

# \* Signaux canoniques.

## 1) Echelon

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E_0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow e(t) = E_0 u(t)$$

Rq: Si  $0 = \tau \Leftrightarrow e(t) = E_0 u(t - \tau)$ .

La réponse à cette excitation s'appelle la réponse indicielle  $\rightarrow$  échelon

## 2) Impulsion de Dirac

L'impulsion unitaire  $\delta(t)$  est définie par:

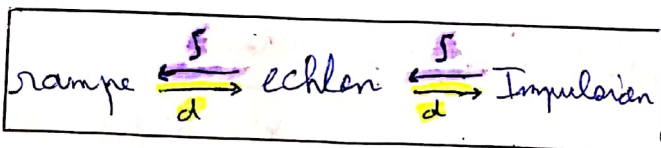
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \end{cases}$$

C'est la réponse impulsionnelle.

## 3) Rampe

Ce signal permet d'analyser la réponse d'un système asservi à une consigne variable dans le temps définie par  $r(t) = a t u(t)$  (pente)

Ex:



## 4) Sinusoïdale:

$$\begin{aligned} e(t) &= E_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ \Rightarrow x(t) &= E_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{même } \omega \\ \neq \text{amplitude et phase} \end{array} \right\}$$

# \* Modélisation des systèmes dynamiques

## 1) Déf:

Il  $\exists$  2 sortes de modèle:

\* Modèle de connaissance: mise en équation du système à partir des lois physiques

\* Modèle de comportement: se détermine par identification graphique (courbe)

## 2) Eq diff:

de la forme:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

$s(t)$ : sortie;  $e(t)$ : entrée;  $n$ : ordre du système

$a_0, \dots, a_n$  et  $b_0, \dots, b_m$ : les coeff constants

$[m < n]$ : système réel (physique)

# \* Transformées de Laplace

on pose  $p = j\omega$

## 1) Déf

La transformée de Laplace de  $f(t)$ , la fonction  $F(p)$  définie par:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \text{ noter } \mathcal{L}(f(t))$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} dt$$

## ② Propriétés

- **Unicité**: chaque  $f(t)$  a un unique  $F(p)$  et

- **Linéarité**:  $\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(p) + \beta G(p)$

- **Produit scalaire**:  $\mathcal{L}(f(t) \cdot g(t)) \neq F(p) G(p)$

- **Dérivation**:

• 1<sup>er</sup>,

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p F(p) - \underbrace{f(0^+)}_{CI}$$

• 2<sup>nd</sup>

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p f(0^+) - p' f'(0^+)$$

ingé: les degrés  $p$  > et  $f$  ↑

- **Intégration**:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} F(p)$$

• **Intégral Infini**  $\mathcal{L}\left[\int_0^\infty f(t) dt\right] = \lim_{p \rightarrow 0} F(p)$

théorèmes:

• du retard ou translation:

$$\mathcal{L}[f(t-z) u(t-z)] = e^{-zp} \cdot F(p)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t) u(t)] = F(p+a)$$

de la valeur initiale:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p)$$

• de la valeur finale:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p F(p)$$

## 3) Transformées des signaux us

**Echelon**:  $\mathcal{L}(u(t)) = \frac{e^p}{p}$

**Impulsion**:  $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

**Rampe**:  $\mathcal{L}(r(t)) = \frac{a}{p^2}$

**Sinuséide**:  $\mathcal{L}(\sin(\omega t) u(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\mathcal{L}(\cos(\omega t) u(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

4) transformées usuelles.

$\delta(t) \rightarrow 1$

$1 \cdot u(t) \rightarrow \frac{1}{p}$

$A \cdot u(t) \rightarrow \frac{A}{p}$

$t u(t) \rightarrow \frac{1}{p^2}$

$A t u(t) \rightarrow \frac{A}{p^2}$

$A t^n u(t) \rightarrow A \frac{n!}{p^{n+1}}$

$e^{-at} u(t) \rightarrow \frac{1}{p+a}$

$\sin(\omega t) u(t) \rightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$\cos(\omega t) u(t) \rightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}$

# fonctionnels et leurs transformations

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{G(p)}{A(p)}$$

## Fonction de Transfert

L'éq diff:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

↳  $\mathcal{L}(CI=0)$  alors l'éq diff devient:

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

$$\text{d'où } S(p) [a_n p^n + \dots + a_0] = E(p) [b_m p^m + \dots + b_0]$$

Le rapport:  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

$$= \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

## a) Définition

$H(p)$  est appelé fonction de transfert ou transmittance du système, permet de déterminer les caractéristiques principales du système sans résoudre l'éq diff

$\deg(D(p)) \Rightarrow$  l'ordre du système

## b) Propriétés

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{(p-z_1) \cdot (p-z_2) \cdot \dots \cdot (p-z_m)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_n)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$z_i$ : les zéros;  $p_i$ : les pôles sont les racines des l'équations  $N(p)=0$  et  $D(p)=0$

avec:

$$G(0) = 1 \text{ et } A(0) = 1$$

$$G(p) = 1 + \beta_1 p + \dots + \beta_m p^m$$

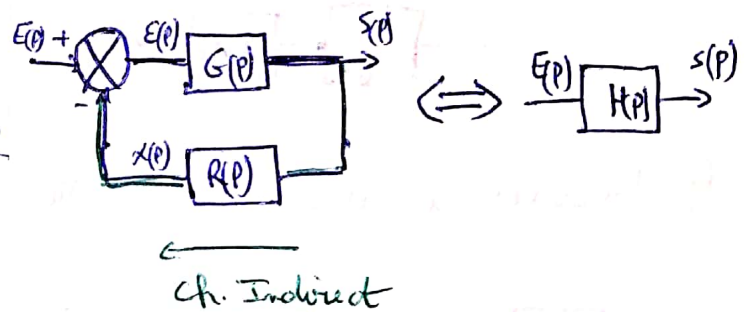
$$A(p) = 1 + d_1 p + \dots + d_{n-\alpha} p^{n-\alpha}$$

$$K = \frac{b_0}{a_0} : \text{gain statique}$$

$n$ : ordre du système.

$\alpha$ : nombre d'intégration classe

Forme Canonique du schéma fonctionnel ch. direct



FT ch D:  $G(p)$

FT ch ID:  $R(p)$

\* fonction de Transfert en boucle ouverte FTBO

$$FTBO = FT \text{ ch D} \times FT \text{ ch ID}$$

$$FTBO = G(p) \cdot R(p)$$

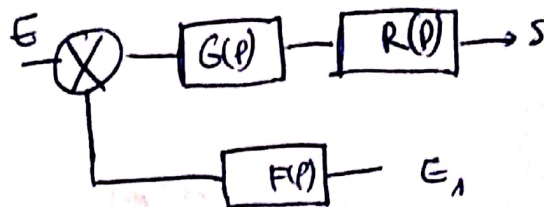
FTBF: (Fonction de Transfert en boucle fermée)

$$FTBF = \frac{\text{Signe de l'entrée} \oplus CRD}{1 \oplus \text{Signe inverse de retour} FTBO}$$

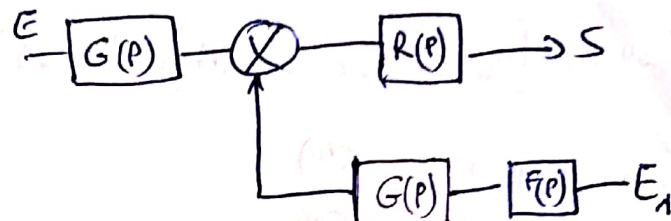
Signe de l'entrée

Signe inverse de retour

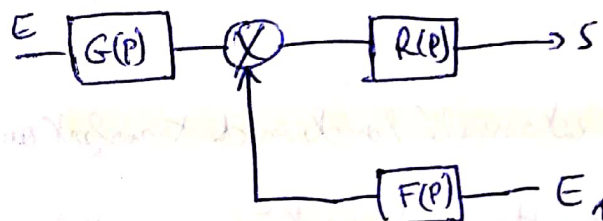
⊗ Avancer un sommateur % à un bloc



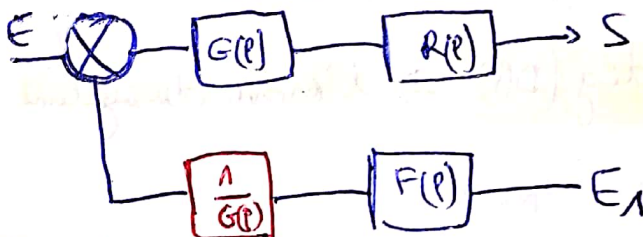
( $\Rightarrow$ )



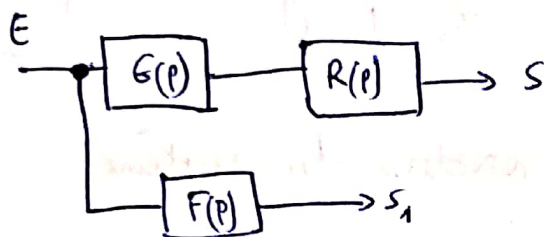
⊗ Reculer un sommateur % à un bloc



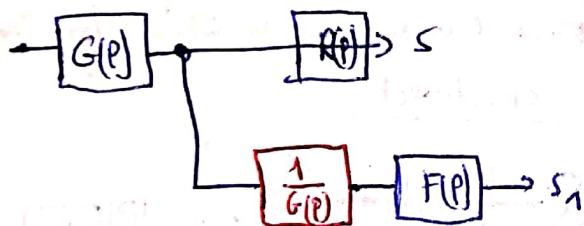
( $\Rightarrow$ )



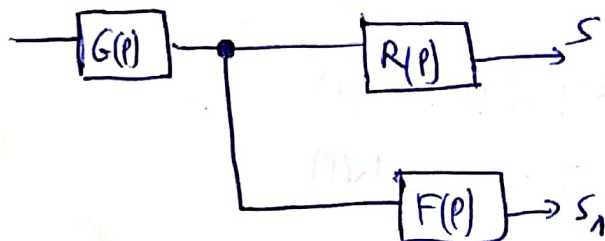
⊗ avancer un noeud % à un bloc



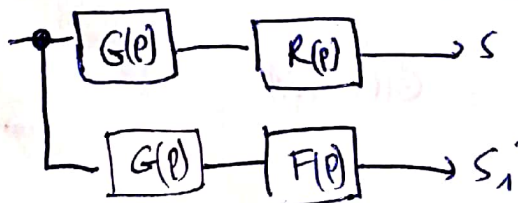
( $\Rightarrow$ )



⊗ Reculer un noeud % à un bloc



( $\Rightarrow$ )



## I / Système du premier ordre :

\* éq diff:  $\tau \frac{d\lambda(t)}{dt} + \lambda(t) = k e(t)$

\* fonction de transfert:  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$

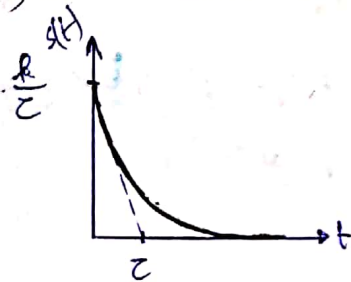
\* Réponse impulsionnelle

$e(t) = \delta(t) \Leftrightarrow E(p) = 1$

$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{k}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$

$\lambda(0) = \frac{k}{\tau}$  ;  $\lambda(\infty) = 0$  ;  $\lambda'(0) = -\frac{k}{\tau^2}$

$\lambda(\tau) = \lambda(0) 0,37$



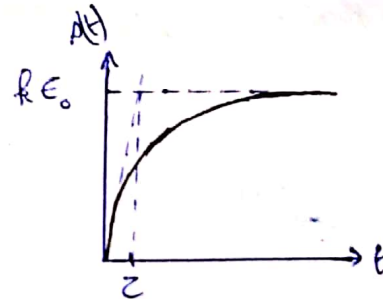
\* Réponse indicielle

$e(t) = E_0 u(t) \Leftrightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$\Rightarrow \lambda(t) = k E_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$

$\lambda(0) = 0$  ;  $\lambda(\infty) = k E_0$  ;  $\lambda'(0) = \frac{k E_0}{\tau}$

$\lambda(\tau) = 0,63 \lambda(\infty)$  ;  $T_{R5\%} = 3\tau$



## II / Système du second ordre :

\* éq diff:  $\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{d\lambda(t)}{dt} + \lambda(t) = k e(t)$

ou  $\frac{d^2 \lambda(t)}{dt^2} + 2\xi \omega_n \frac{d\lambda(t)}{dt} + \omega_n^2 \lambda(t) = k \omega_n^2 e(t)$

\* fonction de Transfert:  $H(p) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$   
ou  $H(p) = \frac{k \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2}$

$\Rightarrow p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 = 0$  :  $\Delta = 4 \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$

#  $\xi > 1 \Rightarrow \Delta > 0$  : 2 poles réels distincts de la forme  $p_{1/2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

c'est le régime aperiodique (peut être un produit de 2 système d'ordre 1)

$$\Rightarrow H(p) = \frac{k \omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \quad \text{avec } \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \text{ et } \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{p_1 p_2} = \tau_1 \tau_2 = \omega_n^2}$$

#  $\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double de la forme  $p_1 = p_2 = -\omega_n = -\frac{1}{\tau}$

c'est le régime critique

$$\Rightarrow H(p) = \frac{k \omega_n^2}{(p-p_1)^2} = \frac{k \omega_n^2}{(p+\omega_n)^2} = \frac{k}{(1+\tau p)^2}$$

#  $\xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes conjugués de la forme  $p_{1/2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\xi}$

c'est le régime pseudo-périodique

\* Réponse impulsionnelle

$$e(t) = \delta(t) \cdot u(t) \rightarrow E(p) = 1$$

$$\delta(0) = 0 ; \delta(\infty) = 0 ; \delta'(0) = k \omega_n^2$$

# RA:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{k \omega_n^2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\ &= \frac{k}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}}) \quad \text{avec } \tau_i = \frac{1}{p_i} \end{aligned}$$

# RC:

$$\delta(t) = k \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t) \quad \text{avec } p_1 = p_2 = -\omega_n$$

# RPP:

$$\delta(t) = \frac{k \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t) e^{-\xi \omega_n t} u(t)$$

|           |                                     |       |
|-----------|-------------------------------------|-------|
| $\xi < 1$ | $T_{n5\%} = \frac{3}{\omega_0 \xi}$ | R.P.P |
| $\xi = 1$ | $T_{n5\%} = \frac{5}{\omega_0}$     | RC    |
| $\xi > 1$ | $T_{n5\%} = \frac{6\xi}{\omega_0}$  | RA    |

\* Réponse indicielle:

$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\delta(0) = k E_0 ; \delta(\infty) = 0 ; \delta'(0) = 0$$

$$\# \text{ RA: } \omega_n^2 = p_1 p_2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} ; \xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad \text{tg horis à l'origine}$$

$$\begin{aligned} \delta(t) &= k E_0 \left[ 1 + \frac{\omega_n^2}{p_1 - p_2} \left( \frac{1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} \right) \right] \\ &= k E_0 \left[ 1 + \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left( \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\# \text{ RC: } p = p_1 = p_2 = -\omega_0 \text{ et } \tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\delta(t) = k E_0 [1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

# RPP:

$$\delta(t) = k E_0 \left[ 1 + \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t - \varphi) \right]$$

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} : \text{pseudo-période}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{k = \frac{\delta(\infty)}{E_0}}$$

$$t_p = \frac{n\pi}{\omega_p} = \frac{n\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$D_{n\%} = 100 \left| \frac{s(t_n) - \delta(\infty)}{\delta(\infty)} \right| = 100 e^{-\frac{n\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

\* Système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$

.) Les Asymptotes: en BF:  $k_{dB}$  et  $0^\circ$ en HF:  $-20 \text{ dB/décade}$  et  $(-90)^\circ$ 

$$\left. \begin{aligned} G_{dB}(\omega_0) &= k_{dB} - 3 \text{ dB} \\ \varphi(\omega_0) &= -45^\circ \end{aligned} \right\} \text{point particulier}$$

.) Lecture graphique:  $k = 10^{\frac{k_{dB}}{20}}$ 

$$\varphi(\omega_0) = -45^\circ \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

Rappel:

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$$

$$G(\omega) = |H(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20 \log G$$

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log k - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \\ &= k_{dB} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned}$$

\* Système du 2<sup>ème</sup> ordre :

$$H(p) = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}$$

 $\forall \xi$ .) Les asymptotes: en BF:  $k_{dB}$  et  $0^\circ$  (même que le 1<sup>er</sup> ordre)en HF:  $-40 \text{ dB/décade}$  et  $-180^\circ$  (double que le 1<sup>er</sup> ordre)

$$\left. \begin{aligned} G(\omega_0) &= \frac{k}{2\xi} \\ \varphi(\omega_0) &= -90^\circ \end{aligned} \right\} \text{point particulier}$$

\* pour  $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$  c'est le phénomène de résonance.  $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ \* facteur de qualité ou coefficient de surtension:  $Q = \left| \frac{G_{\max}(\omega_R)}{G(0)} \right| = \left| \frac{G_{\max}}{k} \right| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

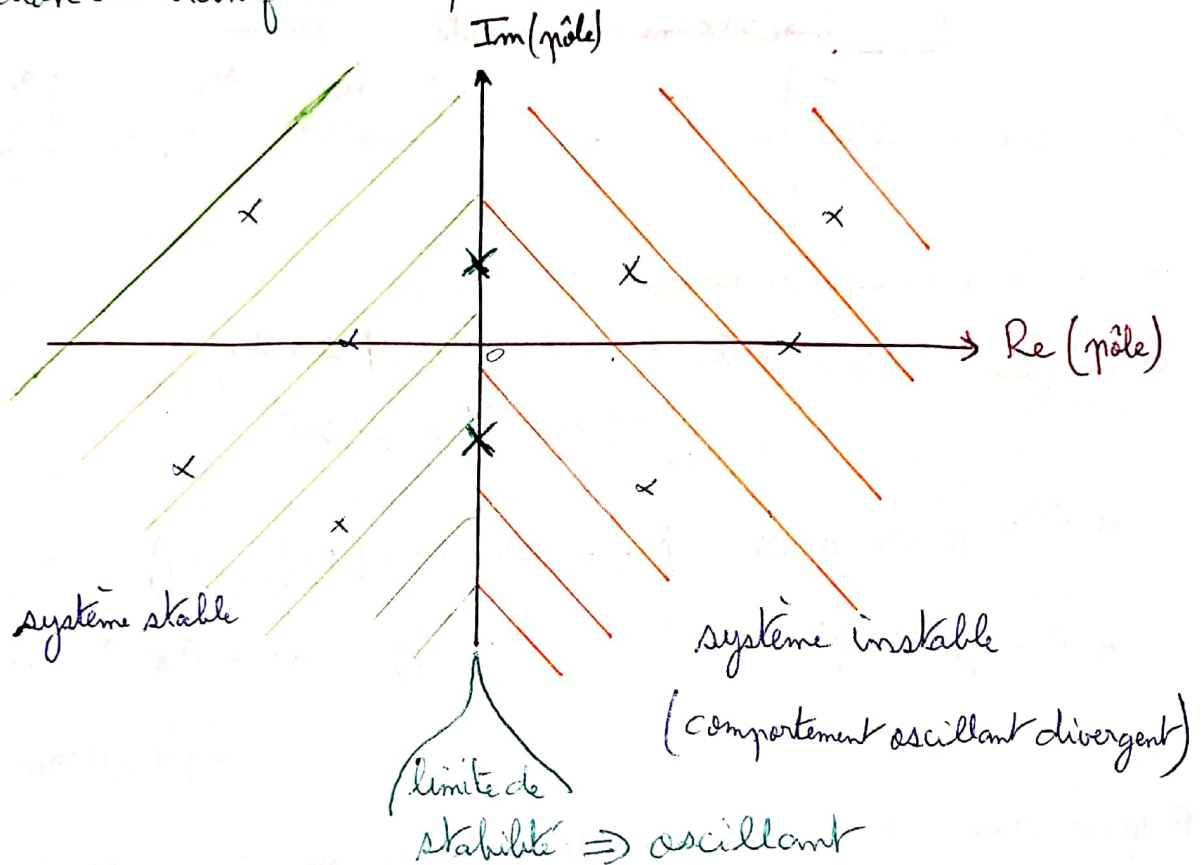
# Auto Chap 4: Performances d'un système linéaire asservi

Système linéaire asservi : Boucle fermée

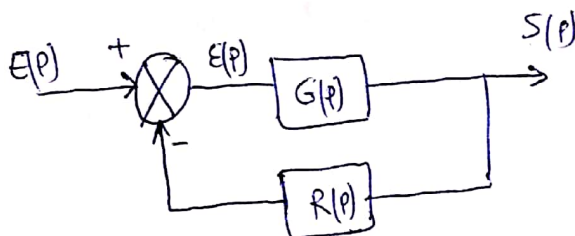
\* Rapidité : si  $\tau \uparrow \Rightarrow T_{RS} \uparrow \Rightarrow$  Rapidité  $\downarrow$

de même  $\omega_0 \downarrow \Rightarrow$  Bande passante  $\downarrow$

\* fonction de transfert et rapidité



\* Stabilité des systèmes bouclés



$$FTBO(p) = G(p) \cdot R(p)$$

$$FTBF(p) = \frac{G(p)}{1 + FTBO(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$= \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

$\Rightarrow$  d'où l'équation caractéristique devient :  $D(p) = 1 + FTBO(p) = a_n p^n + \dots + a_0 = 0$

Condition 1 : nécessaire mais pas satisfaisante :  $a_i \neq 0$  et même signe.  
Si l'un n'est pas vérifié  $\Rightarrow$  système aux limites de stabilité & les 2 non vérifiées  $\Rightarrow$  système instable

2) Condition 2: La table de Routh, permet de déduire les signes de partie réelle des racines de l'équation caractéristique.

|           |           |           |           |          |       |       |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|-------|
| $p^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | ...      | $a_2$ | $a_0$ |
| $p^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | ...      | $a_1$ |       |
| $p^{n-2}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     | ...      |       |       |
| $p^{n-3}$ | $d_1$     | $d_2$     | $d_3$     | ...      |       |       |
| $\vdots$  | $\vdots$  | $\vdots$  | $\vdots$  | $\vdots$ |       |       |
| $p^1$     | $m_1$     |           |           |          |       |       |
| $p^0$     | $r_1$     |           |           |          |       |       |

→ colonne des pivots

ex:  $C_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$ ,  $C_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$ ;  $d_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}$

\* Critère graphique de Rivers

⇒ le point critique  $\begin{cases} G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 0 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) = \varphi = -180^\circ \end{cases}$

# Marge de gain:  $M_G = -20 \log(|H(j\omega_{-180})|)$  ( $> 0$ : stable)

# Marge de phase:  $M_\varphi = \arg(H(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$  ( $> 0$ : stable)

$|H_{Bo}(j\omega_{0dB})| = 1$

⊗ pole dominant: est le pole le plus proche de l'axe imaginaire

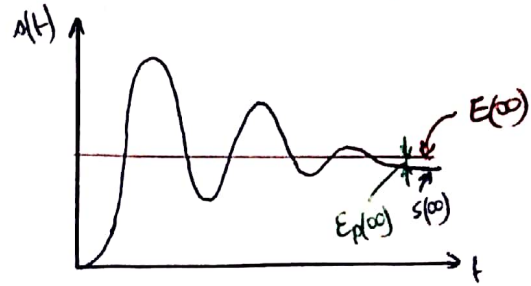
### 3.1 Erreur statique de position :

$E_p = E_s$  = erreur déterminée suite à une entrée échelon,  $e(t) = E_0 u(t)$

$$\Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$E_p = E_s = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + FTBO(p)}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{k}{(1 + \tau p)p}}$$



NB : Si  $\alpha = 0 \Rightarrow E_p = E_s = \frac{E_0}{1 + k}$   
 classe plus degré de  $(1 + FTBO)$

Si  $\alpha > 1 \Rightarrow E_p = 0$ .

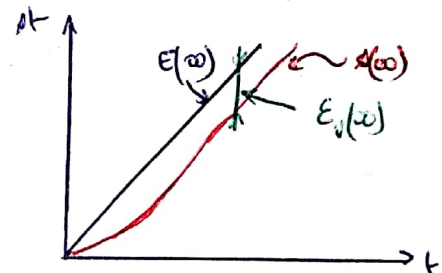
on ajoute  $\left[ \frac{1}{p} \right]$  : intégrer

Si  $k \nearrow \Rightarrow E_p \searrow \Rightarrow$  précision  $\nearrow$   
 $\Rightarrow$  stabilité  
 $\Rightarrow$  B.P.  $\Rightarrow$  rapidité

### 2.3.2 Erreur statique de Traînage ou de vitesse ( $E_T$ ou $E_v$ )

Si  $e(t) = E_0 t u(t) \xrightarrow{L} E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$E_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{p(1 + FTBO(p))}$$



NB :

Si  $\alpha = 0 \Rightarrow E_v \rightarrow +\infty$

Si  $\alpha = 1 \Rightarrow E_v = \frac{E_0}{k}$

Si  $\alpha > 1 \Rightarrow E_v = 0$ .