

Analyse:

Séries Numériques

I/ Suites et séries

① Convergence d'une série

a) Def: à toute suite $(U_n)_{n \geq p}$ on associe

la suite $(S_n(U))_{n \geq p}$ d'éléments dans $\mathbb{K}$

définie par: $S_n(U) = \sum_{k=p}^n U_k$

l'app $\Sigma : (U_n)_{n \geq p} \mapsto S_n(U)_{n \geq p}$

L'image de (U_n) par Σ : $\sum_{n \geq p} (U_n)$

$\Rightarrow$ La série de terme générale U_n

- U_n est le terme générale de $\sum_{n \geq p} (U_n)$

- S_n est la somme partielle de $\sum_{n \geq p} U_n$

b) Nature de convergence:

* La série de terme générale U_n

$(\sum_{n \geq p} U_n)$ est convergente si la somme partielle $S_n = \sum_{k=p}^n U_k$ est convergente.

Dans ce cas, la limite se note:

$\sum_{n=p}^{+\infty} U_n$: appelé la somme totale.

* $\sum_{n \geq p} U_n$ est divergente lorsque sa

somme partielle est divergente.

② Série de référence

Série géométrique

de la forme $\sum_{n \geq p} z^n$ où $z \in \mathbb{K}$

converge ssi $|z| < 1$

dans ce cas: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

et $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=n}^{+\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z}$

Séries exponentielles

de la forme $\sum_{n \geq p, n!} z^n$ où $z \in \mathbb{K}, p \in \mathbb{N}$

converge pour tout $z \in \mathbb{K}$

$\forall z \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Séries télescopiques

de la forme $\sum_{n \geq p} (U_{n+1} - U_n)$ où $p \in \mathbb{N}$

converge ssi $(U_n)_{n \geq p}$ converge vers $L \in \mathbb{K}$

dans ce cas: $\sum_{n=p}^{+\infty} (U_{n+1} - U_n) = L - U_p$

Série de Riemann

De la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

converge ssi $\alpha > 1$

③ Condition nécessaire de convergence

a) théorème

$\sum_{n \geq p} U_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n \geq p} U_n$ diverge

④ Propriétés utiles $(U_n)_{n \geq p}$ et $(V_n)_{n \geq p}$

• $q > p$: $\sum_{n \geq q} U_n$ converge $(\Leftrightarrow) \sum_{n \geq p} U_n$ converge

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \sum U_n \text{ converge} \\ \bullet \sum V_n \text{ converge} \end{array} \right\} \forall \alpha \in \mathbb{K} \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{(resp. diverge)} \\ \text{(resp. diverge)} \end{array} \right\} \sum \alpha U_n + V_n \text{ converge (resp. diverge)}$$

dans le cas de convergence: $\sum_{n=p}^{+\infty} (\alpha U_n + V_n) = \alpha \sum_{n=p}^{+\infty} U_n + \sum_{n=p}^{+\infty} V_n$

• Cas complexe: $U_n \in \mathbb{C}$.

$$\sum U_n \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum \operatorname{Re}(U_n) \text{ converge} \\ \sum \operatorname{Im}(U_n) \text{ converge} \end{cases}$$

II / Méthodes de convergence et de divergence des séries:

① Critères de convergence et de divergence

• Comparaison:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p$$

$$* \quad 0 < U_n < \underbrace{V_n}_{\text{converge}} \Rightarrow \sum U_n \text{ converge.}$$

$$* \quad \underbrace{U_n > V_n}_{\text{diverge}} > 0 \Rightarrow \sum U_n \text{ diverge}$$

• Equivalence:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p \quad V_n > 0$$

$$* \quad \begin{cases} U_n \sim_{+\infty} V_n \\ \sum V_n \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \sum U_n \text{ converge}$$

$$* \quad \begin{cases} U_n \sim_{+\infty} V_n \\ \sum V_n \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \sum U_n \text{ diverge}$$

• Critère de d'Alembert

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, U_n \neq 0.$$

$$* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = L < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ converge}$$

$$* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = L > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ diverge}$$

$\Rightarrow (U_n)$ ne converge pas vers 0, la série diverge grossièrement $\Rightarrow \sum U_n$ diverge

• Règle de Riemann:

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, U_n > 0$$

$$\exists \alpha > 1$$

$$* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha U_n = 0 \Rightarrow \sum U_n \text{ converge}$$

$$* \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha U_n = +\infty \Rightarrow \sum U_n \text{ diverge}$$

Rq: dans le cas où $\sum U_n$ converge

les réciproques sont fausses ⚠

Rq: Etude $\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$; $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

• $\alpha > 1$: on choisit un $\delta \in]1, \alpha[$

$$\text{tq } \lim_{n \rightarrow \infty} n^\delta \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha-\delta} (\log n)^\beta} = 0$$

car $\alpha - \delta > 0$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \text{ converge.}$$

(R. Riemann)

• $\alpha < 1$: on multiplie cette série par n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1-\alpha}}{(\log n)^\beta} = +\infty \text{ car } 1-\alpha > 0$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \text{ diverge par la règle de Riemann}$$

Séries Reelles alternées

① Définition et exemples

$\sum U_n$ avec $U_n = (-1)^n \alpha_n, \forall n \geq p$
 $(\alpha_n)_{n \geq p}$ garde un signe constant

Exp: $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n \log n} \dots$

② Critère Spécial des séries alternées (CSSA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq p, U_n = (-1)^n \alpha_n \\ (\alpha_n)_{n \geq p} \text{ décroissante} \\ (\alpha_n)_{n \geq p} \text{ converge vers } 0 \end{array} \right\} \rightarrow 0$$



(*) $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge

(**) $\forall n \geq p, |R_n| < \alpha_{n+1}$

(***) $\forall n \geq p, \text{signe} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} U_k \right) = \text{signe}(U_n)$
stabilité lim. positive

Rq: Une série alternée peut être convergente sans qu'elle vérifie le CSSA

IV / Série absolument convergente

① Définition: $U_n \in \mathbb{K}$

$\sum U_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |U_n|$ est convergente

[P]

** On suppose que $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, U_n \neq 0$
 alors $\begin{cases} U_n = o(V_n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = 0 \\ U_n = O(V_n) \Leftrightarrow \left(\frac{U_n}{V_n} \right) \text{ est borné} \end{cases}$

② Remarque

il existe des séries convergentes sans être absolument convergente.

par ex: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ diverge

③ Schéma à retenir:

$$\begin{array}{l} U_n = o(V_n) \\ \forall n \geq p, V_n > 0 \\ \sum V_n \text{ converge} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} U_n = O(V_n) \\ \forall n \geq p, V_n > 0 \\ \sum V_n \text{ converge} \end{array}$$

$$\sum U_n \text{ absolument convergente}$$

$$\sum U_n \text{ converge}$$

V / Produit de Cauchy de 2 séries

① Def

Le produit de Cauchy des séries

$\sum_{n \geq 0} U_n$ et $\sum_{n \geq 0} V_n$ la série $\sum_{n \geq 0} W_n$

avec $W_n = \sum_{k=0}^n U_k V_{n-k} = \sum_{p+q=n} U_p V_q$

② Théorème

- ⊗ $\sum_{n \geq 0} U_n$ absolument convergente
- ⊗ $\sum_{n \geq 0} V_n$ absolument convergente.



(*) $\sum_{n \geq 0} W_n$ absolument convergente
 $\xrightarrow{\text{produit de Cauchy de } \sum U_n \text{ et } \sum V_n}$
 donc converge

(**) $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} V_n \right)$

* Série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^p}$

$\left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^p} \text{ converge} \right) \Leftrightarrow \left(\alpha > 1 \text{ ou bien } \alpha = 1 \text{ et } p > 1 \right)$

VII / Comparaison série et intégrals

① Méthode particulière de convergence d'une série

on se donne $\sum_{n \geq p} U_n$ où $\forall n \geq p : U_n = f(n)$

$f \in \mathcal{C}^1([p, +\infty[)$

f décroissante

f positive



1) $\forall k \geq 1 : \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

2) $\left(\sum_{n \geq p} U_n \text{ converge} \right) \Leftrightarrow F(x) = \int_p^x f(t) dt$

admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$

Rq: $f \geq 0$ et l'intégral peut être calculé

astuce:

* Mq série diverge $\Rightarrow$ terme général $\neq 0$

* penser à du module (val. absolue) pour faciliter le calcul

I / Modes de convergence

① Convergence simple des suites de fonctions

a) Def: Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ La suite $(f_n)_{n \geq p}$ converge simplement sur I vers une fonction f lorsque

$$\forall x \in I ; \underline{f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)} \text{ et on note } f_n \xrightarrow[I]{CS} f$$

b) Propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[I]{CS} f \\ J \subset I \end{array} \right. \Rightarrow f_n \xrightarrow[J]{CS} f|_J \text{ (restriction de } f \text{ à } J)$$

② Convergence simple des séries de fonctions :

a) Def Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ $\sum_{n \geq p} f_n$ converge simplement sur I lorsque $\forall x \in I ; \underline{\sum f_n(x)}$ converge

b) Propriété

$$\sum f_n \text{ CS sur } I \Rightarrow f_n \xrightarrow[I]{CS} 0$$

③ Convergence uniforme des suites de fonctions

def La suite $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ existe et converge vers 0
(on calcule le sup par étude f')

$$\exists (a_n)_{n \geq p}, \forall x \in I ; \forall n \geq p$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(a_n ne dépend pas de x)

(méthode pratique)

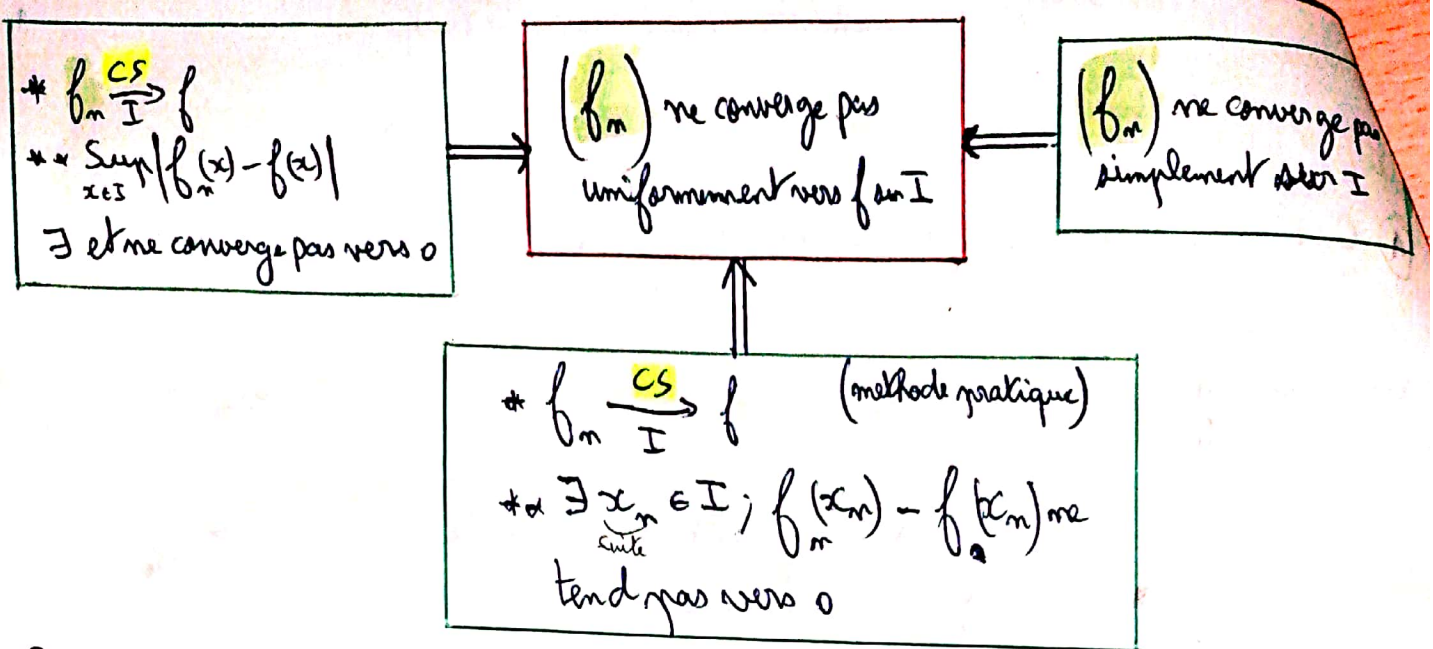
$$f_n \xrightarrow[I]{CU} f$$

(f_n) converge uniformément sur I vers f

$$f_n \xrightarrow[I]{CS} f$$

$$f_n \xrightarrow[a, b]{CU} f$$

pour $\forall \text{ seg } [a, b] \text{ de } I$



④ Convergence Normal des series de fonctions

a) Déf: $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$

On dit que $\sum_{n \geq p} f_n$ converge normalement sur I lorsque $\sup_{x \in I} |f_n(x)| \rightarrow 0$ et la serie

positive $\sum_{n \geq p} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge

b) Proposition

On calcul le $\sup_{x \in I} |f_n(x)|$ puis on consulte $\sum \sup_{x \in I} |f_n(x)|$

$\exists a_n; \forall x \in I; \forall n \geq p$
 $|f_n(x)| \leq a_n$ et $\sum a_n$ c.v

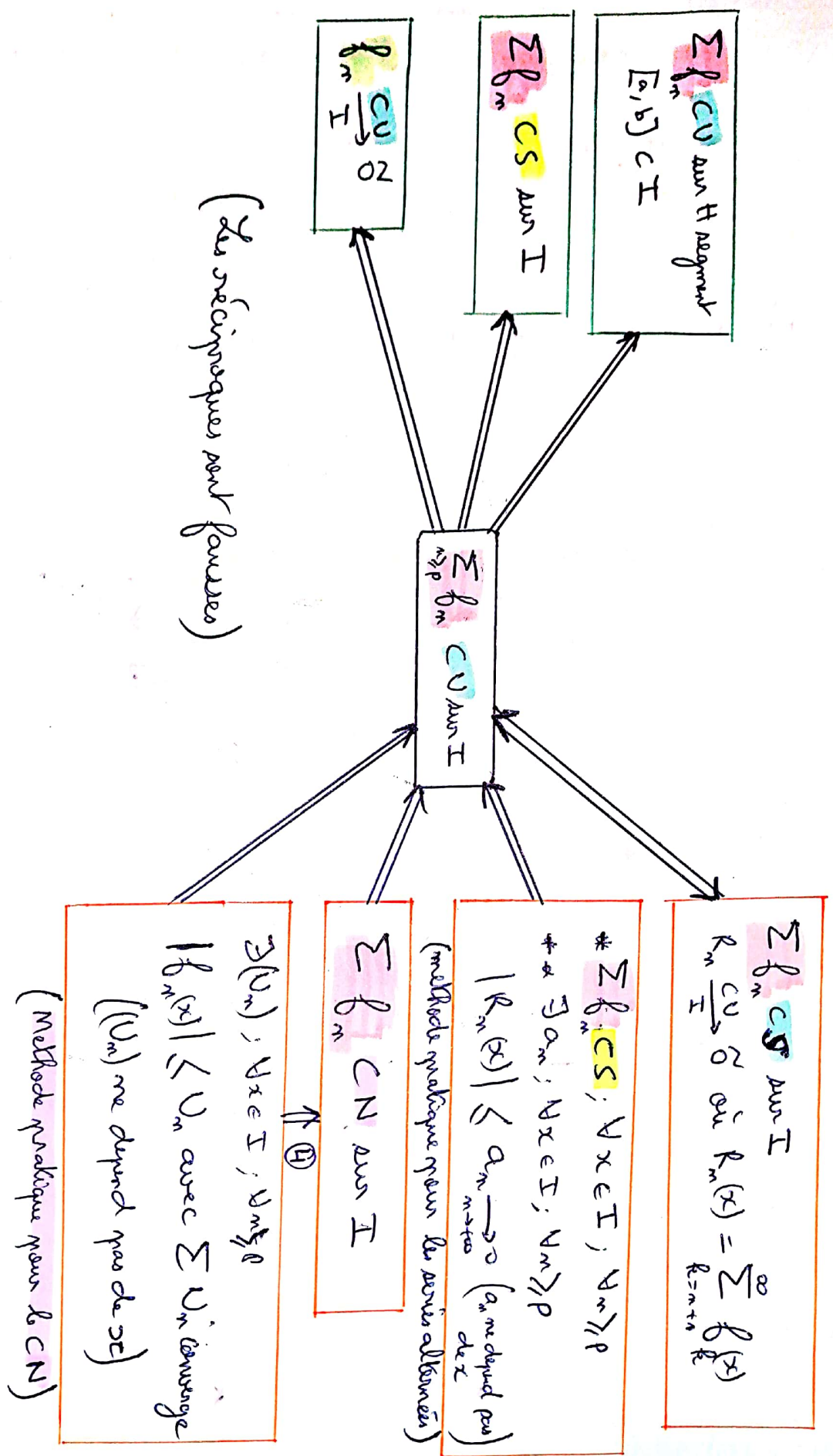
$\sum f_n$ c.v.N sur I

outils de travail: Majoration

$$|\sin u| \leq 1 / |\sin u| \leq |u| / \ln(1+u) \leq u / |1-\cos u| \leq \frac{u^2}{2}$$

$$|e^u - 1| \leq |u| / |\sin u| \leq \sqrt{u} / |\arctan u| \leq |u|$$

Convergence uniforme des series de fonctions



② Propriétés conservées par la CU

① Double limits

a) Théorème Double-limite:

$$\forall m \in \mathcal{P} \{ f_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_m$$

$$(ac \bar{I})$$

$$f_m \xrightarrow[\bar{I}]{CU} f$$

- (b_n) est convergente
- f admet une limite qd $x \rightarrow a$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$

b) Condition suffisante pour la C non uniforme des suites

Seit $f \in \frac{CS}{I}$ et $a \in \bar{I}$

- ⊛ $\forall n \gg p, f_m(x)$ admet une limite qd $x \rightarrow a$
- ⊛ f n'admet pas de limite qd $x \rightarrow a$

- ⊗ $\forall n, p, f_n(x)$ admet une limite qd $x \rightarrow a$
- ⊗ f admet une limite qd $x \rightarrow a$
- * $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$

f_n ne c pas $\vee$
sur I

c) Théorème de permutation "limite - somme"

$$\forall m \in \mathbb{N}, p; f_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_m$$

- ⊕ $\sum_{n=p}^{+\infty} b_n$ converge
- ⊕ $S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n$ admet une limite qd $x \rightarrow a$
- ⊕ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=p}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=p}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \sum_{n=p}^{+\infty} b_n$

d) Condition suffisante pour la C non uniforme des séries

④ $\forall m \gg p, f_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_m$

⑤ $\sum_{m \gg p} b_m$ diverge

$$\sum_{m, p} f_m \text{ ne C pas U sur I}$$

② $\forall n \gg p; f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$

③ $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=p}^{+\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=p}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

C.U et continuité

a) Cas des suites:

* Continuité en 1 pt:

$\forall n \geq p, f_n$ est continue en x_0

$f_n \xrightarrow[C.U.]{} f$ sur $x_0 \in J$

f est continue en x_0

* Continuité sur un intervalle:

$\forall n \geq p, f_n$ est continue sur I

$f_n \xrightarrow[C.U.]{} f$

f est continue sur I

b) Condition suffisante de la C non U des suites:

$\forall n \geq p, f_n$ est continue sur I

$f_n \xrightarrow[C.S.]{} f$ qui n'est pas continue sur I

(f_n) ne C pas U sur I

c) Théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions

* Continuité en 1 pt:

$\forall n \geq p, f_n$ est continue en x_0

$\sum f_n$ C.U. sur J où $x_0 \in J$

$S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n$ est définie et continue en x_0

* Continuité sur un intervalle

$\forall n \geq p, f_n$ est continue sur I

$\sum_{n \geq p} f_n$ C.U. sur I

$S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur I

$\forall n \geq p, f_n$ est continue sur I

$\sum f_n$ C.U. sur tt segment $[a, b] \subset I$

d) Condition suffisante de la C non U des séries

* $\forall n \geq p, f_n$ est continue

** $\sum_{n \geq p} f_n$ vers une fonction non continue (discontinue)

$\sum f_n$ ne C pas U sur I

③ Convergence uniforme et Dérivation

a) Cas des suites

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} & \circledast \forall n \geq p, f_n \in \mathcal{E}^1(I) \\ & \circledast f_n \xrightarrow{CS} f \\ & \circledast (f'_n) \subset \mathcal{U} \text{ sur } \# [a, b] \subset I \text{ (encore mieux } I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circledast f \text{ est } \mathcal{E}^1(I) \\ & \circledast \forall x \in I, \\ & \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \end{aligned}$$

b) Cas des séries

$$\begin{aligned} & \circledast \forall n \geq p, f_n \in \mathcal{E}^1(I) \\ & \circledast \sum_{n \geq p} f_n \text{ CS sur } I \\ & \circledast \sum f'_n \subset \mathcal{U} \text{ sur } \# [a, b] \subset I \text{ (encore mieux } I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circledast S(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n(x) \text{ est } \mathcal{E}^1(I) \\ & \circledast \forall x \in I, \\ & \quad S'(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} f'_n(x) \text{ (permutation)} \end{aligned}$$

④ Fonctions de classe $\mathcal{E}^k(I)$ ou $k \in \mathbb{N}^*$

a) Cas des suites $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} & \circledast \forall n \geq p, f_n \in \mathcal{E}^k(I) \\ & \circledast f_n \xrightarrow{CS} f \\ & \circledast \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}; f_n^{(i)} \text{ CS sur } I \\ & \circledast f_n^{(k)} \subset \mathcal{U} \text{ sur } \# [a, b] \subset I \text{ (encore mieux } I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circledast f \in \mathcal{E}^k(I) \\ & \circledast \forall x \in I, \forall i \in \{1, \dots, k\} \\ & \quad f^{(i)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}(x) \end{aligned}$$

b) Cas des séries: $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}; p \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}^*$

$$S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n(x)$$

$$\begin{aligned} & \circledast \forall n \geq p; f_n \in \mathcal{E}^k(I) \\ & \circledast \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \\ & \quad \sum_{n \geq p} f_n^{(i)} \text{ CS sur } I \\ & \circledast \sum_{n \geq p} f_n^{(k)} \subset \mathcal{U} \text{ sur } \# [a, b] \subset I \\ & \quad \text{(encore mieux } I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \circledast S \in \mathcal{E}^k(I) \\ & \circledast \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall x \in I \\ & \quad S^{(i)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n^{(i)}(x) \text{ (permutation)} \end{aligned}$$

① C U et intégration sur un segment ($I = [a, b]$)① Cas des suites: Permutation (limite - intégrale)Théorème: $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} & \forall n \gg p; f_n \text{ continue sur } [a, b] \\ & \textcircled{*} f_n \xrightarrow{CU} f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} f \text{ continue sur } [a, b] \\ & \textcircled{**} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \\ & \quad = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Corollaire: Condition suffisante pour la C non U

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} f_n \xrightarrow{CS} f \\ & \textcircled{*} f_n \in \mathcal{C}([a, b]) \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \end{aligned}$$

$$f_n \text{ ne C pas U sur } [a, b].$$

② Cas des series: Permutation "Somme - Intégrale"Théorème $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} \forall n \gg p; f_n \text{ continue sur } [a, b] \\ & \textcircled{*} \sum f_n \text{ CU sur } [a, b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n \text{ continue sur } [a, b] \\ & \textcircled{*} \sum_{n=p}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=p}^{+\infty} f_n(x) dx \\ & \text{on dit que } S \text{ s'intègre terme à terme sur } [a, b] \end{aligned}$$

Corollaire Condition suffisante pour la C non U

$$\begin{aligned} & \textcircled{*} \forall n \gg p; f_n \in \mathcal{C}([a, b]) \\ & \textcircled{*} \sum f_n \text{ CS sur } [a, b] \\ & \textcircled{*} \int_a^b \left(\sum_{n=p}^{+\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=p}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n \right) \end{aligned}$$

$$\sum f_n \text{ ne C pas U sur } [a, b].$$

$$\int_I \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^n \left(\int_I f_k(x) dx \right)$$

si les $\int_I f_n(x) dx$ convergent

$$\forall a \in]-1, 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a^n = 0$$

car $\sum n a^n$ converge (calculat)

$$\int \bigcirc = \sum \bigcirc$$

$\rightarrow \sum f_n \rightarrow$ sommation

II) Le théorème de la convergence dominée (TCD)

Énoncé: $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$ où I un intervalle quelconque

- * $\forall n \geq p; f_n \in \mathcal{E}^M(I)$
- * $f_n \xrightarrow[\text{I}]{cs} f$
- * $f \text{ est } \mathcal{E}^M(I)$
- * Dominaton: $\exists \psi$ intégrable sur I
tq $\forall x \in I$ et $\forall n \geq p; |f_n(x)| \leq \psi(x)$

- * $\forall n \geq p; f_n$ intégrable sur I
- * f intégrable sur I
- * $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_I f_n(t) dt \right] = \int_I f(t) dt$
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

Application du TCD pour les sommes partielles: $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}; S_n = \sum_{k=p}^n f_k$
 Appliquons le TCD pour la suite $(S_n)_{n \geq p}$

- * $\forall n \geq p; f_n \in \mathcal{E}^M(I)$ donc $S_n \in \mathcal{E}^M(I)$
- * $\sum_{n \geq p} f_n \xrightarrow[\text{I}]{cs} S$
- * $S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{E}^M(I)$
- * Dominaton: $\exists \psi$ intégrable sur I
tq $\forall t \in I; \forall n \geq p; |S_n(t)| \leq \psi(t)$

- * S intégrable sur I
- * $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I S_n(t) dt = \int_I S(t) dt$
- $\Rightarrow \int_I \sum_{n=p}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=p}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$
- c.à.d: S est intégrable terme à terme

III) Théorème d'intégration terme à terme (Pour les séries): $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$

- * $\forall n \geq p; f_n$ intégrable sur I
- * $\sum_{n \geq p} f_n$ c.s
- * $S = \sum_{n=p}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{E}^M(I)$
- * $\sum_{n \geq p} \left(\int_I |f_n(t)| dt \right)$ converge

- * S intégrable sur I
- * $\int_I S(t) dt = \sum_{n=p}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$
- * S intégrable terme à terme.

Analyse

Séries Entières

⊕ Rayon de convergence d'une série entière

① Définition d'une série entière

On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum a_n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$ ou bien $\sum a_n z^n$

exemple:

⊕ $\sum_{n \geq 1} x^n$: série géométrique est une série entière ($a_n = 1$)

⊕ $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ série exponentielle est une série entière ($a_n = \frac{1}{n!}$)

⊕ $\sum_{n \geq 0} b_n x^{2n}$ est une série entière avec les paires

(a_n) la suite définie par $\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = b_n \end{cases}$

⊕ $\sum_{n \geq 0} c_n x^{2n+1}$ est une série entière avec les impaires

(a_n) la suite définie par $\begin{cases} a_{2n+1} = c_n \\ a_{2n} = 0 \end{cases}$

② Le lemme d'Abel:

$$a_n r^n \text{ est bornée} \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}; |z| < r: \sum a_n z^n \text{ C.A}$$

③ Théorème et définition:

$\sum_{n \geq p} a_n z^n$ série entière où $a_n \in \mathbb{K}$

il $\exists$ un seul élément $R \in [0, +\infty]$ tq

$$\begin{cases} \oplus \forall z \in \mathbb{C}; |z| < R: \sum a_n z^n \text{ converge Absolument} \\ \oplus \forall z \in \mathbb{C}; |z| > R: \sum a_n z^n \text{ diverge grossier} \\ \text{c.à.d. } (a_n z^n) \text{ ne tend pas vers } 0 \end{cases}$$

R : le rayon de convergence de la série entière

④ Méthode de calcul

R_a : Rayon de convergence de $\sum_{n \geq p} a_n z^n$

(1) Méthode d'Alembert:

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in [0, +\infty] \text{ alors } R_a = \frac{1}{L}$$

avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$; $\frac{1}{+\infty} = 0$

(2): Méthode d'équivalence:

$$|a_n| \sim_{+\infty} |b_n| \Rightarrow R_a = R_b \text{ ou } R_b = \text{Ray}(\sum b_n z^n)$$

(3): Si $\forall z \in \mathbb{C}; \sum a_n z^n$ converge $\Rightarrow R_a = +\infty$

(4): Si $R = \text{Ray}(\sum a_n z^n)$ alors $R_a = R$

(5): Si $\exists n > 0; \forall n > p; |a_n| \leq M |b_n|$ an est dominé par b_n alors $R_a \geq R_b$

(6): Si $a_n = o(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$

(7): Si $\exists r > 0; \sum a_n r^n$ converge $\Rightarrow R_a \geq r$

(8): Si $\exists r > 0; \sum a_n r^n$ ne C pas $\Rightarrow R_a \leq r$

(9): Si $\exists r > 0; (a_n r^n)$ est bornée $\Rightarrow R_a \geq r$

(10): Si $\exists r > 0; (a_n r^n) \not\rightarrow 0 \Rightarrow R_a \leq r$

⑤ Série Entière et opération algébrique

a) Multiplication par un scalaire:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

$$\text{Ray}(\sum \alpha a_n z^n) = \text{Ray}(\sum a_n z^n)$$

b) Somme de deux séries entières
Proposition:

$$\begin{cases} \sum a_n z^n \text{ de rayon } R_a \\ \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_b \end{cases}$$

Notons R_{a+b} le rayon de $\sum (a_n + b_n) z^n$

$$\text{alors } \begin{cases} R_a \neq R_b \Rightarrow R_{a+b} = \min(R_a, R_b) \\ R_a = R_b \Rightarrow R_{a+b} > \min(R_a, R_b) \end{cases}$$

de plus $\forall z \in \mathbb{C} ; |z| < \min(R_a, R_b)$

$$\sum_{n=p}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=p}^{+\infty} b_n z^n$$

c) Produit de Cauchy de deux séries entières

Théorème

$$\text{Soient } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} a_n z^n \text{ de Rayon } R_a \\ \sum_{n \geq 0} b_n z^n \text{ de Rayon } R_b \end{cases}$$

Le produit de Cauchy des 2 séries entières

est une série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$

$$\text{avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

dans ce cas $R_c \geq \min(R_a, R_b)$

de plus $\forall z \in \mathbb{C} ; |z| < \min(R_a, R_b)$

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} c_n z^n \text{ converge absolument} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) \end{cases}$$

II) Propriétés analytiques:

$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série entière de rayon $R > 0$

et de somme totale $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors: $\square$

$\sum a_n x^n \in \mathbb{C} \text{ donc } \mathbb{C} \cup \text{un } [a, b] \in]-R, R[$

$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $] -R, R[$

S est $\mathcal{C}^1(]-R, R[)$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ qui est une série
entière de même rayon R

S est $\mathcal{C}^\infty(]-R, R[)$ et ses dérivées
successives s'obtiennent par dérivation
terme à terme.

$$\forall x \in]-R, R[: \int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

$S(x)$ admet un DL au v(0) à n'importe
quel ordre donné par:

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

(Taylor Young)

$$\left(\forall t \in]-E, E[; E < R \right) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} ; a_n = 0 \right)$$

Rq:

* D_f est toujours centré en 0. $(]-R, R[)$

$$]-R, R[\subset D_f \subset [-R, R]$$

Développement en Série Entière.

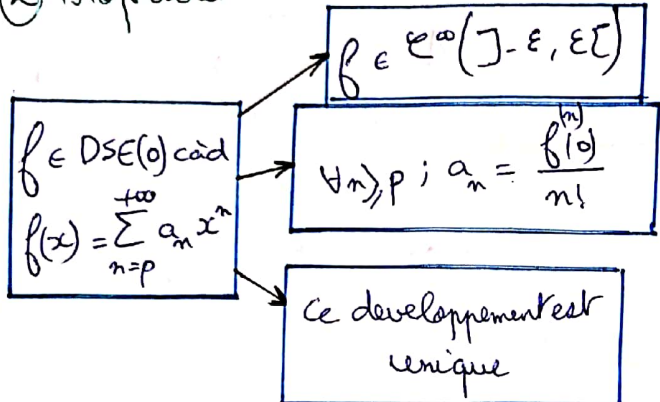
Définition.

f définie au v(0); c à d sur $] -r, r[$
 on dit que f est développable en
 série entière s'il $\exists (a_n)_{n \geq p}$ et $\varepsilon > 0$;

$$\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[, f(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n x^n.$$

On écrit en abrégé $f \in DSE(0)$

(2) Propriétés



(3) Série de Taylor.

a) Def

Série de Taylor de f est la série
 entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ et sa somme totale

$$T f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \text{ pour } f \in \mathcal{C}^\infty(]-\varepsilon, \varepsilon[)$$

b) Propriétés:

(P1): La série de Taylor de f peut
 avoir R nulle. $\Rightarrow f \notin DSE(0)$

(P2): La série de Taylor de f peut
 avoir un rayon de convergence $R > 0$

mais elle ne converge pas ($f \notin DSE(0)$)

(P3): La série de Taylor de f peut avoir
 un rayon de convergence $R > 0$ et

converge vers f dans ce cas:

$$f \in DSE(0)$$

(4) Condition Nécessaire et suffisante
 pour DSE

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[)$

$$f \in DSE(0)$$



La série de Taylor de f , converge
 simplement sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ vers f :

$$\forall x \in] -\varepsilon, \varepsilon[;$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x).$$

(5) Espaces des fonctions développables en SE

$$f \in DSE(0) \Rightarrow f' \in DSE(0).$$

$$f \in DSE(0) \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ est } DSE(0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in DSE(0) \\ g \in DSE(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f \cdot g \in DSE(0) \text{ en utilisant produit de Cauchy}$$

Rq:

Les équations diff: Remplacer la série
 dans l'éq permet d'établir une relation
 entre les a_k (la meilleur entre a_n et a_{n-1})

qui nous aide à calculer le rayon par
 la méthode D'Alembert puis rendre a_n

$$\text{sous forme de } \pi \text{ avec: } \prod_{k=1}^n \alpha = \alpha^n$$

$$\prod_{k=1}^n R = n! \quad \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n! \quad \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

fonction	developpement en serie entiere	Rayon	Methode.
e^z	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C})$	$+\infty$	formule Taylor-Lagrange
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$	1	$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $= \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$
$\log(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	Primitive de $\frac{1}{1+x}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	1	primitive de $\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	derivé de $\cosh(x)$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	primitive de $\cos x$ $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$
$(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$	1	équation diff
$\log(1-x)$	$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	1	

Leçon 1: Introduction au calcul de probabilité

I) Espace de probabilité

① Espace probabilisable

a) Univers: L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire qu'on note Ω

b) Tribu: Toute partie A de Ω contenant Ω et stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Omega \in \mathcal{A} \\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \\ A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{cases}$$

$$* \mathcal{A} = \{ \Omega, \emptyset, A, \bar{A} \}$$

$$* \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) : \text{parties de } \Omega$$

$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A})$: espace probabilisable

② Evénement d'un espace probabilisable

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ espace probabilisable.

* Ω : événement certain

* $\emptyset$: événement impossible

* $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$: réalisation de l'un au moins des A_n

* $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$: réalisation de tout les événements A_n

Def 1: on appelle événement tout élément de $\mathcal{A}$

Def 2: 2 événements A et B sont disjoints

lorsque $A \cap B = \emptyset$

Rq: Ne pas confondre entre disjoints et indépendants.

③ Probabilité sur un espace probabilisable

a) Def: Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ espace probabilisable on appelle probabilité toute application

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

$$tq \begin{cases} P(\Omega) = 1 \quad (\Omega \in \mathcal{A}) \\ \text{Si } (A_n)_{n \geq 0} \text{ suite d'événements} \\ \text{disjoints 2 à 2 alors } P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \end{cases}$$

$$\left(A_i \cap A_j = \emptyset \right)_{i \neq j}$$

$\Rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

b) Les 7 propriétés:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité

$$① P(\emptyset) = 0$$

$$② P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$③ P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$④ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$⑤ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$⑥ P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N P(A_n) : \text{l'égalité lorsque ils sont disjoints 2 à 2.}$$

$$⑦ P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) : \text{l'égalité lorsque ils sont disjoints 2 à 2.}$$

marqué à la même fois : (échec) ^{nombre} succès

c) Continuité monotone:

Théorème: Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ suite d'événement d'un $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ c.à.d $A_n \in \mathcal{A}$.

⊙ Si (A_n) est croissante c.à.d. $A_n \subset A_{n+1}$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

⊙ Si (A_n) est décroissante c.à.d. $A_{n+1} \subset A_n$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

corollaire: Soit (A_n) suite d'événement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

continuité des probabilités ou la permutation

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^N A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

d) Probabilité sur un ensemble dénombrable

Soit Ω un ensemble fini, ou bien dénombrable c.à.d. en bijection avec $\mathbb{N}$ ou encore $\Omega = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}; x_n \in \mathbb{R}$

Théorème (M. J. une proba)

Soit (p_n) une suite des reals positifs

tq $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

alors $\exists!$ probabilité P sur Ω :

$$\forall n \in \mathbb{N}; P(\{x_n\}) = p_n$$

II Indépendance et Mutuelle indépendance

① Événements indépendants

a) déf: 2 événements A et B d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

b) Propriétés:

(i) Ne pas confondre avec disjoints.

(ii) A et B indépendants:

$$\begin{cases} A \text{ et } \bar{B} \text{ indep} \\ \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ indep} \\ \bar{A} \text{ et } B \text{ indep} \end{cases}$$

② Événement mutuellement indépendants

a) Déf: Une suite d'événements (A_n) d'un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont mutuellement indépendants.

si $\forall \eta \subset \mathbb{N}; \eta$ fini

$$P\left(\bigcap_{n \in \eta} A_n\right) = \prod_{n \in \eta} P(A_n)$$

b) Propriétés

① La mutuelle indépendance entraîne l'indépendance 2 à 2.

② La réciproque est fautive.

III Probabilité conditionnelle

① Définition et propriétés

a) Déf: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de proba et B un événement tq $P(B) > 0$ alors l'application:

$$P_B: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

$$A \mapsto P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est une probabilité.

$P(A/B)$ se lit: probabilité de A sachant B

$$\text{donc } P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

b) Formule de probabilité composée

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ événements alors:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{k=2}^n P(A_k / A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) P(A_1)$$

choisir toujours l'événement ancien.

2 classe on tire un garçon
 formule des probabilités totale
 Système complet d'événement

Soit $(A_n)_{n \geq p}$ une suite d'événement de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que $(A_n)_{n \geq p}$ est un système complet d'événement si:

$$\begin{cases} (A_n)_{n \geq p} \text{ sont disjoints 2 à 2} \\ \bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n = \Omega \end{cases}$$

b) Théorème:

Soit $(A_n)_{n \geq p}$ un système complet d'événement de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $\forall B \in \mathcal{A}$

$$P(B) = \sum_{n=p}^{+\infty} P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

③ Formule de Bayes: $P(\text{événement}/\text{futur})$

Soit A et B deux événements tq $\begin{cases} P(A) > 0 \\ P(B) > 0 \end{cases}$

$$\text{alors } P(B/A) = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$\text{car } P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Leçon 2: Variables aléatoires discrètes

① Loi d'une variable aléatoire discrète

① Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace de probabilité

On dit que $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire discrète lorsque:

$$\begin{cases} X(\Omega) \text{ est finie ou bien dénombrable} \\ \forall A \subset X(\Omega); X^{-1}(A) \text{ est un événement de } \mathcal{A} \end{cases}$$

② Théorème et définition

Soit X une variable aléatoire. Alors

$$P_X: \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$$

$A \mapsto P(X \in A)$ est une probabilité

appelée la loi de la variable aléatoire X

Cette loi détermine la probabilité de chaque événement lié à X

mais ne détermine pas la variable X.

③ Les lois usuelles:

a) Loi uniforme:

On dit que X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ lorsque

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \text{ pour } k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

b) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$
On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p lorsque

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(X=1) = p \\ P(X=0) = 1-p$$

Elle s'applique à une épreuve qui peut donner lieu à 2 résultats

possibles : $\begin{cases} \text{succès} \\ \text{échec} \end{cases}$
 primality gain / perte d'une pièce de monnaie

c) Loi Binomiale $B(n, p)$ $n \in \mathbb{N}^*$ $p \in]0,1[$

On dit que X suit une loi Binomiale de paramètre (n, p) lorsque

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{posib.}} \underbrace{p^k}_{\text{succès}} \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{échec}}$$

Elle s'applique à une succession de n épreuves indépendantes à 2 et chaque épreuve donne lieu à 2 résultats possibles

$\begin{cases} \text{succès} \\ \text{échec} \end{cases}$
 Marque exacte / 3 bullet.

et permet de donner la probabilité d'avoir exactement k succès pendant les n épreuves

d) Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque *marque but au 5^{ème} coup.*

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \geq 1; P(X=n) = (1-p)^{n-1} p$$

Elle s'applique à une répétition d'une épreuve donnant à 2 résultats $\begin{cases} \text{succès} \\ \text{échec} \end{cases}$
 lieu

Elle permet d'obtenir la probabilité d'avoir le 1^{er} succès au n ème coup.

e) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}; \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \\ P(X=n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

elle permet de décrire certains phénomènes :

nombre de maladies, nombre de pannes d'une machine, ...

Rq: Si $X \sim B(n, \frac{\lambda}{n})$ avec $\lambda > 0$
 $\Rightarrow P(X=k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

II Variables aléatoires composées

Théorème et définition:

Soit X une variable discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application alors $Y = f(X)$ est encore une variable aléatoire discrète dont la loi est entièrement déterminée :

$$P(Y \in B) = P(f(X) \in B) = P(X \in f^{-1}(B))$$

Vecteurs aléatoires discrets.

Lois Marginales et lois conjointes

a) Déf: Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur le même

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ On a le couple $(X, Y) \Rightarrow$ on peut déterminer la loi de X et la loi de Y

La loi de $Z = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ s'appelle loi conjointe des variables $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$
Loi des couples

Tandis que les lois de $X_1, X_2, \dots$ et X_n s'appellent les lois marginales du vecteur

$$Z = (X_1, \dots, X_n)$$

b) Théorème:

La loi conjointe détermine entièrement les lois marginales tandis que les lois marginales ne permettent pas de déterminer la loi conjointe.

exemple: si $Z = (X, Y)$

$$P(\underbrace{X=x_p}_{\text{fixé}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_p, Y=y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z=(x_p, y_n))$$

$$P(Y=y_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n, Y=y_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z=(x_n, y_p))$$

② Les lois conditionnelles

a) Définitions

Soit X et Y 2 v.a.d définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

soit $A \in \mathcal{A}$ tq $P(X \in A) > 0$

on définit alors la loi de Y sachant $X \in A$

par:

$$P(Y \in B / X \in A) = \begin{cases} \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(X \in A)} & P(X \in A) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par convention, si $P(X \in A) = 0$ alors $P(Y \in B / X \in A) = 0$

b) Propriétés

La connaissance de la loi X et de la loi de Y sachant " $X=x$ " pour tout $x \in X(\Omega)$ permet de déterminer la loi du couple (X, Y) ,
 $X; Y/X \Rightarrow$ loi de couple

donc la loi de Y !

$$P(X=p; Y=q) = P(Y=q / X=p) \cdot P(X=p)$$

IV) Indépendance des variables aléatoires

① Couple de variables indépendantes

a) Définition:

deux variables X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont indépendantes lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(X=x_n, Y=y_n) = P(X=x_n) \cdot P(Y=y_n)$$

$$\text{ou } X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$$

b) Propriétés

X et Y indépendants

$f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendants

pour tout $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

② famille finie de variable mutuellement indépendants

a) Déf: Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ famille finie de variables aléatoires définie sur la même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On dit que les variables sont mutuellement indépendants lorsque: $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_i(\Omega)$

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n).$$

ou encore: $\forall B \subseteq \{1, \dots, n\}$,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

b) Propriétés

$X_1, X_2, \dots, X_n$ mutuellement indépendants alors:

① Les variables sont indépendants 2 à 2

② $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$; $f(X_1, X_2, \dots, X_i)$ est indépendant de $g(X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_n)$

c) Remarque

L'indépendance 2 à 2 n'entraîne pas la mutuelle indépendances.

leçon 3: Les paramètres d'une loi de Probabilité

① Expérience d'une variable aléa discrètes

① Définitions Soit X une v.a discrète tq $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

Def 1:

On dit que X admet une espérance

lorsque $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente dans ce cas:

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) \quad \text{s'appelle de } X$$

Def 2:

On dit que X est centrée lorsque $E(X) = 0$

Def 3: Soit $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que $f(X)$ admet une espérance lorsque $\sum_{n \geq 0} f(x_n) \cdot P(X = x_n)$ est absolument convergente; dans ce cas:

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) P(X = x_n) \quad \text{c'est la formule de transfert}$$

* lorsque $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et X admet une espérance alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

de plus: $(X \text{ est d'espérance finie}) \Leftrightarrow$

$$\sum_{n \geq 0} P(X \geq n) \text{ converge}$$

② Propriétés

(P1): Linéarité: Soient X et Y deux v.a. d'admettant des espérances alors

$$\begin{cases} E(aX + Y) = a E(X) + E(Y) \\ E(aX + b) = a E(X) + b \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(P2): Positivité:

$$\begin{cases} X \text{ admet une espérance} \\ X \geq 0 \end{cases} \Rightarrow E(X) \geq 0$$

(P3): Croissance:

$$\begin{cases} X \geq Y \\ X \text{ et } Y \text{ admettant une espérance} \end{cases} \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$$

X^2 admet une espérance alors
admet aussi une espérance

$$|X| \leq 1 + X^2$$

③ Cas des variables aléatoires indépendantes

a) Proposition

Soient X et Y deux v.a. d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\begin{cases} X \text{ admet une espérance} \\ Y \text{ admet une espérance} \\ X \text{ et } Y \text{ indépendants} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X.Y \text{ admet une espérance} \\ E(X.Y) = E(X).E(Y) \end{cases}$$

b) Remarque:

La réciproque est fautive:

c) Propriétés

$$\begin{cases} f(X) \text{ admet une espérance} \\ g(Y) \text{ admet une espérance} \\ X \text{ et } Y \text{ indépendants} \end{cases} \Rightarrow E[f(X).g(Y)] = E(f(X)).E(g(Y))$$

II) Variance et Covariance de deux variables aléatoires:

X et Y 2 v.a. tq $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent.

① Définitions

Def 1: Soient X et Y 2 v. aléa. dis.

On appelle la covariance de X et Y le

réel noté $\text{cov}(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$

si X et Y sont indépendants alors $\text{cov}(X, Y) = 0$

Def 2: On appelle la variance de X le

réel positif noté

$$V(X) = \text{cov}(X, X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

On dit que X est une variable réduite lorsque $V(X) = 1$

Def 3:

On appelle l'écart-type de X le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

② Exemples:

$$X \sim \text{Bernoulli de paramètre } p \Rightarrow \begin{cases} E(X) = p \\ V(X) = p(1-p) \end{cases}$$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = n.p \\ V(X) = n.p(1-p) \end{cases}$$

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda, V(X) = \lambda$$

$$X \sim \text{Geo de paramètre } p \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{p} \\ V(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{cases}$$

$$\text{Rq: } E[(X - E(X))^2] = V(X)$$

$$* (X \text{ centrée}) \Leftrightarrow E(X) = 0$$

$$* (X \text{ réduite}) \Leftrightarrow V(X) = 1$$

$$* X - E(X) \text{ est toujours centrée}$$

$$* \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \text{ est toujours réduite}$$

③ Propriétés X et Y 2 v.a. d.

$$(P_1): V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$(P_2): V(X + Y) = \begin{cases} V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \\ V(X) + V(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ indépendants} \end{cases}$$

$$(P_3): \text{si les } (X_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ sont indépendantes 2 à 2 alors } V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

$$(P_4): |\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)} \text{ "Cauchy-Schwarz"}$$

III) Inégalité de Markov et Inégalité de Tchebychev:

① Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance alors $\forall \varepsilon > 0$

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

② Inégalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire tq X^2 admet une espérance alors $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

③ Loi faible des grands nombres

Soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a indépendantes

2 à 2 et de même loi; Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$

$$P(|\frac{S_n}{n} - E(X_1)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X_1)}{n \varepsilon^2}$$

IV) Fonction génératrice

Les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$

① Définition: On appelle la fonction génératrice de X :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X=n)$$

est donc une série entière

Remarquons que $\begin{cases} P(X=n) \leq 1 \\ \text{Ray}(\sum t_n) = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\text{Ray}(\sum t^n P(X=n)) > 1$, ainsi $G_X(t)$ est une s. entière de rayon $R > 1$

⑤ Propriétés

(i) G_X est la somme totale d'une série entière de rayon $R > 1$.

ii) $G_X \in \mathcal{E}^\infty]-1, 1[$ et continue sur $[-1, 1]$

iii) $(X \text{ admet une espérance}) \Leftrightarrow (G_X \text{ est dérivable à gauche en } 1)$

dans ce cas $E(X) = G'_X(1)$

iv) $(X^2 \text{ admet une espérance}) \Leftrightarrow (G_X \text{ est 2 fois dérivable à gauche en } 1)$

dans ce cas

$$\begin{cases} E(X^2) = G''(1) + G'(1) \\ V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \end{cases}$$

v) G_X caractérise la loi

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

vi) Si $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ mutuellement indépendantes

alors $G_{\sum X_k}(t) = G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(t)$

c.à.d la fonction génératrice de la somme des variables est le produit des fonctions génératrices

$$\begin{aligned} &\forall t \in]-1, 1[\\ &G_{\sum_{k=1}^n X_k}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) \end{aligned}$$

I Introduction

I, J 2 intervalles quelconques

pour $x \in J$, on pose $F(x) = \int_I f(x, t) dt$

où $f: J \times I \rightarrow \mathbb{K}$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

$$D_F = \{x \in J; F(x) \text{ existe}\}$$

$$= \{x \in J; \int_I f(x, t) \text{ converge}\}$$

II Continuité d'une intégrale paramétrée

1 Théorème de Continuité

Soient $f: J \times I \rightarrow \mathbb{K}$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

$$\text{et } F(x) = \int_I f(x, t) dt.$$

Si:

* $\forall t \in I; x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J

* $\forall x \in J; t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^m(I)$

* Dominaton: $\exists \varphi$ intégrable positive sur I

$$\begin{aligned} \forall x \in J \\ \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \end{aligned}$$

alors F est définie, continue sur J .

2 Dominaton sur tout segment

Si:

* $\forall t \in I; x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J .

* $\forall x \in J; t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^m(I)$

* $\forall [a, b] \subset J; \exists \varphi$ intégrable positive sur I

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b] \\ \forall t \in I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t). \end{aligned}$$

alors F est définie, continue sur J

3 Cas d'un segment: $(I = [a, b])$

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \text{ où } f: J \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$$

Si f est continue sur $J \times [a, b]$

alors F est définie, continue sur J .

Dans ce cas $\forall \alpha \in J, \forall \beta \in J$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx \right) dt.$$

II Dérivation d'une intégrale paramétrée

1 Théorème

$$f: J \times I \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

on pose $F(x) = \int_I f(x, t) dt$.

Si: * $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{C}^1(J)$

* $\forall x \in J; t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I

* $\forall x \in J; t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)$ est $\mathcal{C}^m(I)$

* Dominaton de $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ sur J ou bien

sur tout segment $[a, b] \subset J$ c-à-d

il $\exists \varphi$ intégrable positive tq

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b] \\ \forall t \in I \end{cases} \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

alors

$$F(x) = \int_I f(x, t) dt \text{ est définie de } \mathcal{C}^1(J)$$

et

$$\forall x \in J; F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x} dt.$$

(2) Cas d'un segment: $I = [a, b]$

Soit $f: \gamma \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$

si f continue sur $\gamma \times [a, b]$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue sur $\gamma \times [a, b]$

alors $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est définie de $\mathcal{C}^1(\gamma)$

et $\forall x \in \gamma$ $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt$

Astuce. (IPP)

Si $\lim_a u.v$ n'est pas finie

alors: on doit ajouter une constante

d'intégration à la fonction v

généralement, $\tilde{v}(x) = v(x) - c$

où $c = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$.