^2 = \sum_{k=1}^p \|x_k\|^2}$ relation de Pythagore

- T** (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)
 Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre de E .
 alors $\exists ! (e_1, \dots, e_p)$ famille orthonormée vérifiant
 • $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{vect}(e_1, \dots, e_p) = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$
 • $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \langle e_k, x_k \rangle > 0$. $u_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_i, x_k \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$

de plus

$$\begin{cases} e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \\ \forall k \in \{2, \dots, p\} : e_k = \frac{x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j}{\|x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, e_j \rangle e_j\|} \end{cases} \quad (3)$$

Cas des espaces euclidiens

On suppose que E est un espace euclidien de dimension n .

- D** • $(B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de $E \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est une base de } E \\ B \text{ est une famille orthogonal de } E \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est une famille orthogonal de } E \\ B \text{ ne contient pas } 0_E \\ \text{card}(B) = \dim(E) \end{cases}$$

- $(B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée (B.O.N) de $E \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est une base de } E \\ B \text{ est une famille orthonormée de } E \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ est une famille orthonormée de } E \\ \text{card}(B) = \dim(E) \end{cases}$$

- T** Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée

- A** Si $(v_1, \dots, v_m)$ est une base orthogonale de E
 alors $(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|})$ est une B.O.N de E .

- T** (Expression d'un vecteur / produit scalaire / norme dans une BON)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E

$$\bullet \forall x \in E : x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$\bullet \forall x, y \in E : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \cdot \langle y, e_i \rangle$$

↑ produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$

$$\forall x \in E : \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2}$$

↑ norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$

Orthogonal d'une partie

D Soit X une partie de E . On définit $X^\perp$ orthogonal de X :

$$X^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in X : \langle x, y \rangle = 0\}$$

D'une manière équivalente:

$$y \in X^\perp \Leftrightarrow \forall x \in X : \langle y, x \rangle = 0$$

P Soient X et Y deux parties de E :

$$\bullet \{0_E\}^\perp = E \text{ et } E^\perp = \{0_E\}$$

$$\bullet X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$$

$$\bullet X^\perp = [\text{vect}(X)]^\perp$$

$$\bullet X^\perp \text{ est un sev de } E$$

$$\bullet X \subset (X^\perp)^\perp$$

• Si X et Y s.e.v de E

tg $A \perp B$ alors:

$$A \cap B = \{0_E\}$$

en particulier:

$$A \cap A^\perp = \{0_E\}$$

D Soit F un sev de E . On dit que G est supplémentaire orthogonal de F dans E et on note

$$(E = F \oplus G) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G (\forall x \in F \text{ et } \forall y \in G) \\ \langle x, y \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \perp G \end{cases}$$

$$\text{N.B: } F \perp G \Rightarrow F + G = F \oplus G$$

⚠ Si F admet un supplémentaire orthogonal G dans E alors $G = F^\perp$

T * Si F un sev de E tq. $\dim F$ est fini

$$\text{alors: } E = F \oplus F^\perp$$

* Cas particulier:

Si E un espace euclidien

$$\text{alors: } E = F \oplus F^\perp$$

$$\bullet \dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

$$\bullet (F^\perp)^\perp = F$$

$$\begin{aligned} (F + G)^\perp &= F^\perp \cap G^\perp \\ F^\perp + G^\perp &\subseteq (F \cap G)^\perp \\ F^\perp + G^\perp &\stackrel{\text{e. eucl.}}{=} (F \cap G)^\perp \end{aligned}$$

IV' Projection orthogonale:

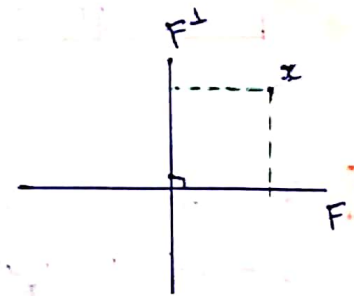
D Soit F un sev de E tq. $\dim F < \infty$
(c.à.d. $E = F \oplus F^\perp$)

L'application

$$P_F: E = F \oplus F^\perp \rightarrow E$$

$$x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F$$

est appelée projection orthogonale sur F .



P Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$(p \text{ est un projecteur orthogonal}) \Leftrightarrow \begin{cases} p \circ p = p \\ \text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \circ p = p \\ \text{Ker}(p) \perp \text{Ker}(p - \text{id}_E) \end{cases}$$

$$\oplus p \text{ est un projecteur orthogonal} \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 / \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle \quad \textcircled{6}$$

T (Expression/Norme de la projection orthogonale dans une B.O.N.)
 Soit F un s.e.v de E tq $\dim F < \infty$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une B.O.N de F

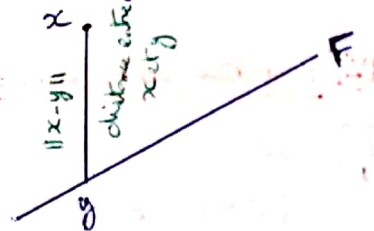
$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$\forall x \in E; \|p_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^p (\langle x, e_k \rangle)^2$$

T Soit F un s.e.v de E tq $\dim F < \infty$. On définit la distance de x à F par :

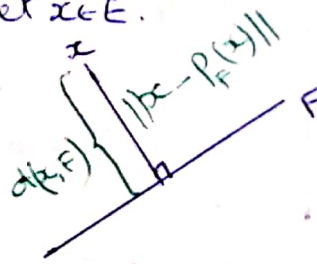
$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

«chemin le plus court entre le vecteur x et le s.e.v F »



T Soit F un s.e.v de E tq $\dim F < \infty$ et $x \in E$.

- $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$
- $\forall y \in F: \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$
- $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$



T (Inégalité de Bessel)

si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille orthogonale de E

alors

$$\forall x \in E: \sum_{k=1}^p (\langle x, e_k \rangle)^2 \leq \|x\|^2$$

$$E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow x = x_F + x_{F^\perp} \Leftrightarrow x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

II) Automorphismes orthogonaux - Matrices orthogonales:

Soit E désigne un espace euclidien.

1) Automorphismes orthogonaux:

D Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un automorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle si

$$\forall x \in E; \|f(x)\| = \|x\| \quad (f \text{ conserve la norme})$$

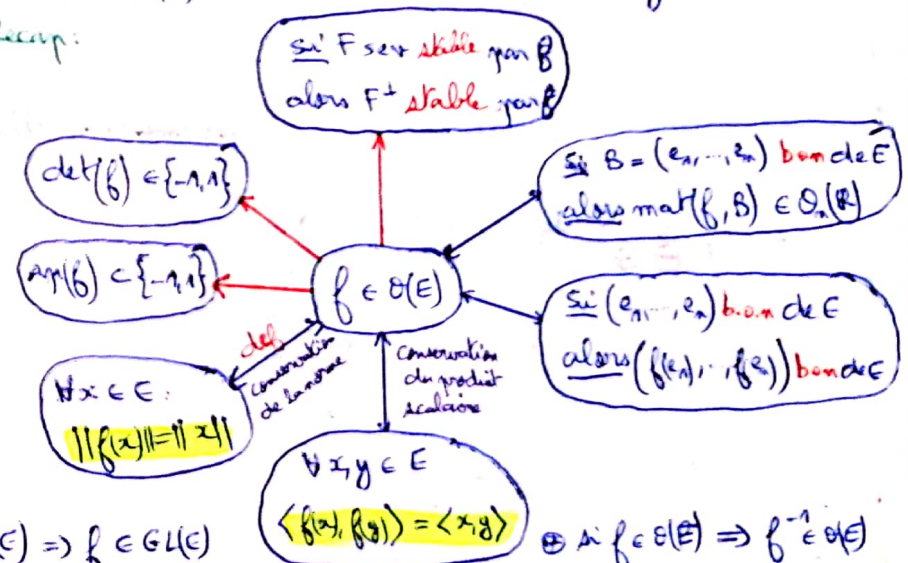
On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

2) Matrices orthogonales:

D Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice orthogonale si ${}^t M \cdot M = I_n$.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

3) Recap:



$$\Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow f \in \mathcal{GL}(E)$$

$$\Leftrightarrow f \text{ conserve l'orthogonalité}$$

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

$$\Leftrightarrow \text{si } f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$$

$$\Leftrightarrow \text{id}_E \in \mathcal{O}(E)$$

$$\Leftrightarrow \forall f, g \in \mathcal{O}(E) / f \circ g \in \mathcal{O}(E)$$

4) Réduction des isométries vectorielles

$\dim(E) = 2$

Les matrices orthogonales positives en dimension 2 sont de la forme :

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

L'endomorphisme correspondant associé à $P(\theta)$ est dit rotation d'angle θ (rotation de centre O et angle θ)

- $(SO_2(\mathbb{R}), -)$ est commutatif.
- Les matrices orthogonales négatives en dimension 2 sont

de la forme :

$$N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

réflexion c-à-d symétrie orthogonale par rapport à la droite $\ker(\theta - id)$

VI) Endomorphismes symétriques : Ici $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un e.v. euclidien

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme symétrique

si $\forall x, y \in E : \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une b.o.n de E

f est un endo. symétrique $\Leftrightarrow (mat(f, B))$ est symétrique

Théorème spectral :

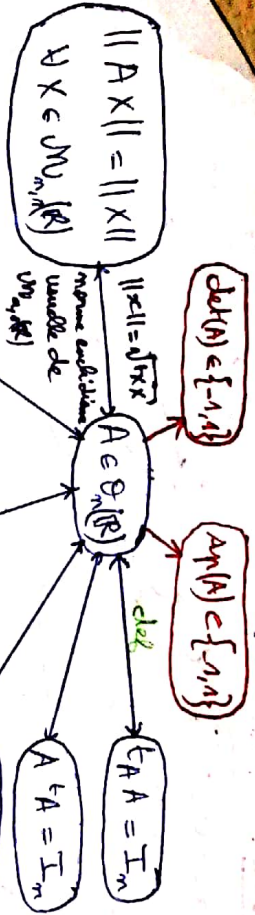
$f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme symétrique $\Leftrightarrow$

f est diagonalisable dans une b.o.n de E .

Théorème spectral matriciel : $\Rightarrow$ P mat. passage de b.o.n vers b.o.n de E

$(A \in S_n(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } \exists D \in M_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale} \\ A = P D P^{-1} \text{ (ou } A = P \cdot D \cdot P) \end{array} \right)$

$L_0 = P^{-1}$ car P orthogonale



Les vecteurs lignes (resp. colonnes) forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ (resp. de $M_n(\mathbb{R})$) pour le produit scalaire usuel $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$

L'endomorphisme canoniquement associé à A est orthogonal

- $A, B \in O_n(\mathbb{R})$
- $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
- $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$
- $A \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$

(Changement de base)

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une B.O.N de E
 $B' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E .

(B') est une B.O.N de $E \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} P_{B \rightarrow B'} \in O_n(\mathbb{R}) \\ \text{Matrice de passage de } B \text{ vers } B' \end{array} \right)$

$SO_n(\mathbb{R}) = \{ A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$: groupe spécial orthogonal

- $A \in O_n(\mathbb{R})$
 $\det(A) = 1$: A matrice orthogonale positive.
 $\det(A) = -1$: A matrice orthogonale négative.

Symétrie orthogonale

D Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et F un s.e.v de E
t.q. $\dim F < \infty$ (c.à.d. $E = F \oplus F^\perp$)

On définit la symétrie orthogonale S_F à F l'app.

$$S_F : E = F \oplus F^\perp \rightarrow E$$

$$x = x_F + x_{F^\perp} \mapsto x_F - x_{F^\perp}$$

P (i) $S_F \in \mathcal{L}(E)$

(ii) $S_F \circ S_F = \text{id}_E \Rightarrow S_F$ est un automorphisme et $S_F^{-1} = S_F$

(iii) Soit P_F la projection orthogonale sur F

$$S_F = 2P_F - \text{id}_E$$

$$(iv) \begin{cases} F = \text{Ker}(S_F - \text{id}_E) \\ F^\perp = \text{Ker}(S_F + \text{id}_E) \end{cases}$$

$$(v) E = \text{Ker}(S_F - \text{id}_E)^\perp \oplus \text{Ker}(S_F + \text{id}_E)$$

T Soit $S \in \mathcal{L}(E)$

$$(S \text{ est une symétrie orthogonale}) \Leftrightarrow \begin{cases} S \circ S = \text{id}_E \\ \text{Ker}(S - \text{id}_E) \perp \text{Ker}(S + \text{id}_E) \end{cases}$$

Soit P projection de E .

① P un projecteur orthogonal

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 / \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$$

② P un projecteur orthogonal

$$\Leftrightarrow \forall x \in E / \|P(x)\| \leq \|x\|$$

Soit S une symétrie de E

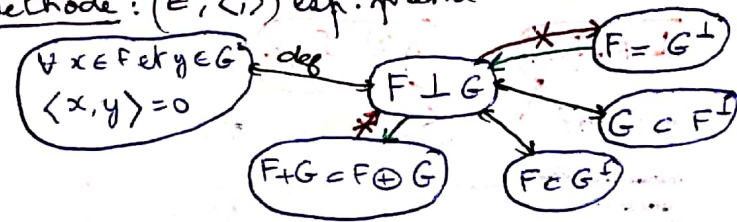
① S une symétrie orthogonale

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 / \langle S(x), y \rangle = \langle x, S(y) \rangle$$

② S une symétrie orthogonale

$$\Leftrightarrow \forall x \in E / \|S(x)\| = \|x\|$$

Méthode: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ esp. préhil. F et G deux s.e.v de E



$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

$$= \|x - P_F(x)\| = \|P_{F^\perp}(x)\|$$

Equation différentielle

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I \subseteq \mathbb{R}$

I) Rappel.

① Equations différentielles de 1^{er} ordre:

On considère (E_1) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ où $a, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues et $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ de $\mathbb{C}^1$

* Solution homogène $y_h(t) = \lambda e^{-\int a(t) dt}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.

* Solution particulière:

M_1 : On cherche une solution apparente.

M_2 : on utilise la méthode de la variation de la constante:

$y(t) = \lambda(t) e^{-\int a(t) dt}$ et on remplace dans (E_1)

on trouve $\lambda(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$ où $A(t) = \int a(t) dt$

* Solution générale: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

T (Cauchy - Lipschitz)

Soit (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ une éq. différentielle linéaire d'ordre 1 sur I

alors le problème de Cauchy: $\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique

solution sur I où $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

② Equations différentielles de 2nd ordre à coefficients constants

On considère (E_2) : $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t)$ où $a, b \in \mathbb{K}$, $c: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue

et $y: I \rightarrow \mathbb{K}$ de $\mathbb{C}^2$

* Solution homogène:

- l'équation caractéristique: $\chi(r) = r^2 + ar + b$
- le discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

• $\Delta \neq 0$: $\chi(r)$ admet deux racines complexes r_1 et r_2 distincts.

$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

• $\Delta = 0$: $\chi(r)$ admet une racine double

r_0

$$y_h(t) = e^{r_0 t} (\lambda_1 + \lambda_2 t); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

• $\Delta > 0$: $\chi(r)$ admet deux racines réelles distincts r_1 et r_2

$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

• $\Delta = 0$: $\chi(r)$ admet une racine double réelle r_0

$$y_h(t) = e^{r_0 t} (\lambda_1 + \lambda_2 t); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

• $\Delta < 0$: $\chi(r)$ admet deux racines complexes conjuguées r_0 et $\bar{r}_0$.

on $r_0 = \alpha + i\beta$ où $\beta > 0$

$$y_h(t) = e^{\alpha t} (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)); \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

* Solution particulière:

On suppose que $b(t) = Q(t) e^{mt}$ où Q est un polynôme et $m \in \mathbb{K}$

on cherche une solution particulière de la forme:

$y_p(t) = P(t) e^{mt}$ où P est un polynôme

- m n'est pas racine de $\chi(r) \Rightarrow \deg P = \deg Q + 0$
- m racine simple de $\chi(r) \Rightarrow \deg P = \deg Q + 1$
- m racine double de $\chi(r) \Rightarrow \deg P = \deg Q + 2$

* Solution générale: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

T (Cauchy - Lipschitz)

Soient $(t_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = z_0 \end{cases}$$

admet une unique solution y de $\mathbb{C}^2$ de I dans $\mathbb{K}$.

P S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) sur I est un sous espace vectoriel de $C^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2

$\varphi: S_H \rightarrow \mathbb{K}^2$
 $y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$ est un isomorphisme (bijection du Théorème de Cauchy)

Rq: $\dim S_H = 2$, une base (y_1, y_2) de S_H est appelé: **système fondamental des solutions de (H) sur I**

D Soient y_1 et y_2 deux solutions sur I de H . On appelle wronskien de y_1 et y_2 et on note $w(y_1, y_2)$, l'application:

$$w(y_1, y_2): I \rightarrow \mathbb{K}$$

$$t \mapsto w(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

P Soient y_1 et y_2 de solutions sur I de H alors
 (y_1, y_2) système fondamental de (H) sur $I \Leftrightarrow \forall t \in I, w(y_1, y_2)(t) \neq 0$
 $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I; w(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$

Méthode d'abaissment de l'ordre:

$$(E): y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (H): y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

En connaissant une solution de f de (H) sur I tq $f(t) \neq 0 \forall t \in I$

$$\text{on pose } x(t) = \frac{y(t)}{f(t)} \Leftrightarrow y(t) = x(t)f(t)$$

$$y(t) \text{ est une solution de (E)} \Leftrightarrow x''(t) + (a(t) + 2 \frac{f'(t)}{f(t)})x'(t) = \frac{c(t)}{f(t)}$$

$$\text{on pose } z(t) = x'(t) \Rightarrow z'(t) + (a(t) + 2 \frac{f'(t)}{f(t)})z(t) = \frac{c(t)}{f(t)} \text{ éq diff d'ordre 1}$$

on cherche $z(t) = x'(t)$ puis $x(t)$ et par suite $y(t) = x(t)f(t)$. ③

II] Généralités

D On appelle système différentiel du premier ordre l'équation:

$$(S): X'(t) = A(t) \cdot X(t) + b(t)$$

où $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ et $b: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ des fonctions continues

Résoudre (S) c'est déterminer les fonctions $X: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ de C^1 qui satisfait (S)

L'équation homogène associée à (S) est: (H): $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$

T La solution générale de (S) est de la forme:

$X(t) = X_h(t) + X_p(t)$ où X_h est une solution de l'équation homogène (H) et X_p est une solution particulière de (S).

T (Théorème de Cauchy linéaire)

Soient $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$; $b: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ deux fonctions continues et $(t_0, X_0) \in I \times M_n(\mathbb{K})$

$$\text{Le problème de Cauchy } \begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + b(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une solution unique $X: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ de C^1

T On note S_H l'ensemble des solutions de l'équation (H)

S_H est un s.e.v de $E^1(I, M_n(\mathbb{K}))$ de dimension n .

de plus l'application $\varphi: S_H \rightarrow M_n(\mathbb{K})$

$$X \mapsto X(t_0)$$

est un isomorphisme.

systèmes différentiels homogènes à coefficients constants.

On appelle système différentiel homogène à coefficients constants l'équation (H): $X'(t) = A \cdot X(t)$

où $A \in \mathcal{M}_n(K)$ d'inconnue $X: I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K)$ de C^1

T (Résolution dans le cas où A est diagonalisable)

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable

• Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $(v_1, \dots, v_n)$ une
base de vecteurs propres associés à ses valeurs propres
respectivement

• Notons S_H l'ensemble des solutions de (H): $X'(t) = A \cdot X(t)$

alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de solutions de S_H

où $x_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $t \in I$.



Dans ce cas, on obtient; $\forall X \in S_H; \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tq

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i$$