

* Electrostatique :

$$Q = \iiint \rho \, dV \quad (\rho, Q) \xrightarrow[\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} : \text{Théorème de Gauss}]{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} : \text{M-G}} \vec{E}$$

2 psp : $\vec{E} \in U$
1 psp : $\vec{E} \perp$

Éq de Poisson : $\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}$

(si $\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$: Éq de Laplace)

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$\text{rot } \vec{E} = 0$: M-F : La circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé est nulle.
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (f. intégral)

* Relation de Passage : $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (disc sur les composantes normales)

* Magnétostatique :

$$I = \iiint \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (\vec{j}, I) \xrightarrow[\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} : \text{Théorème d'Ampère}]{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} : \text{M-A}} \vec{B}$$

2 psp : $\vec{B} \in U$
1 psp : $\vec{B} \perp$

$\text{div } \vec{B} = 0$: M- ϕ : Le flux magnétique se conserve.
 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ (f. intégral)

* Relation de passage : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ (disc sur les composantes tangentes)

- Énergie électrostatique - Énergie magnétique :

* $u_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \text{ (J.m}^{-3}) \rightarrow U_e = \iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$
 ↑ densité volumique d'énergie
 * $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ (J.m}^{-3}) \rightarrow U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV$

* Régime variable:

(ARQS) Régime variable:

$$\oint \vec{E}(M,t) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}(M,t)}{\epsilon_0} \quad \text{théorème de Gauss}$$

$$\text{div} \vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \quad \text{M-G}$$

(ρ, Q)

$\vec{E}(M,t)$

* $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
(eq de conservation de charge)

* $\vec{j} = \rho \vec{V}$

$(I, \vec{j})$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (\text{loi d'Ohm local})$$

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad \text{(F)}$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{M-F}$$

$$(\vec{B} \rightsquigarrow \vec{E})$$

$\vec{B}(M,t)$

$$(\vec{E} \rightsquigarrow \vec{B})$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{M-A}$$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I + \iint \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad \text{théorème d'Ampère généralisé (F.I)}$$

$\text{div} \vec{B} = 0$
 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$: flux du champ magnétique conservatif.

$$\vec{E}_0 \xrightarrow{\text{MA}} \vec{B}_1 \xrightarrow{\text{MF}} \vec{E}_1 \xrightarrow{\text{MA}} \vec{B}_2 \dots$$

$$\vec{B}_0 \xrightarrow{\text{MF}} \vec{E}_1 \xrightarrow{\text{MA}} \vec{B}_1 \xrightarrow{\text{MF}} \vec{E}_2 \dots$$

* Bilan d'énergie sous forme intégral:

$$\iiint \frac{\partial U_{em}}{\partial t} d\tau + \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau + \iint \vec{R} \cdot d\vec{s} = 0$$

variation temporelle
de l'énergie U_{em} contenue
dans (V)

puissance cédée par
le champ EM aux
porteurs de charge dans (V)

puissance rayonnée
à travers (S)

* Bilan d'énergie sous forme local (eq de Poynting)

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{E}}_{\text{réaction}} + \underbrace{\text{div} \vec{R}}_{\text{échange}} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{vecteur de Poynting}$$

$$U_{em} = U_e + U_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

vide

$$k = \frac{\omega}{c}; \rho = 0; \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0; TE$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0; TB$$

$$R. de structure: \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

$$B = \frac{E}{c}$$

conducteur

metal

- charge libre: electron

$$\rho = -ne$$

$$\vec{j} = -ne \vec{v}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\text{not } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_e = -e\vec{E} \\ \vec{f} = -\frac{m}{e} \vec{v} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} RFD: \\ \vec{F}_m \ll \vec{F}_e \end{array} \right.$$

plasma (gaz ionisé neutre dilué $\beta \ll 1$)

- charge libre:

• electrons: $-e, m$

• ions: $+e, M$

$$\rho = \rho^{(+)} + \rho^{(-)}$$

$$= n(e) + n(-e)$$

$$\rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

$$\vec{j} = ne \vec{V}_i + (-ne) \vec{V}_e$$

$$\approx -ne \vec{V}_e \quad (m_e \ll M_i) \text{ approximation}$$

$$\text{vide: } \vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (k = \frac{\omega}{c})$$

metal

$$(\delta_d \ll \delta) \rightarrow k^* = \pm \frac{1 \pm i}{\delta} \quad (\delta \text{ épaisseur de peau})$$

$$\rightarrow k = k_1 + i k_2$$

(Re(k)) (Im(k))

$\Downarrow$

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{-k_2 z} e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{e}_x$$

- cas d'un metal parfait

$\delta \rightarrow \infty \quad \vec{E}_t \text{ et } \vec{B}_t \text{ sont nuls.}$

$$\rho = 0$$

$$\vec{j} = 0$$

plasma

$$(\delta_d \approx \delta) \rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

$$* \frac{\omega > \omega_p}{k^2 > 0}$$

$$k^2 > 0$$

k réel

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

c'est une OPM

$$* \frac{\omega < \omega_p}{k^2 < 0}$$

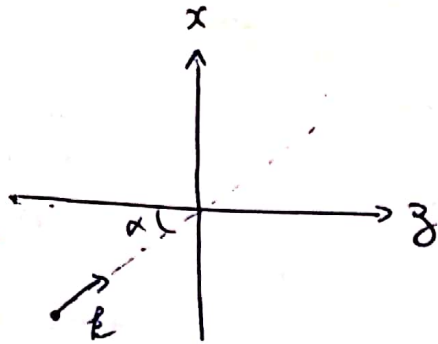
$$k^2 < 0$$

k imaginaire pure

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{-kz} e^{i\omega t}$$

c'est une onde évanescente.

Rappel: Onde



eq conservation de la charge

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$M_G: \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

en pratique:

$$\vec{j} = |\psi|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m} \cdot \vec{u}$$

$$\rho = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_z)$$

comment $M_G \vec{E}$
nul dans cond.
parfait.

$$\rho v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \delta E^2$$

si $E \neq 0$

$\rho v \rightarrow \infty$ impossible

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

$$\vec{B} ? \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = c \vec{k} \vec{E} = 0$$

$$\vec{j} = n(-e) \vec{v}$$

si $\vec{j} = \delta \vec{E}$: $\vec{E}$ et $\vec{j}$ en opposition de phase.
(-i) = $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$\langle P_v \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E})$$

pas d'atténuation (milieu diélectrique).
pas de frottement.

$$\langle R \rangle = \langle \vec{u} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\frac{\vec{E} \cdot \vec{B}^*}{\mu_0})$$

cte dans les OPM

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$$

onde incidente

$$\vec{k}_t$$

onde transmise

onde réfléchi
(-k)

$\left\{ \begin{array}{l} \text{A.T} \\ \text{R.T} \end{array} \right.$

progressive avec atténuation: (cas du métal)

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$$

$$\text{avec } k_t = \frac{1 \pm i}{\delta} = k_1 \pm i k_2$$

progressive sans atténuation: (cas du plasma $\omega > \omega_p$): $E = E_0 e^{i(\omega t - k z)}$

$$\text{avec } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

non progressive: (cas du plasma $\omega < \omega_p$)

$$\omega < \omega_p: E = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i \omega t}$$

0: (conducteur parfait):

$$\vec{E}_t = \vec{0} \quad (\text{l'onde subit une réflexion totale})$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

$$E_{ot} = t \cdot E_0$$

cas de l'OPPM: $\psi = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$

$\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}$

M-A: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

⊙ métal réel

* Métal bon conducteur:

$j_c \gg j_d \Rightarrow \delta \vec{E} \gg \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

* métal mauvais conducteur

$j_c \ll j_d$

⊙ Plasma

j_c et j_d de m^e ordre de grandeur

⊙ vide: $\vec{j} = 0$

⊙ métal à l'ARQS

$j_c \gg j_d$: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

• relation de dispersion

⊙ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ (vide)

⊙ $k^2 = -i\mu_0 \gamma \omega$ (métal avec $j \gg j_d$)

⊙ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \gamma \omega$ (plasma ou métal)

→ onde plane: se propage selon une direction

et tq le champ est uniforme en tout pt $\perp$ à cette direction à t donné

vitesse de phase: $V_p = \frac{\omega}{\text{Re}(k)}$

vitesse de groupe $V_g = \frac{d\omega}{d \text{Re}(k)}$

• $V_p = f(\omega)$: milieu dispersif: ~~non linéaire~~

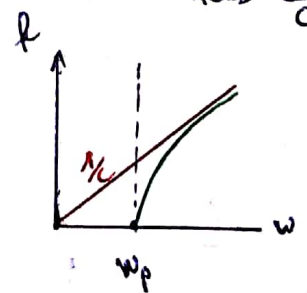
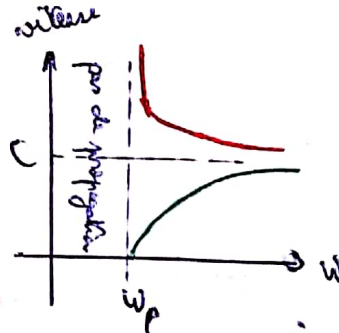
• $k(\omega)$ est linéaire: milieu non dispersif.

• $V_p \cdot V_g = c^2$: le milieu est transparent

⊙ Allure de V_p et V_g et k en f^{ct} de ω (ω) ω_p

$\omega = \omega_p \begin{cases} V_p \rightarrow \infty \\ V_g \rightarrow 0 \\ k = 0 \end{cases}$

$\omega \gg \omega_p \begin{cases} V_p \rightarrow c \\ V_g \rightarrow c \\ k \rightarrow \frac{\omega}{c} \end{cases}$



δ : épaisseur de peau: il caractérise l'atténuation de l'amplitude de l'onde dans le métal

relation de structure: $\vec{B} = \frac{\hbar}{\omega} \nabla \times \vec{E}$ pour l'OPPM

vecteur de Poynting: $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ notation réel

$$\Delta \vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \\ \Delta A_y = \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dots \right) \\ \Delta A_z = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dots \right) \end{pmatrix}$$

densité d'énergie électromagnétique

$$u_m = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

* Champ $\vec{B}$

- Continuité de la composante normale
- discontinuité de la composante tangentielle

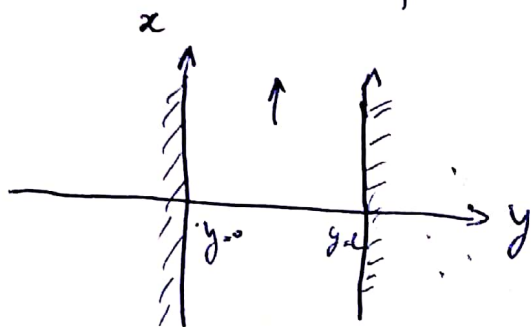
$$R(e^{ix}) = \cos x$$

$$R(ie^{ix}) = -\sin x$$

* Champ $\vec{E}$

- continuité de la composante tangentielle
- discontinuité de la composante normale

polarisation : trajectoire décrite par l'extrémité du champ $\vec{E}$ dans un plan d'onde



$$E(y=0) = 0 \text{ et } E(y=L) = 0$$

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1 : \text{ellipse}$$

$$X^2 + Y^2 = 1 : \text{cercle}$$

$$\Psi(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

* si f et g 2 sinusoïdes

→ onde stationnaire

$$\begin{cases} f = e^{\alpha x} \\ g = e^{i\omega t} \end{cases}$$

→ onde évanescente

$$\begin{cases} f = e^{ikx} \\ g = e^{i\omega t} \end{cases}$$

→ onde progressive

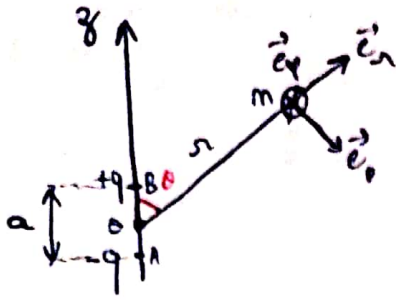
$$\vec{S} = \vec{E} \wedge \frac{d\vec{E}}{dt} : \text{vecteur de rotation}$$

* $\vec{S} \cdot \vec{k} < 0$: rotation à droite

* $\vec{S} \cdot \vec{k} > 0$: rotation à gauche

*

* cas Statique



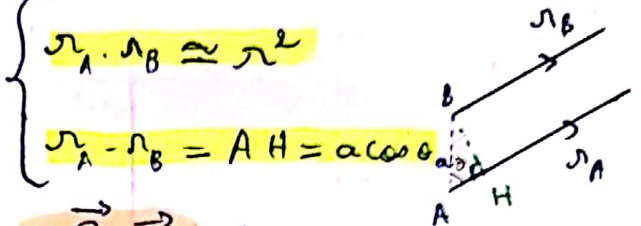
$r \gg a$: approximation dipolaire

$\vec{p} = q \cdot \vec{AB}$: moment dipolaire

$$\vec{p} = q a \vec{e}_z$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B r_A} \right) \text{ or } \begin{cases} r_A \cdot r_B \approx r^2 \\ r_A - r_B = AH = a \cos \theta \end{cases}$$



$$\text{d'où } V(M) = \frac{q a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{car } \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos \theta)$$

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

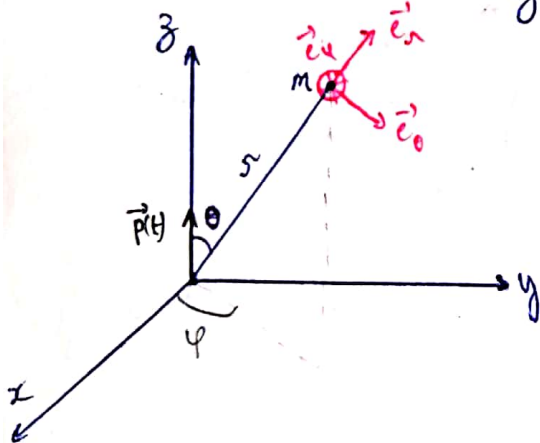
donnée

⊕ Cas Variable : il s'agit d'une charge fixe et une charge mobile

$$\vec{p} = q \vec{OP} = q a \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} V \ll c \\ v \cdot T \ll c \cdot T \\ a \ll \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{approximation non relativiste}$$



$$\vec{E} = \text{donnée}$$

$$\vec{B} =$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

La structure d'un OPPM

$$\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{c} \Rightarrow \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u}$$

$r \ll \lambda$: zone proche : (ARQS) on néglige la propagation

$r \approx \lambda$: zone intermédiaire

$r \gg \lambda$: zone de rayonnement, on tient compte de propagation

I / Force de Laplace

* Une particule de charge q , animée d'un mouvement de vitesse $\vec{v}$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$, subit la force de Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

* Un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique subit l'action de la force de Laplace

$$d\vec{F}_L = d\vec{C} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } d\vec{C} = \begin{cases} I d\vec{\ell} : \text{dis linéaire} \\ \vec{j} ds : \text{dis surf} \\ \vec{j} d\tau : \text{dis volume} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} d\vec{\ell} \\ \text{I} \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{c} \otimes \\ \vec{B}_{\text{ext}} \end{array} \right) \Rightarrow \vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$(\text{I}, \vec{B}) \Rightarrow \text{force de Laplace}$

* Circuit dans un champ magnétique uniforme.

a) Résultante des forces de Laplace

$$\vec{F}_L = \int_{(C)} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0$$

- cas particulier: circuit fermé:

$$\vec{F}_L = \oint_{(C)} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left(\oint_{(C)} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{pas de mouvement de translation}$$

b) Moment des forces de Laplace.

$$d\vec{F}_L : d\vec{M}_0 = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{F}_L = \int_C \vec{OM} \wedge (I d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

c) Cas d'un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique uniforme

$$\vec{m} = I \int_{\text{dip}} \vec{S}_{\text{dip}}$$

$\Rightarrow$ le moment des forces de Laplace est défini par: $\vec{M}_0 = \vec{m} \wedge \vec{B}$

(exemple: cas d'une spire)

d) Puissance des forces de Laplace - Energie potentielle:

$$\mathcal{P}_L = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{cas d'une translation}} + \underbrace{\vec{M}_0 \cdot \vec{\omega}}_{\text{cas d'une rotation}}$$

* L'énergie potentielle d'interaction est

$$\vec{F}_L = - \text{grad } E_p \quad \text{avec } E_p = - \underbrace{\vec{m} \cdot \vec{B}}_{\text{dans le cas du dipôle}}$$

* L'état d'équilibre d'un dipôle est obtenu lorsque E_p est minimal c.à.d $\vec{m} \cdot \vec{B}$ est maximal ($\vec{m} \wedge \vec{B} = 0$)

$$E_p = - \vec{m} \cdot \vec{B} = -mB \cos \theta$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mB \sin \theta = 0 \quad \begin{cases} \theta = 0 : \vec{m} \text{ et } \vec{B} \text{ dans le même sens (état stable)} \\ \theta = \pi : \vec{m} \text{ et } \vec{B} \text{ sont opposés (état d'éq instable)} \end{cases}$$

II / Induction électromagnétique

* L'expérience montre que lorsque le flux magnétique à travers d'un circuit (C) varie au cours du temps, ce dernier est le siège d'un phénomène d'induction.

cette variation se fait: soit par variation magnétique $\vec{B}(t)$ traversant (C) soit par variation de la surface de la circuit $S(t)$ ou de l'angle entre $\theta(t) \equiv (\vec{B}, \vec{s})$

$\Rightarrow$ ce phénomène d'induction EM se traduit par l'apparition d'un courant induit, indiquant l'existence d'une fem induite

• Loi de Lenz: le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre qu'il crée tend à s'opposer à la cause (variation du flux) qui lui a donné naissance.

• Loi de Faraday

$$e = - \frac{d\phi}{dt} \text{ avec } \phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

(fem) (weber)

• Inductance propre L: coeff purement géométrique, positif

se déduit à partir du flux prop

$$\phi_{\text{propre}} = \phi = L I$$

* Lorsque I varie au cours du temps le flux ϕ de $\vec{B}$; crée par le circuit à travers lui-même; appelé flux propre varie.

d'après Faraday: il apparaît à chaque instant dans (C) une fem d'auto induction: $e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

• Inductance mutuelle M: c'est un coeff géo dont le signe dépend du sens du courant dans les deux circuits.

Il se déduit à partir des flux mutuels: ϕ_{12} et ϕ_{21}

$$\phi_{12} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = M I_1$$

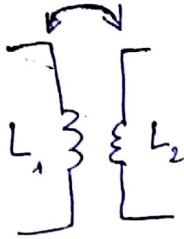
Le flux du champ $\vec{B}_1$ créé par (C₁) à travers (C₂)

$$\phi_{21} = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = M I_2$$

Le flux du champ $\vec{B}_2$ créé par (C₂) à travers (C₁)

$\Rightarrow$ Le flux total ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \iint \vec{B}_{\text{tot}} \cdot d\vec{S}_1 = \iint (\vec{B}_{\text{propre}} + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S}_1 \\ &= \phi_{\text{propre}} + \phi_{21} = L_1 I_1 + M I_2 \end{aligned}$$

$$\phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$
$$\begin{cases} e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$


circuit induit $\equiv$ 

On utilise la RFD: $\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

on utilise le TMC: $\sum \vec{M}_G(F) = \gamma \cdot \frac{dw}{dt}$

$$(E_G) \cdot i + (E_M)_{\text{tran}} \times v + (E_M)_{\text{net}} \times w = 0$$
$$P_{\text{place}} + 2i = 0.$$
$$\phi_{\text{tot}} = \phi_{\text{propag}} + \phi_{\text{mukiel}}$$
$$\Rightarrow e = -\frac{P_L}{c}$$

* Mode de transfert thermique :

⊗ Rayonnement : à distance et sans transfert de matière.

⊗ Convection : implique un déplacement macroscopique de matière.
(transfert de matière)

⊗ Conduction : à contact et sans transport de matière.

A] Conduction thermique :

Def : Le flux thermique

$$\phi_{th} = \frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} \quad (W)$$

$$= \iint \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S}$$

⊗ Le courant volumique : $\vec{J}_{th}$

$$\vec{J}_{th} = -K \vec{\text{grad}} T : \underline{\text{Loi de Fourier.}}$$

⊗ Le signe (-) traduit l'orientation des courants vers les basses températures.

⊗ K : conductivité thermique en W/mK

⊗ Bilan d'énergie :

On travaille dans le domaine mésoscopique car à l'échelle micro on ne peut pas définir les grandeurs thermo et à l'échelle macro on ne peut pas suivre la variation du T de façon continue

$$\begin{aligned} dU &= \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt = c_v \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot dZ \\ &= dU^{ech} + dU^{cré} \\ &= dU^{ent} - dU^{sort} + dU^{cré} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_{vol}}{\partial t} + \text{div} \vec{J}_{th} = \underbrace{\sigma_u}_{\text{Terme de production}} \quad W \cdot m^{-3}$$

Rq :

- Si σ_u en $W \cdot kg^{-1}$ on multiplie par ρ
- $dU = U(t+dt) - U(t) = \frac{\partial U}{\partial t} \cdot dt$
- $dU = c_v \cdot dT = \rho c_m \cdot dT$

⊗ Equation de la chaleur

On injecte la loi de Fourier dans l'équation du bilan.

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{\sigma_u}{c_v}$$

$$\text{avec } a = \frac{K}{c_v} = \frac{K}{\rho c_m} \quad \text{en } m^2 \cdot s^{-1} :$$

le coefficient de diffusion thermique

* En régime stationnaire et sans production :

$$\Delta T = 0$$

* En régime stationnaire avec création :

$$\Delta T = - \frac{\sigma_u}{K}$$

* En régime variable sans production :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{c_v} \Delta T$$

Résolution:

1 condition initiale (Régime variable)

2 condition aux limites:

$$\begin{cases} 2 \text{ conditions sur } T \\ 1 \text{ condition sur } T \text{ et } 1 \text{ sur } \vec{J}_{th} \text{ ou } \phi_{th} \end{cases}$$

* cas de contact solide fluide:

$\vec{J}_{cac} = h (T_{surf} - T_0) \vec{n}$: Loi de Newton
conduct. conductive

*) Résistance thermique:



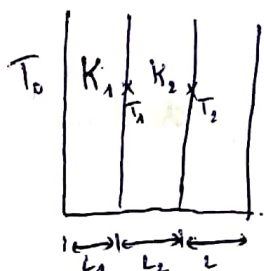
en régime stationnaire

$$\begin{aligned} \phi_{th} &= c k e = \frac{K S}{L} (T_{int} - T_{ext}) \\ &= \frac{\Delta T}{R_{th}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

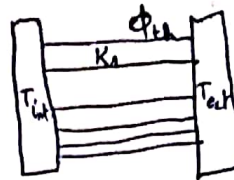
⊗ Association des résistances:

*) En série:



$$\Rightarrow R_{th,eq} = \sum_{i=1}^n R_{th,i}$$

*) En Parallèle



$$\Rightarrow R_{th,eq} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{th,i}}$$

électrique	thermique
q	Q ou U
i	ϕ_{th}
$\vec{J}_e = -\sigma \vec{\text{grad}} V$	$\vec{J}_{th} = -K \vec{\text{grad}} T$
V	T
γ	K
$R_e = \frac{\Delta V}{I}$	$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi_{th}}$

B] Le rayonnement thermique:

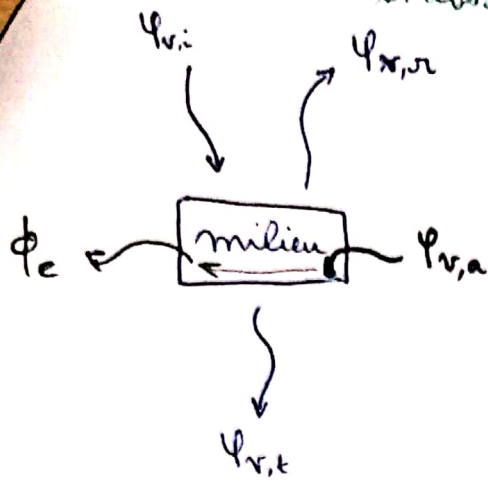
$\varphi = \frac{d\phi}{dS}$ en $(W \cdot m^{-2})$: le flux surfacique

$\varphi_\nu(\nu) = \frac{d\phi}{dS d\nu} = \frac{d\varphi}{d\nu}$ en $(W \cdot m^{-2} \cdot c)$, fréquence

le flux spectral surfacique c'est la puissance énergétique par unité de surface et par unité de fréquence de même pour la longueur d'onde:

$\varphi_\lambda(\lambda) = \frac{d\phi}{dS d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}$ en $(W \cdot m^{-2} \cdot m^{-1})$
 $\Rightarrow \varphi_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \varphi_\nu$

flexion, transmission et absorption



Coefficient de réflexion: $R(\nu) = \frac{\varphi_{v,r}}{\varphi_{v,i}}$

Coefficient de transmission: $T(\nu) = \frac{\varphi_{v,t}}{\varphi_{v,i}}$

Coefficient d'absorption: $A(\nu) = \frac{\varphi_{v,a}}{\varphi_{v,i}}$

Conservation d'énergie:

$$\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r + \varphi_t \quad (\Rightarrow)$$

$$1 = A + R + T \quad (\Rightarrow)$$

$$\phi_i = \phi_a + \phi_r + \phi_t$$

* Milieu transparent: $T(\nu) = 1 \Rightarrow A(\nu) = R(\nu) = 0$

* Milieu opaque: $T(\nu) = 0$.

• Lorsque le corps absorbe un flux ϕ_a il émet un rayonnement dont le flux est noté ϕ_e : flux émis.

• Flux radiatif

• Le flux partant: $\phi_p = \phi_r + \phi_t + \phi_e$

• Le flux radiatif: $\phi_r = \phi_p - \phi_i$

$$\Rightarrow \phi_r = \phi_e - \phi_a$$

L'équilibre radiatif: $\phi_r = 0$

$$\Rightarrow \phi_e = \phi_a$$

• Rayonnement d'un corps noir

un corps noir est un corps absorbant intégralement tout rayonnement incident quelque soit sa direction et sa fréquence

* Propriétés: $\phi_r = \phi_t = 0 \Rightarrow R(\nu) = T(\nu) = 0$

$$\phi_i = \phi_a \text{ et } A(\nu) = 1$$

• Loi de déplacement de Wien

$$\lambda_{\text{max}} T = c_2 \approx 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

• Loi de Stefan:

$$\varphi_{\text{emis}} = M = \sigma T^4$$

I / Signaux périodiques, filtrage

I / Propriétés des signaux sinusoïdaux

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

X_m : amplitude

ω : pulsation / $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
← fréquence
← période

φ : phase à l'origine des temps

$\omega t + \varphi$: phase instantanée

Un signal est dit périodique lorsqu'il est caractérisé par une période T tq $f(t+T) = f(t)$

• Écriture complexe:

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = X_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$= \underline{X}_m e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X}_m = X_m e^{j\varphi} : \text{amplitude complexe}$$

$$\Rightarrow x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$$

• L'utilité de la notation complexe:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$$

$$\int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{j\omega} \underline{x}(t)$$

II / Propriétés des signaux périodiques

* Un signal est dit périodique lorsqu'il est caractérisé par une période T tq $f(t+T) = f(t)$

1) Décomposition en signaux harmoniques

Tout signal de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

de forme qq peut se décomposer de manière unique sous la forme

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

(Théorème de Fourier)

• Le premier terme X_0 correspond à la valeur moyenne du signal

$$\langle x(t) \rangle = X_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt$$

• Valeur efficace:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt}$$

• Le 2^{ème} terme du Théorème constitue:

* pour $n=1$: c'est l'harmonique fondamentale (même fréquence que le signal $x(t)$)

* pour $n > 2$: c'est l'harmonique d'ordre n

• L'autre écriture du Théorème de Fourier

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

démo :

$$X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = X_n \cos(n\omega_0 t) \cos(\varphi_n)$$

$$- X_n \sin(\varphi_n) \sin(n\omega_0 t)$$

$$= A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$\text{on } \begin{cases} A_n = X_n \cos \varphi_n \\ B_n = -X_n \sin \varphi_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow X_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \checkmark$$

$$\tan(\varphi_n) = -\frac{B_n}{A_n}$$

→ si le signal est alternatif : $A_0 = 0$ et $\begin{cases} \text{harmoniques} \\ \text{impair} \end{cases}$

→ si le signal est pair : $B_n = 0$

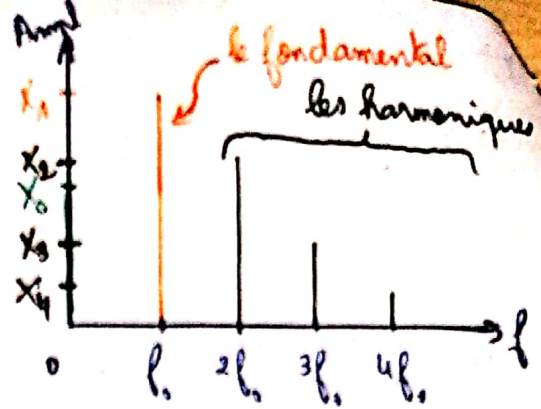
→ si le signal est impair : $A_n = 0$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

2) Spectre d'un signal

Le spectre est un graphique qui donne l'amplitude des harmoniques en fonction de la fréquence.



valeur moyenne

→ fondamental : fixe la fréquence

→ harmoniques : donnent l'allure

→ haute fréquences : variation brusque

III / Action d'un filtre sur un signal périodique

1) Généralité sur les filtres



* Un filtre est un quadripôle linéaire qui permet de sélectionner certaines fréquences.

* la sortie à la même pulsation de l'entrée

⊙ Le rôle du filtre est alors pondération d'amplitude et déphasage

⊙ La fonction de transfert : $H(j\omega) = \frac{V_s(t)}{U_e(t)}$

⊙ Le gain du filtre : $G(\omega) = |H(j\omega)|$

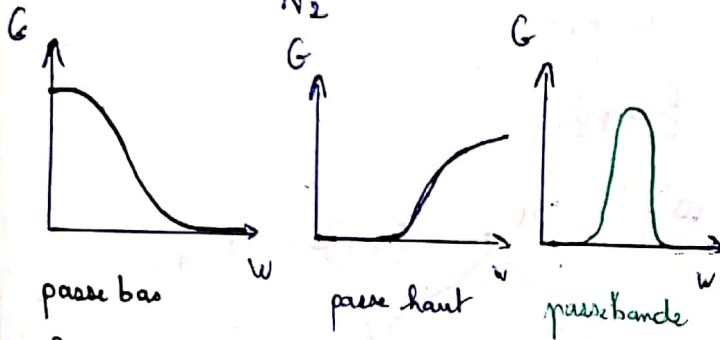
déphasage: $\theta = \arg(H(j\omega))$

G_{dB} : le gain en décibel. $G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$

① Diagramme de Bode: consiste à représenter G_{dB} et θ en fonction de $\log \omega$

② La pulsation de coupure: $\omega_c \approx -3 \text{ dB}$

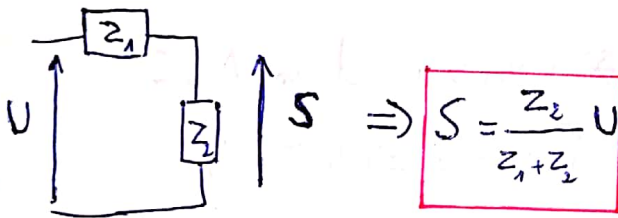
tg $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$



Rappel:

$Z_R = R$; $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$; $Z_L = j\omega L$

Diviseur de tension:



* Comportement des composantes:

$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

Asymptotic behavior for the capacitor impedance Z_C :
 - For $\omega \rightarrow 0$, $Z_C \rightarrow \infty$ (represented by a vertical line).
 - For $\omega \rightarrow \infty$, $Z_C \rightarrow 0$ (represented by a horizontal line).

$Z_L = j\omega L$

Asymptotic behavior for the inductor impedance Z_L :
 - For $\omega \rightarrow 0$, $Z_L \rightarrow 0$ (represented by a horizontal line).
 - For $\omega \rightarrow \infty$, $Z_L \rightarrow \infty$ (represented by a vertical line).

② Effet d'un filtre sur un signal périodique

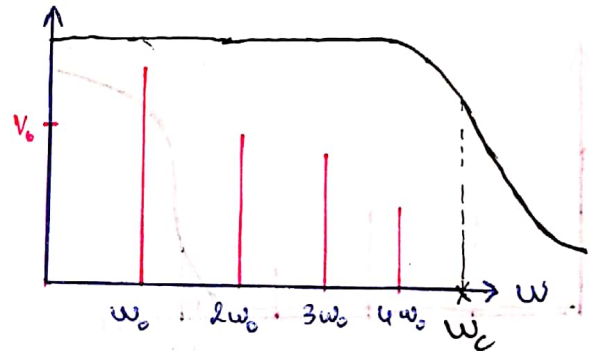
On considère un filtre de fonction de transfert $H(j\omega)$ alimenté par un signal périodique dont la décomposition en série de Fourier fondamentale

$$v_e(t) = V_0 + \underbrace{V_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)}_{\text{composante continue}} + \underbrace{V_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2)}_{\text{continue}} + \dots + V_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Les harmoniques.

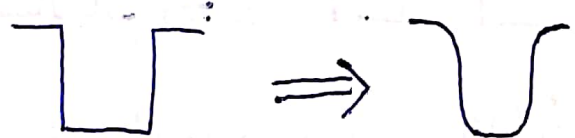
a) Exemple d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c :

1er cas: $\omega_c \gg \omega_0$

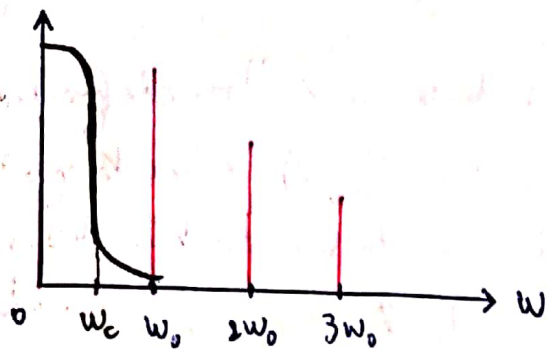


• Seuls les harmoniques d'ordre supérieurs sont coupés et $v_s \approx v_e$

• Les points anguleux et les discontinuités sont atténués (à cause du coupes des les fréquences)



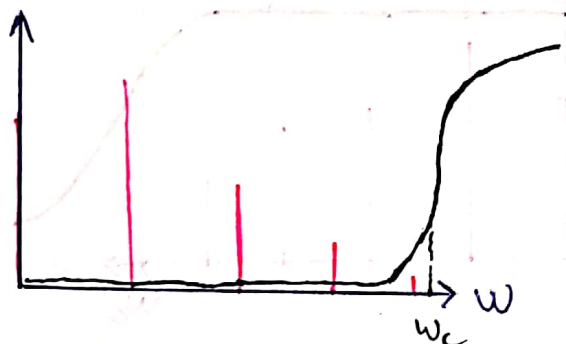
* 2^{ème} cas : $\omega_c \ll \omega_0$



• La composante continue passe et le reste du signal est très atténué
(ce filtre joue le rôle d'un intégrateur)

b) Exemple d'un filtre passe-Haut de pulsation de coupure ω_c

* 1^{er} cas : $\omega_c \gg \omega_0$

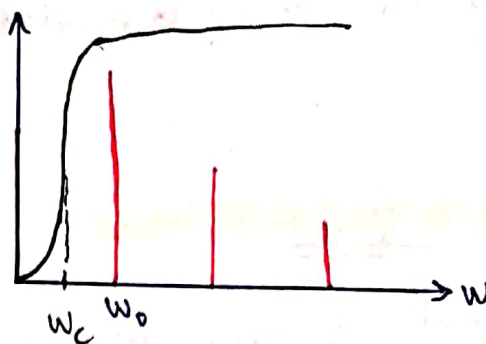


La composante continue est coupée et seule les hautes harmoniques passent (le signal de sortie présente des discontinuités)



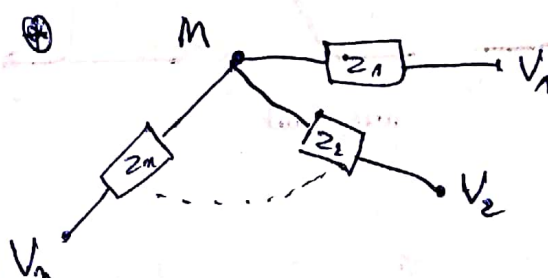
(ce filtre joue le rôle d'un dérivateur)

2^{ème} cas : $\omega_c \ll \omega_0$



Seule la composante continue est coupée

Rappel:



$$U_m \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right) = \frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2} + \dots + \frac{V_n}{Z_n}$$

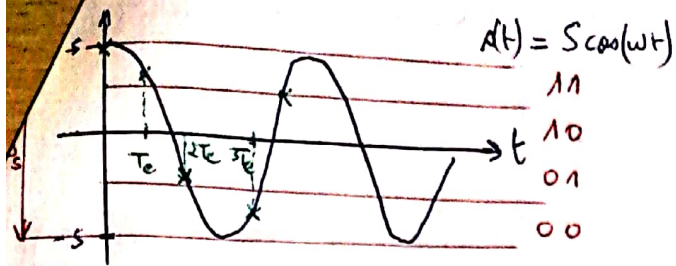
⊗ Propriétés d'un ALI:

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 \Rightarrow V^+ = V^- \\ i^+ = i^- = 0 \end{cases}$$

⊗ l'égalité de Parseval:

$$U_{\text{moy}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = U_{\text{eff}}^2$$

echantillonnage



Signal analogique : (infinité des points)

numération
du signal

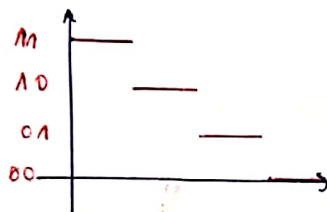
étapes :

i) echantillonnage : T_e ; $N_e = \frac{1}{T_e}$

$\Rightarrow (t_i = k T_e, s(k T_e))$

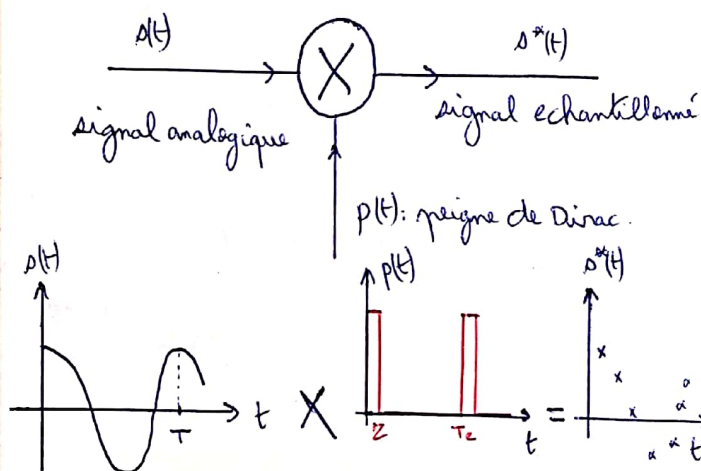
ii) Quantification et codage : q

quantum : $q = \frac{\Delta S}{2^n - 1}$ avec n : nombre de bit du convertisseur



signal numérique

Def : L'echantillonnage consiste à prendre les valeurs du signal à des instants régulièrement espacés : $t_k = k T_e$



$$s(t) = S \cos(2\pi f t)$$

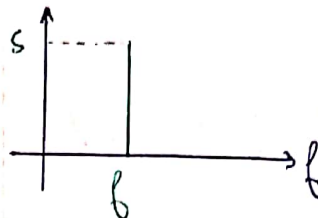
$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2p_0 \cos(2\pi n F_e t)$$

$$s^*(t) = s(t) \cdot p(t)$$

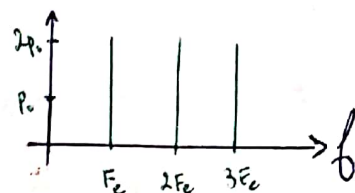
$$= S \cos(2\pi f t) \cdot p_0 + 2p_0 S \sum \cos(2\pi f t) \cdot \cos(2\pi n F_e t)$$

$$= p_0 S \cos(2\pi f t) + p_0 S \left(\sum \cos(2\pi (n F_e - f) t) + \sum \cos(2\pi (n F_e + f) t) \right)$$

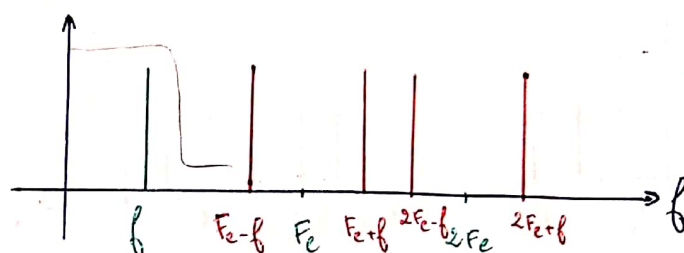
spectre de $s(t)$:



spectre de $p(t)$:



spectre de $s^*(t)$:



$\Rightarrow$ le signal echantillonné comporte :

- * harmonique de fréquence f
- * harmoniques de fréquences : $n F_e - f, n F_e + f$

* pour récupérer le signal analogique on utilise un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c \in [f, F_e - f]$.

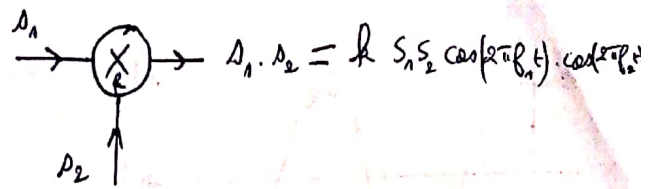
dans ce cas il faut que $F_e - f > f \Leftrightarrow$

$F_e > 2f$: critère de Shannon.

• Si le critère n'est pas respecté on parle de repliement du spectre

* Cas d'un signal sinusoïdale:

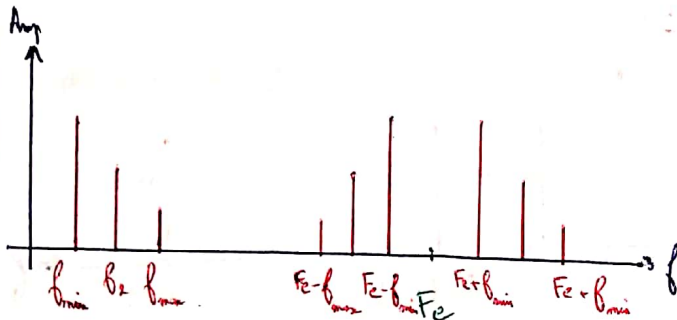
Le spectre du signal échantillonné contient les harmoniques suivants:



- Les harmoniques du système à échantillonner: $s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{2} k s_1 s_2 (\cos 2\pi(f_1 - f_2)t + \cos 2\pi(f_1 + f_2)t)$

$$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$$

- Les harmoniques: $n F_e - f, n F_e + f$
avec $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$.



• Pour récupérer le signal $s(t)$ on utilise un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c \in [f_{\max}, F_e - f_{\max}]$

• Critère de Shannon:

$$F_e - f_{\max} > f_{\max} \Rightarrow F_e > 2 f_{\max}$$

* Modélisation d'un système

$$s_1(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t); T_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$s_2(t) = S_2 \cos(2\pi f_2 t); T_2 = \frac{1}{f_2}$$

Si $T_1 \gg T_2$: $s_2(t)$ est modulé par $s_1(t)$

Signaux

$$\frac{d(x(t))}{dt} = j\omega x(t) \quad \left| \int x(t) = \frac{1}{j\omega} x(t) \right|$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

⑧ Théorème de Fourier

$$① x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

X_0 : valeur moyenne:

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt$$

X_{eff} : valeur efficace

$$X_{eff} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt}$$

$n=1$: harmonique fondamentale (même fréquence que $x(t)$)

$$② x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$A_n = X_m \cos \varphi_n$$

$$X_m = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

avec

$$B_n = -X_m \sin \varphi_n$$

$$\tan(\varphi_n) = -\frac{B_n}{A_n}$$

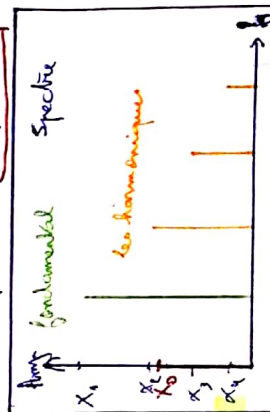
Signal pair: $B_n = 0$

$t \in [t, t+T]$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Signal impair: $A_n = 0$



* Les filtres: est un quadripôle linéaire qui permet de sélectionner certaines fréquences.

$$H(j\omega) = \frac{V_c(t)}{V_e(t)}$$

fonction de transfert

$$G(\omega) = |H(j\omega)|$$

gain

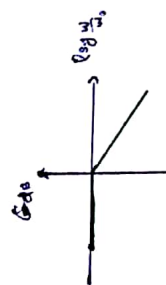
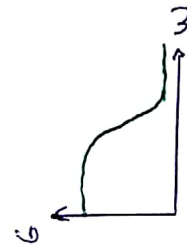
$$G(\omega) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

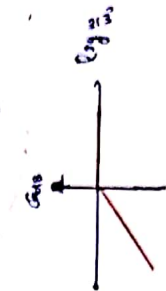
déphasage

$$G_{dB} = 20 \log(G(\omega))$$

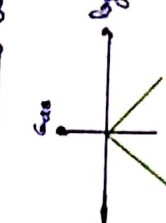
$G_{dB} \Rightarrow$ diagramme de Bode.



passer bas



passer haut



passer bande

* Échantillonnage: prendre des valeurs du signal à des instants régulièrement espacés $[s(t) \times p(t) = s^*(t)]$

analogique $\rightarrow$ numérique

pour récupérer le signal analogique on utilise filtre passe bas

tg $f_c \in [f_1, f_2 - f] \Rightarrow$ critère de Shannon: $f_c > 2f$

critère pour respecter: [supplément du spectre]

Légende: Notions de bases

I / Emission - réception de la lumière

① Emission

Lumière est constituée des petits "grains" d'énergie appelés photons

$$\begin{array}{c} E_2 \\ \uparrow \\ E_1 \end{array}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h \nu$$

ν : fréquence

h : cte de Planck égal à $6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

vert de mercure: $\lambda = 546 \text{ nm}$

$$\nu \approx 5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

jaune de sodium: $\lambda = 589 \text{ nm}$

$$\nu \approx 5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Rouge (laser): $\lambda = 632 \text{ nm}$

$$\nu \approx 4,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

⊗ Chaque source de lumière est caractérisée par :

son spectre $\left\{ \begin{array}{l} \text{continue: s'étale sur une} \\ \text{bande de fréquence } \rightarrow \text{polychromatique} \\ \text{discrète: contient un nombre} \\ \text{limité des raies } \rightarrow \text{monochromatique} \end{array} \right.$

sa taille $\left\{ \begin{array}{l} \text{ponctuelle} \\ \text{étendue} \end{array} \right.$

⊗ L'émission de la lumière se fait de façon discontinue dans le temps

[1]

par des trains d'ondes de durée finie
 Δt durée de cohérence de la source
 $\Delta \nu$

$$\Delta \nu \cdot \Delta t \sim 1$$

lumière mono $\Delta \nu \rightarrow 0$ alors $\Delta t \rightarrow \infty$

$$L_c = c \cdot \Delta t = \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\Delta \nu}$$

avec $\nu = \frac{1}{\lambda}$ en m^{-1} : le nombre d'onde

$$\Delta \nu = \Delta \left(\frac{c}{\lambda} \right) = c \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2}$$

② Réception

Les récepteurs sont caractérisés par leurs temps de réponse $T_{\text{détect}}$ qui est le temps minimum qui doit séparer deux signaux pour qu'ils soient perçus individuellement.

œil: 0,1 s, photodiode: 10 ns.

II / Modèle scalaire de la lumière - Intensité

On peut traiter la lumière comme une scalaire tant que les milieux traversés sont isotropes et on utilise

* Modèle scalaire: on décrit le champ électrique au point M par une vibration lumineuse d'amplitude $s(M, t)$.

* L'intensité lumineuse :

$$I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle$$

avec $s(t) = s_0 \cos(\omega t)$: vibration

Onde

$$(\vec{E}, \vec{B})$$

$$\langle \vec{R} \rangle$$

Optique

$s(M, t)$: ampli de vibration

I au E : $\langle s^2(M, t) \rangle$

III/ Chemin optique - déphasage

$$L = (A, B) = \int_A^B n(M) ds$$

chemin optique

dans un milieu isotrope :

$$(AB) = n \cdot AB.$$

$$\varphi_p = \frac{\omega \delta}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

avec δ : différence de marche des chemins optique

* Dans le cas de réflexion

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \pi \quad (\Rightarrow)$$

$$\delta = \delta_{\text{géo}} + \delta' \quad \text{tg } \delta' = \frac{\lambda}{2}.$$

IV/ Théorème de Malus

Les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'ondes.

* pour obtenir une onde plane à partir d'une source ponctuelle ; Il suffit de placer cette dernière dans le plan focal objet d'une lentille convergente

Leçon 2 : Généralités sur les interférences

On parle d'interférences de deux ondes quand : $I(M) \neq I_1 + I_2$

I/ Superposition de 2 ondes

$$I(M) = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos(-)}_{\text{Terme d'interférences}}$$

⊗ Le terme d'interférence est non nul si

- $\omega_1 = \omega_2$: 2 sources isochrones (synchrones)
- $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$: 2 sources cohérentes
- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$: condition de polarisation.

$$\Rightarrow I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)\right)$$

$$\Rightarrow I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi(M))$$

c'est la formule de Fresnel

$$\text{Le contraste : } C = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

pour avoir $C_{\text{max}} = 1$; on prend $I_1 = I_2 = I_0$

$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 (1 + \cos \varphi(M))$$

II/ Figure d'interférences

⊗ frange d'interférences : $\varphi(M) = 2k\pi$ et $\delta(M) = 0$

⊗ Cas particuliers

• Si $\varphi(M) = 2k\pi$ ($\cos(\varphi(M)) = 1$) $\Rightarrow I = I_{\text{max}}$
frange brillante : interférences constructives

• Si $\varphi(M) = 2k\pi + \pi \text{ (car } \cos(\varphi(M)) = -1) \Rightarrow I = I_{\min}$

frange sombre : interférence destructive.

⊗ interfrange : distance entre deux franges consécutives de même nature.

$$i = \Delta B_k / B_{k+1} = \Delta S_k / S_{k+1}$$

⊗ Forme de frange :

L'équation des franges d'interférences est donnée par $(S_2 M) - (S_1 M) = cte$

• Si $S_1, S_2 \perp \text{écran} \Rightarrow$ des anneaux

• Si $S_1, S_2 \parallel \text{écran} \Rightarrow$ franges rectilignes.

III/ Ordre d'interférences :

$$p(M) = \frac{\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda}$$

• Si $p(M) = k \Rightarrow$ interférences constructives

• Si $p(M) = k + \frac{1}{2} \Rightarrow$ interférences destructives.

III/ Dispositifs interférentiels :

Emission lumineuse :

2 sources indépendantes (aléatoires entre eux)

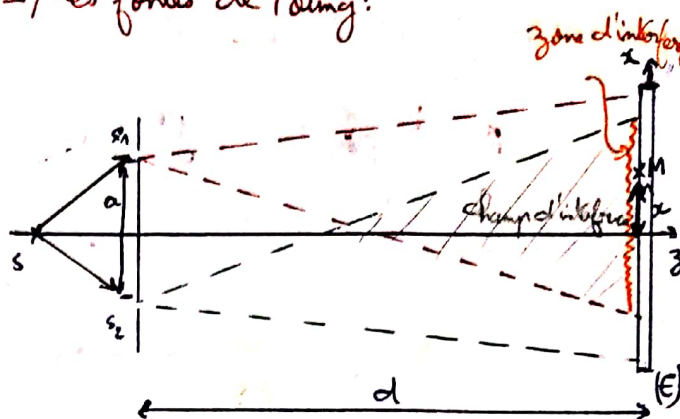
ne sont pas cohérentes.

$$\delta(M) = \frac{S_1 S_2 x_M}{D_{(S_1 S_2) \rightarrow (E)}}$$

$S_1, S_2 \parallel (E)$

Leçon 3: Etude des dispositifs interférentiels à division de front d'onde

I/ Les fontes de Young :



* justification du phénomène d'interférence :

La source S monochromatique éclaire les 2 fentes. Elles jouent le rôle de 2 sources isochrones et cohérentes. Donc, on observe un phénomène d'interférence entre 2 ondes issues de (S_1) et (S_2) sur l'écran (E)

• La différence de marche :

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (S_2 S_2) + S_2(M) - (S_1 S_1) - (S_1 M)$$

$$\Rightarrow \delta(M) = (S_2 M) - (S_1 M) = \frac{ax}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(M) = \frac{ax}{d}}$$

• Figure d'interférences :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{d} \right) \right)$$

$I(M) = cte \Rightarrow x = cte$: on obtient des franges rectilignes $\parallel (Oy)$, alternées et équidistantes d'interfrange $i = \frac{\lambda d}{a}$

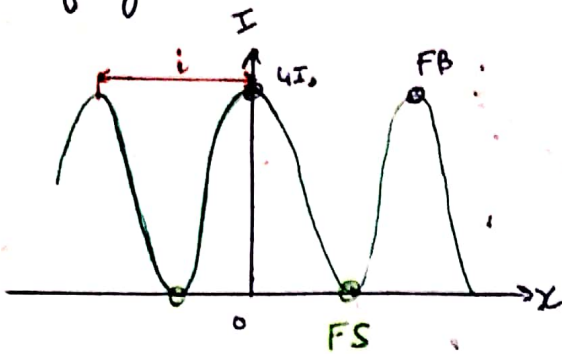
$$\Rightarrow \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{d} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{i} x \right)$$

o) Nature de la frange centrale:

c'est la frange d'ordre $p=0$.

$$p=0 \Rightarrow \delta(m) = 0 \Rightarrow x=0$$

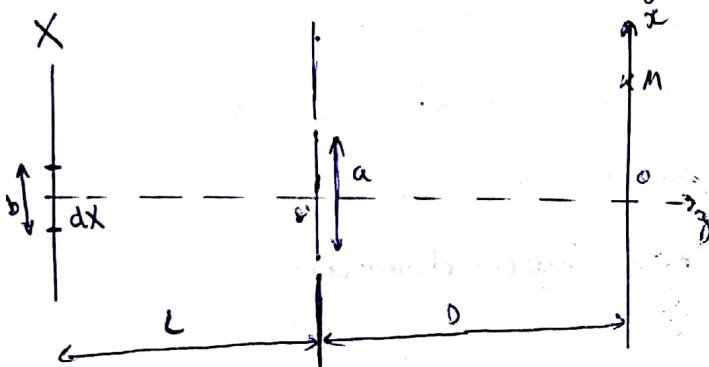
$\Rightarrow$ la frange centrale est brillante.



* des exemples: fentes de young avec une lamme source décalé (p32)

II/ Etendue spatiale de la source - cohérence spatiale

- Dispositif éclairé par une source large.



$$i_0 dx = I_0 \frac{dx}{b}$$

$$dI(m) = 2i_0 dx \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(m)\right) \right]$$

$$\text{or } \delta(m) = \frac{ax}{L} + \frac{ax}{D} \quad x \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

$$\Rightarrow I(m) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dI(m)$$

$$\Rightarrow I(m) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin u}{u} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D}\right) \right]$$

$$\text{avec } u = \frac{\pi ab}{\lambda L}$$

visibilité franges $v = \frac{\lambda D}{a}$

$\frac{\sin u}{u} = \text{sinc}(u)$: joue le rôle de la visibilité V (ou Γ) des franges

$$C = |\text{sinc}(u)|$$

* $b \rightarrow 0$ alors $C \rightarrow 1$

* $b \nearrow$ alors $V \searrow$ et elle s'annule pour $\text{sinc}\left(\frac{\pi ab}{\lambda L}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi ab}{\lambda L}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi ab}{\lambda L} = n\pi; n \in \mathbb{N}^*$$

b_1 : longueur de cohérence spatiale

$$\left(\text{pour } n=1: \boxed{b = \frac{\lambda L}{a}}\right); \delta, b_1$$

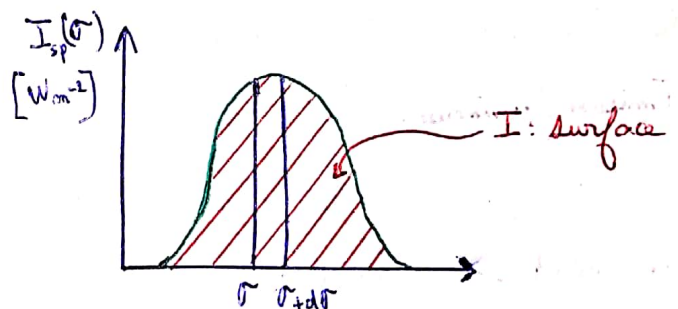
* phénomène de breuvillage c'est pour $V=0$

Leçon 4: Interférences à 2 onde en lumière polychromatique

I/ Approche générale

1) Les sources lumineuses:

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c}: \text{nombre d'onde.}$$



$$\Rightarrow dI = I_{sp}(\sigma) d\sigma$$

$$\Rightarrow I = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} I_{sp}(\sigma) d\sigma$$

2) Figure d'interférences:

$$I_{el}(m) = dI(m) = 2dI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta(m)\right) \right]$$

I_0 : intensité totale de la source.

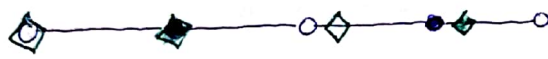
Chaque bande élémentaire est incohérente avec les autres

$$\Rightarrow I(M) = \int dI(M) = \int 2I_{sp} (1 + \cos(2\pi \sigma \delta(M))) d\sigma$$

II/ Première modélisation: Doublet infiniment fin

1) Expression de $I(M)$

L'interfrange i dépend de $\lambda \Rightarrow$ les 2 systèmes sont décalés par une grandeur variable ainsi les 2 figures pourment dans certaines zones se renforcent ou dans d'autres zones se brouillent.



$\diamond: \sigma_1$ $\circ: \sigma_2$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

$$= 2I_0 [1 + \cos(2\pi \sigma_1 \delta(M))] + 2I_0 [1 + \cos(2\pi \sigma_2 \delta(M))]$$

$$= 4I_0 + 2I_0 [\cos(2\pi \sigma_1 \delta(M)) + \cos(2\pi \sigma_2 \delta(M))]$$

$$\Rightarrow I(M) = 4I_0 + 4I_0 \cos(2\pi \delta(M) \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}) \cos(2\pi \delta(M) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})$$

posons: $\sigma_{moy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et $\Delta\sigma = |\sigma_1 - \sigma_2| \ll \sigma_{moy}$

$$I(M) = 4I_0 \underbrace{\left[1 + \cos(\pi \delta(M) \Delta\sigma)\right]}_{\text{visibilité ou contraste}} \underbrace{\cos(2\pi \delta(M) \sigma_{moy})}_{\text{Interférences}}$$

2) Interprétation: $\Rightarrow$ la visibilité joue le rôle de l'enveloppe et l'interférence joue le rôle de sous-enveloppe.

Bq: $\Delta\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow$ source monochromatique

$$C = |\cos(\pi \Delta\sigma \delta)|$$

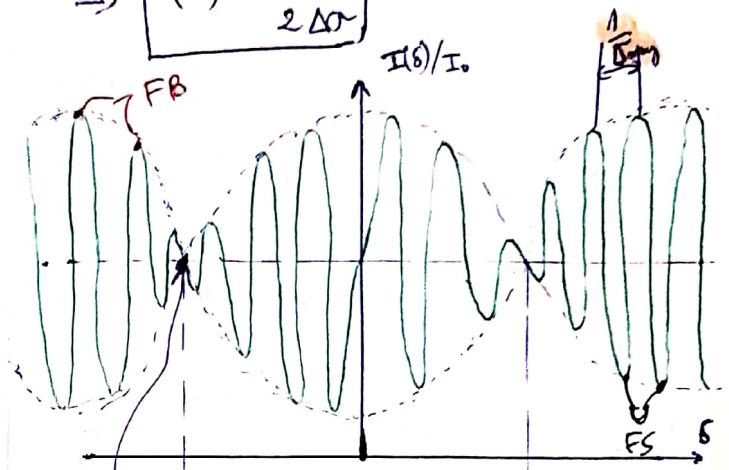
- est maximale pour le cas de coïncidence (les franges brillantes de deux systèmes se superposent et de même pour les sombres)

- est nul pour l'anticoïncidence: brouillage

- s'annule pour la première fois pour

$$\cos(\pi \Delta\sigma \delta(M)) = 0 \Rightarrow \pi \Delta\sigma \delta(M) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \delta(M) = \frac{1}{2\Delta\sigma}$$

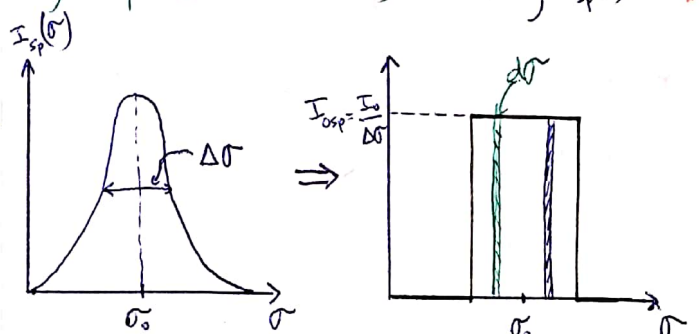


$V=0$ (Brouillage) période: $\Delta = \frac{1}{\Delta\sigma}$ de battent optique

$$N_{FB} = \frac{\frac{1}{\Delta\sigma}}{\frac{1}{\sigma_{moy}}} = \frac{\sigma_{moy}}{\Delta\sigma}$$

III/ Deuxième modélisation: raie rectangulaire:

1) Expression de $I(M)$. $I_0 = \int I_{sp}(\sigma) d\sigma$



on raisonne sur une bande élémentaire $d\sigma$ car chaque bande se comporte comme une source

monochromatique, elle donne sa propre figure d'interférence.

$$\begin{aligned} dI(M) &= 2 I_0 (1 + \cos(2\pi \sigma s)) \\ &= 2 I_0 \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} (1 + \cos(2\pi \sigma s)) \\ I(M) &= \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2 \frac{I_0}{\Delta\sigma} (1 + \cos(2\pi \sigma s)) d\sigma \\ &= 2 I_0 + \frac{2 I_0}{\Delta\sigma} \frac{1}{2\pi s} \left[\sin(2\pi \sigma s) \right]_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \\ &= 2 I_0 + \frac{I_0}{\Delta\sigma} \frac{1}{\pi s} \left[\sin 2\pi s(M) \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) - \sin 2\pi s(M) \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \right] \\ &= 2 I_0 + 2 I_0 \frac{1}{\pi \Delta\sigma s} \sin(\pi \Delta\sigma s) \cos(2\pi \sigma_0 s) \end{aligned}$$

$$I(M) = 2 I_0 \left[1 + \underbrace{\frac{\sin(\pi \Delta\sigma s)}{\pi \Delta\sigma s(M)}}_{\text{visibilité}} \underbrace{\cos(2\pi \sigma_0 s)}_{\text{franges}} \right]$$

2) Interprétation:

- La visibilité s'annule pour la 1^{er} fois lorsque $\text{sinc}(\cdot) = 0 \Rightarrow \pi \Delta\sigma s(M) = \pi$

$$\Rightarrow s(M) = \frac{1}{\Delta\sigma} = L_c$$

$$L_c = \frac{1}{\Delta\sigma} = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$$

* Condition de recouvrement des trains d'onde: $s(M) \leq L_c$

Leçon 5: l'interféromètre de Michelson

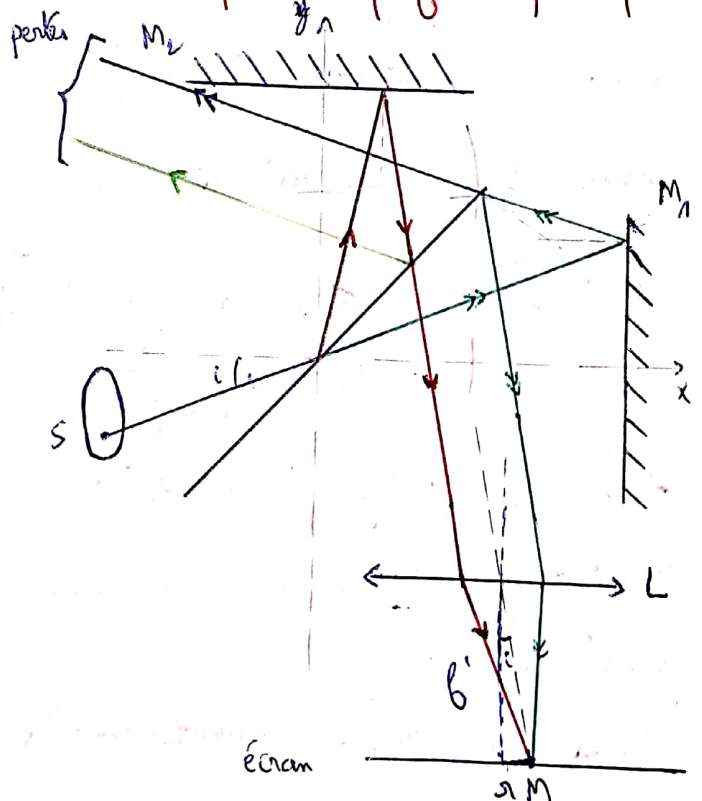
I/ Présentation de l'appareil: (cours p 42)

- * Deux miroirs M_1 et M_2 : l'un est fixe
- * Deux lames de verre:
 - o) La séparatrice: séparer le rayon incident en deux rayons l'un réfléchi et l'autre transmis
 - o) Compensatrice: compenser la marche supplémentaire introduite par la séparatrice.
- * vis de chariotage: permet le déplacement de translation du miroir M_1 (mobile)

$$OM_1 = d_1 \text{ et } OM_2 = d_2$$

$$\text{on pose } e = |d_1 - d_2|$$

II/ Description simplifiée de principe



Rq: ...

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i$$

1) Si I_0 est l'intensité de la source alors

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{4} \Rightarrow I(M) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\varphi(M)))$$

2) Si I_0 est l'intensité de point M lorsque l'un des miroirs est occulté (masqué)

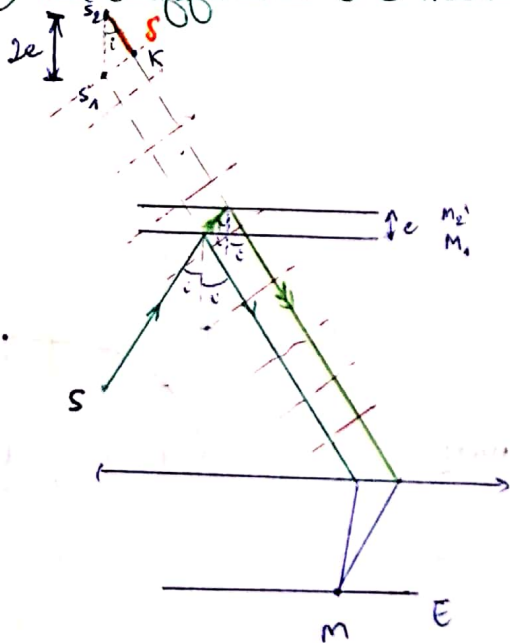
$$\Rightarrow I(M) = 2I_0 (1 + \cos(\varphi(M)))$$

* Schéma équivalent (p 45).

Def: dans ce modèle, il s'agit du division d'amplitude: séparation du faisceau en deux parties à l'aide de la séparatrice.

III / Configuration lame d'air.

① La différence de marche



$$\begin{aligned} \delta(M) &= (s_2 M) - (s_1 M) \\ &= s_2 K - K/M - s_1 M \\ &= 2e \cos i \end{aligned}$$

$$\delta(M) = 2e \cos i$$

$i \in [0, i_{\max}]$
dépend de la taille de la source.

② La figure d'interférences: on va donc observer des interférences constructives pour $\varphi = 2k\pi$

$$\frac{4\pi}{\lambda} e \cos i = 2k\pi \Leftrightarrow \cos i = \frac{k\lambda}{2e}$$

$$\Rightarrow \boxed{FB : i_k = \arccos\left(\frac{k\lambda}{2e}\right)}$$

c.à.d pour différentes valeurs de i les rayons d'égale inclinaison vont donc interférer.

* Les interférences sont localisées à l'infini. En pratique, on place un écran à une distance $D \gg e$

ou on utilise une lentille convergente (focal b) et on projette la figure d'interférence dans son plan focal image.

$$\begin{aligned} I(M) &= 2I_0 (1 + \cos(\varphi)) \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2e \cos i\right)\right) \end{aligned}$$

$$I = I_0 \Rightarrow \delta = d\epsilon \Rightarrow i = d\epsilon$$

Les franges sont appelées franges d'égale inclinaison. (pour chaque i on a un anneau)

dans ce cas vu la symétrie de révolution du système optique; la figure d'interférence observée sur l'écran est constituée d'anneaux centrés en O ($s_1, s_2 \perp (E)$)

$$r = f' \cdot \tan(i)$$

⊗ L'anneau q brillant correspond à un ordre d'interférence entier.

⊗ pour e fixée ; l'ordre maximal

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} \quad (i=0) : \text{l'ordre au centre}$$

$$p_0 = E(p_0) + \varepsilon$$

⊗ L'ordre p diminue lorsque $r \nearrow$ donc le premier anneau brillant correspondra à $p_1 = E(p_0)$

$$\text{Le deuxième à } p_2 = E(p_0) - 1$$

$$\text{le } q\text{-ième à } p_q = E(p_0) - (q-1)$$

$$p = \frac{S}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (\Rightarrow)$$

$$\lambda \cdot p = 2e \cos(i)$$

r_q en fonction de l'ordre p : sans approxi des angles faibles:

$$2e \cos(i_q) = p_q \lambda \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{\cos(i_q)} = \frac{2e}{\lambda p_q} = \frac{p_0}{p_q}$$

$$\frac{1}{\cos(i_q)} = 1 + \tan^2(i_q) = \frac{p_0^2}{p_q^2} \quad (\Rightarrow)$$

$$\tan^2(i_q) = \left(\frac{p_0}{p_q}\right)^2 - 1 \Rightarrow \tan(i_q) = \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_q}\right)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow r_q = f' \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_q}\right)^2 - 1}$$

r_q en fonction du q : avec approximation des angles faibles:

$$\cos i_q = 1 - \frac{i_q^2}{2} = \frac{p_q}{p_0}$$

$$\frac{i_q^2}{2} = 1 - \frac{p_q}{p_0} = \frac{p_0 - p_q}{p_0}$$

$$\Rightarrow i_q = \sqrt{\frac{2}{p_0} (p_0 - p_q)}$$

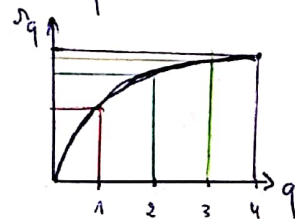
$$\text{or } r_q = f' \tan(i_q) \simeq f' i_q$$

$$\Rightarrow r_q = f' \sqrt{\frac{2}{p_0} (p_0 - p_q)} = f' \sqrt{\frac{2}{\frac{2e}{\lambda}} (p_0 - p_q)} = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e} (E(p_0) + \varepsilon - E(p_0) + q - 1)}$$

$$r_q = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e} (q + \varepsilon - 1)}$$

⊗ r_q varie grossièrement en $\sqrt{\frac{1}{p_0}}$ et $\sqrt{q}$

Les anneaux ne sont pas équidistants; il deviennent de plus en plus serrés au fur et à mesure que l'on s'éloigne de 0



Remarques:

⊗ La figure d'interférences est constituée par des anneaux concentriques alternés brillant et sombre et qui deviennent plus serrés lorsque on s'éloigne du centre

⊗ Si $\varepsilon = 0$ (p_0 entier) : centre brillant :

$$r_q = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e} q}$$

* Si $\frac{1}{2} < \epsilon < 1$: le 1^{er} anneau rencontré est sombre

* Si $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$: le 1^{er} anneau rencontré est brillant.

* Si on diminue e ; $r_n \nearrow$: les anneaux semblent entrer dans le centre : leur nombre diminue

* Si on augmente e ; $r_n \searrow$: les anneaux semblent sortir du centre : leur nombre augmente

* Suivre un anneau revient à fixer son ordre p

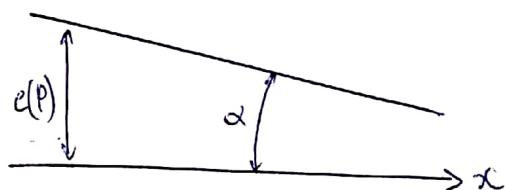
* Le cas $e = 0$ correspond au contact oblique : on observe une tâche uniforme appelé la "tache plate"

* Si on observe des ellipses alors le //isme (c_p) et (s_p) n'est pas parfait.

IV / Configuration coin d'air

① Différence de marche

$$\delta = 2\alpha x = 2e(p)$$



② Franges d'égale épaisseur.

- les interférences sont localisées au

voisinage d'une surface définie par l'intersection des rayons sur un plan très près du coin

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} : \text{interfrange.}$$

* on observe des franges rectilignes

* on obtient un coin d'air à partir du contact optique ($e = 0$) puis on incline l'un des miroirs d'un angle α très faible ; l'éclairage se fait en plaçant un diaphragme à l'entrée du l'interféromètre.

* Les franges sont dites d'égale épaisseur (pour chaque e on obtient une frange)

Introduction:

- physique classique:

⊗ Onde: fait appel à des grandeurs continues (les champs scalaires ou vectoriels)

⊗ Matière: constituée de particules ayant une extension spatiale et on lui associe des propriétés physiques comme la masse, la charge

⊗ Le déterminisme { - Rien ne limite la précision d'une mesure
- Si un système est bien connu à $t=0$; il restera à $t>0$

I/ Introduction au monde quantique

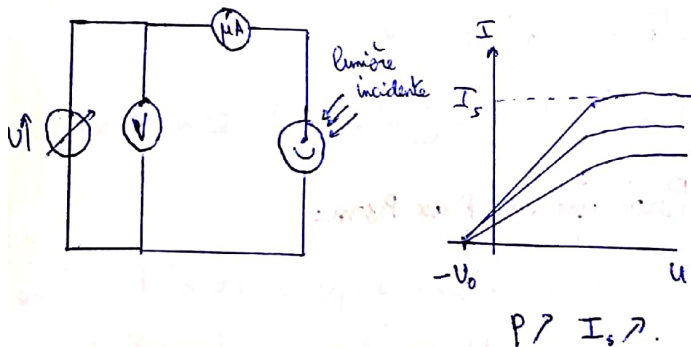
1) Dualité onde - particule de la lumière

hypothèse des quanta: l'énergie n'est pas émise de manière continue, mais par paquets dont la taille E dépend de la fréquence de l'onde ν selon la relation

$$E = h \cdot \nu = \frac{h c}{\lambda}$$

h : constante de Planck.

⊗ l'effet photoélectrique:



- Observations expérimentales:

* Il existe une fréquence de seuil ν_0 tq $I=0$ si $\nu < \nu_0$ qui dépend de la nature du métal

* il $\exists V_0$ potentiel d'arrêt tq $I_0=0$ si $U < (-V_0)$ qui dépend de la nature du métal

* l'intensité de saturation I_s $\nearrow$ si $P \nearrow$

- Interprétation classique (appart ^{continue} d'énergie) pour arracher un e^- il faut que $E > W_{ext}$

$$\Leftrightarrow E = P \cdot \Delta t > W_{ext} \Leftrightarrow \Delta t > \frac{W_{ext}}{P}, \forall P$$

- Interprétation d'Einstein 1905

La lumière est constituée par des petites particules (grain d'énergie) appelé photon

$\Rightarrow$ l'échange d'énergie se fait forcément d'une façon discrète

$$\nu > \nu_0 \Rightarrow \nu = \nu_0 + \Delta \nu$$

$$h \nu = W_{ext} + h \Delta \nu$$

$$\text{avec } h \nu > W_{ext} \Rightarrow \nu > \frac{W_{ext}}{h} = \nu_0$$

si $\nu > \nu_0$:

$$E = h \cdot \nu = h \nu_0 + E_{cin} = h \nu_0 + \frac{1}{2} m_e v^2$$

tq v : vitesse de l'électron

$$R_g: U_0 = \frac{h(\nu - \nu_0)}{e}$$

* I_s en fonction de P et λ et autres:

$$N_{phat} = N_{elec} \text{ et } E = P \cdot \Delta t = N_{phat} \cdot h \nu$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_{phat} \cdot e}{\Delta t} = \frac{P \cdot \Delta t \cdot e}{h \nu \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow I_s = \frac{P \cdot e}{h \cdot \nu} \quad I_s \nearrow \text{ si } P \nearrow$$

* Le rendement quantique:

$$R_q = \frac{N_{e^-}}{N_{ph}} = \frac{I}{I_s}$$

- Conclusion:

la lumière possède deux propriétés complémentaires indissociables:

* Ondulatoire: la lumière est onde E-M caractérisée par sa fréquence, sa longueur d'onde, vecteur d'onde $\vec{k}$

* Corpusculaire: la lumière est constituée par des grains d'énergie appelés photons de masse nulle, d'impulsion $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et d'énergie $E = \hbar \cdot \nu$

avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$: constante de Planck réduite

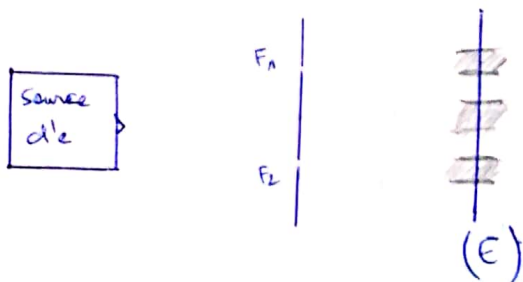
(2) Dualité onde-particule de la matière
À toute particule matérielle de masse m et vitesse v doit être associée une onde reliée à la quantité de mouvement par

$$\lambda_B = \frac{h}{p} \quad \lambda_B: \text{longueur d'onde de Broglie}$$

et $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ tq $v \ll c$.

→ on tient compte du caractère ondulatoire de la matière si sa λ_B est proche du distance atomique ($\approx \text{\AA}$)

(3) La fonction d'onde et son interprétation probabiliste



On remarque que l'impact d'un électron est plus probable en certains points qu'en d'autre → Aspect ondulatoire

* Les zones brillantes correspondent à des zones plus probables alors que les zones sombres sont peu probables.

(forte analogie entre $|\psi|^2$ de probabilité et $I(x)$ de densité)

* l'interfrange $i = \frac{\lambda \cdot d}{a}$

* Si on doit détecter la direction de l'e- on n'obtient pas une figure d'interférence (deux tâches) ⇒ l'état intermédiaires d'un électron, entre son émission et sa détection ne sont pas connus.

→ toute mesure perturbe le système.

L'onde envisagée par de Broglie correspond à la propagation de la fonction d'onde.

$\Psi(m, t)$: amplitude de probabilité

$\Psi_1(m, t)$: l'e- passe par la fente ①

$\Psi_2(m, t)$: l'e- passe par la fente ②

$$\Psi(m, t) = \Psi_1(m, t) + \Psi_2(m, t)$$

$$P = |\Psi(m, t)|^2 = P_1(x) + P_2(x) + \text{terme d'interférence}$$

Principe de Max Born:

La description complète de l'état d'une particule dans l'espace à l'instant t se fait au moyen d'une fonction d'onde à valeur complexe: $\Psi(\vec{r}, t)$

② Etat stationnaire (séparation des fonctions)

est un état dont la densité de probabilité

$$\rho = |\Psi|^2 \text{ ne dépend pas du temps}$$

$$\rho = \rho(x)$$

Soit $\Psi(x, t) = f(x) \chi(t)$ une solution de l'équation de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) \chi(t) + V(x) f(x) \chi(t) = i\hbar \chi'(t) f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{f''(x)}{f(x)} + V(x) = i\hbar \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} = c_k$$

$$[c_k] = [V] = \text{Joule} : \text{on pose } c_k = E$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) + V(x) f(x) = E f(x) \\ i\hbar \chi'(t) = E \chi(t) \Rightarrow \chi(t) = A e^{i \frac{E}{\hbar} t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = E \cdot A \cdot f(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

un état stationnaire d'énergie E s'écrit

$$\Psi(x, t) = \phi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \text{ avec } \phi \text{ vérifie l'équation } H\phi = E\phi$$

ou encore l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + V(x) \cdot \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\boxed{\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \cdot \phi(x) = 0}$$

Remarques :

- le terme $e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$ relie l'évolution temporelle de Ψ à l'énergie de particule

$$E = \hbar \cdot \omega \Rightarrow e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = e^{-i \omega t}$$

$$\text{avec } E = \hbar \cdot \nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi \nu = \hbar \cdot \omega$$

- superposition dans cet état n'est pas obligatoirement stationnaire

③ Particule libre ($V=0$)

$$E = E_{\text{cin}} = \frac{p^2}{2m} > 0$$

$$\phi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0 \text{ posons } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\phi''(x) + k^2 \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \Psi(x, t) = \underbrace{A e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{OPPM selon } x} + \underbrace{B e^{-i(kx + \omega t)}}_{\text{OPPM selon } x}$$

$$\text{La vitesse de phase : } v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2m\hbar\omega}{\hbar^2}}}$$

$$\Rightarrow v_{\phi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot \sqrt{\omega} : \text{milieu dispersif (dépend de } \omega \text{)}$$

Relation de dispersion :

$$E = \hbar \omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2}$$

Remarques

- $\Psi(x, t)$ n'est pas normalisable : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx \rightarrow +\infty$
l'onde plane de de Broglie ne décrit pas la réalité physique

- $\rho(x) = |\Psi(x, t)|^2 = |A|^2$ est uniforme ; toutes les positions sont équiprobables $\Rightarrow$ position indéterminée
en accord avec l'inégalité de Heisenberg.

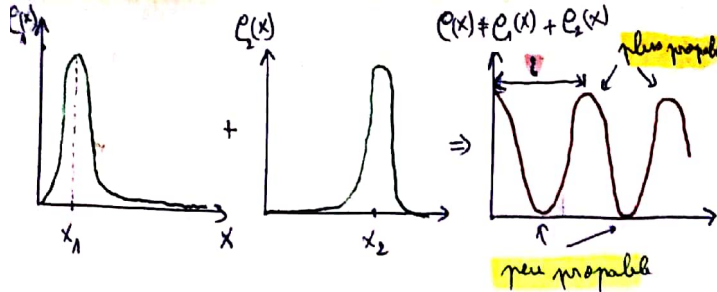
OPPM $\rightarrow k = k_0$ fixé $\Rightarrow p = \hbar \cdot k_0 = p_0$ fixé

$\Delta p = 0$ alors $\Delta x \cdot \Delta p \gg \frac{\hbar}{2}$ d'où $\Delta x \rightarrow \infty$

- à t fixé la particule peut se trouver dans un intervalle finies des position

$\Rightarrow$ la description quantique impose pour $\Psi(x, t)$ une combinaison linéaire des OPPM suivantes
on décrit Ψ par un paquet d'onde

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$



La probabilité de trouver la particule en m à l'instant t à dx près est

$$dP = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

à $1D$: en x à dx près, $dP = |\Psi(x, t)|^2 dx$

$\rho(x, t)$ densité de proba en $m^{-1} \Rightarrow [\Psi] : m^{-1/2}$

$\Psi(x, t)$ vérifie la condition de normalisation

$$\int dP = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

Remarques :

- $\Psi(x, t)$ contient toute l'information possible
- Le caractère probabiliste ne résulte pas de mauvaise connaissance des conditions initiales mais partie intégrante du formalisme

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx$$

$$\Delta x \text{ (l'écart type)} : \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

principe de superposition $dP = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 dx$

	classique	quantique
propriétés intrinsèques	charge q masse m	charge q masse m
état de la particule	$\vec{r}$: position $\vec{p}$: qte de mouvement	$\Psi(\vec{r}, t)$
eq de mouvement	RFD	eq de Schrödinger
type de	déterministe	probabiliste

4) Inégalité de Heisenberg spatiale

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

5) Quantification d'énergie d'une particule confinée à $1D$: $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$

II/ Equation de Schrödinger :

1) Énoncé

cette équation linéaire gouverne

l'évolution de Ψ d'une particule soumise à une énergie potentielle V

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{avec}$$

m : masse de la particule ; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; $i^2 = -1$.

Cette équation s'inspire de la conservation de l'énergie en mécanique classique

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{une solution}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar k}{2m} \right)^2 \Psi + V \cdot \Psi = \hbar \omega \Psi$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^2}{2m} + V = E \Leftrightarrow E_c + \underbrace{V}_{E_p} = E$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Psi) + V \Psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi) \right)$$

on associe à toute grandeur physique G un opérateur linéaire qui a pour rôle de modifier Ψ

G	opérateur
E_{cin}	$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$
énergie potentielle	multiplication par V
qte de mouvement (impulsion)	$-i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$
énergie	$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V$: hamiltonien

② Etat stationnaire (séparation des variables)

est un état dont la densité de probabilité

$$\rho = |\Psi|^2 \text{ ne dépend pas du temps}$$

$$\rho = \rho(x)$$

Soit $\Psi(x,t) = f(x) \chi(t)$ une solution de l'équation de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) \chi(t) + V(x) \cdot f(x) \cdot \chi(t) = i\hbar \chi'(t) \cdot f(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{f''(x)}{f(x)} + V(x) = i\hbar \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = f'(x) = f(t) = cte$$

$$[c] = [V] = \text{Joule} : \text{on pose } c = E$$

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} f''(x) + V(x) f(x) = E f(x) \\ i\hbar \chi'(t) = E \chi(t) \Rightarrow \chi(t) = A e^{i \frac{E}{\hbar} t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = E \cdot A \cdot f(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

un état stationnaire d'énergie E s'écrit

$$\Psi(x,t) = \phi(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \text{ avec } \phi \text{ vérifie l'équation } H\phi = E\phi$$

ou encore l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + V(x) \cdot \phi(x) = E \phi(x)$$

$$\boxed{\phi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \cdot \phi(x) = 0}$$

Remarques :

- le terme $e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$ relie l'évolution temporelle de Ψ à l'énergie de particule

$$E = \hbar \cdot \omega \Rightarrow e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = e^{-i \omega t}$$

$$\text{avec } E = \hbar \cdot \nu = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi \nu = \hbar \cdot \omega$$

- superposition dans cet état n'est pas obligatoirement stationnaire

③ Particule libre ($V=0$)

$$E = E_{cin} = \frac{p^2}{2m} > 0$$

$$\phi''(x) \mp \frac{2mE}{\hbar^2} \phi(x) = 0 \text{ posons } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\phi''(x) + k^2 \phi(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \Psi(x,t) = \underbrace{A e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{OPPM selon } k \rightarrow x} + \underbrace{B e^{-i(kx + \omega t)}}_{\text{OPPM selon } k \rightarrow x}$$

$$\text{La vitesse de phase : } V_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2m\hbar\omega}{\hbar^2}}}$$

$$\Rightarrow V_\phi = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot \sqrt{\omega} : \text{milieu dispersif (dépend de } \omega \text{)}$$

Relation de dispersion :

$$E = \hbar \omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2}$$

Remarques

- $\Psi(x,t)$ n'est pas normalisable : $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx \rightarrow +\infty$

l'onde plane de de Broglie ne décrit pas la réalité physique

- $\rho(x) = |\Psi(x,t)|^2 = |A|^2$ est uniforme ; toutes les positions sont équiprobables $\Rightarrow$ position indéterminée

En accord avec l'inégalité de Heisenberg.

OPPM $\rightarrow k = k_0$ fixé $\Rightarrow p = \hbar \cdot k_0 = p_0$ fixé

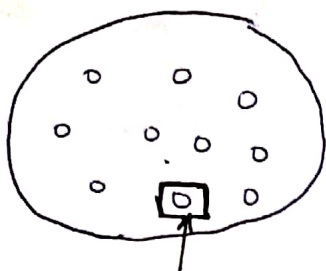
$\Delta p = 0$ alors $\Delta x \cdot \Delta p > \frac{\hbar}{2}$ d'où $\Delta x \rightarrow \infty$

- à t fixé la particule peut se trouver dans un intervalle finies des position

$\Rightarrow$ la description quantique impose pour $\Psi(x,t)$ une combinaison linéaire des OPPM suivant x

on décrit Ψ par un paquet d'onde

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$



particule micro(i)

* Etat micro: donnée de son énergie E_i

* Système macro

- N particules ($N \gg 1$): micro
- Etat macro: grandeurs caractéristiques

fixées ex: gaz (P, V, T)

Spectre de l'énergie:

$E_{\text{part}} \in \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$: discret

ou $\in [E_{\min}, E_{\max}]$: continue

démarche:

on a: $PV = nRT$

ou $N = n \cdot N_A$ et $R = N_A \cdot k_B$

$\Rightarrow P = \frac{N}{V} \cdot k_B T$; $n_v = \frac{N}{V}$

$\Rightarrow P = n_v \cdot k_B T$

condition d'équilibre:

$$Nmg + F(z+dz) - F(z) = 0 \quad (*)$$

ou $F(z) = P(z) \Sigma$ force de pression en z [1]

$$(*) : Nmg + \frac{dF}{dz} \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow Nmg + \Sigma dz \frac{dP}{dz} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -n_v mg$$

$$\text{alors } \frac{dn_v}{dz} = - \frac{mg}{k_B T} \cdot n_v$$

$$\Rightarrow n_v(z) = n_{v_0} \cdot \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$$

$$n_v(z) = n_{v_0} \exp\left(-\frac{E_{pp}}{k_B T}\right)$$

avec $E_{pp} = mgz$: énergie potentielle de pesanteur
et $k_B T$: énergie d'agitation thermique (7)

$$p(E_{\text{part}} = E_i) = A \underbrace{e^{-\beta E_i}}_{\text{Facteur de Boltzmann}}$$

$$\text{avec } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$\Rightarrow$ le facteur de Boltzmann donne la probabilité $p(E_i)$ pour qu'une particule dans un système de T fixée,

$$\text{on a } \sum_i p(E_i) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{Z}$$

avec $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$: fonction de partition.

discussion selon la température.

* à H.T: $k_B T \gg mgz$:

$$e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \rightarrow 1 : n_v(z) = n_v(0) \quad \forall z$$

H.T $\Rightarrow$ niveau d'énergie sont équiprobables.

* à B.T: $k_B T \ll mgz$:

$$e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} n_v(z) = 0 & \forall z \neq 0 \\ n_v(z=0) = n_v(0) \end{cases}$$

B.T $\Rightarrow$ le niveau d'énergie le moins énergétique est le plus probable

discrète: $p(E_i) = A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$

continue: $dP(E) = \alpha e^{-\frac{E}{k_B T}}$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{part}} &= \sum_i p_i(E_i) \cdot E_i \\ &= \sum_i E_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_i \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\beta E_i}) \\ &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_i e^{-\beta E_i} \right] \end{aligned}$$

$$\bar{E}_{\text{part}} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} : \text{valeur moyenne (espérance)}$$

$$\text{Var}(E_{\text{part}}) = \overline{E_{\text{part}}^2} - (\bar{E}_{\text{part}})^2 : \text{var}$$

$$\Delta E_{\text{part}} = \sqrt{\text{Var}(E_{\text{part}})} : \text{écart type}$$

Système de N particules indépendantes identiques:

$$\bar{E}_{\text{tot}} = N \cdot \bar{E}_{\text{part}}$$

$$\text{Var}(E_{\text{tot}}) = N \text{Var}(E_{\text{part}})$$

$$\Delta E_{\text{tot}} = \sqrt{N} \cdot \Delta E_{\text{part}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta E_{\text{tot}}}{\bar{E}_{\text{tot}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{\Delta E_{\text{part}}}{\bar{E}_{\text{part}}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow U = E_{\text{sys}} = \bar{E}_{\text{tot}}$$

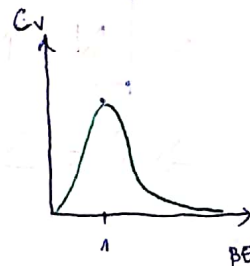
* la capacité calorifique:

$$C_v = \left(\frac{\partial \bar{E}_{\text{tot}}}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial \bar{E}_{\text{tot}}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial \bar{E}_{\text{tot}}}{\partial \beta}$$

* $\beta E \ll 1 : C_v \rightarrow 0$

* C_v admet un maximum pour $\beta E = 1$.

* $\beta E \gg 1 : C_v \rightarrow 0$



Capacité Thermique classique des gaz et des solides

Théorème d'équipartition de l'énergie

Dans un système à l'équilibre à T ,
l'énergie moyenne par particule
associée à un degré de liberté q
quadratique est $\overline{\epsilon q^2} = \frac{1}{2} k_B T$

exemple:

$$* E_{c,t} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

ici q = les composantes v_x, v_y, v_z

$$\Rightarrow \overline{E_{c,t}} = \frac{1}{2} m (\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) =$$
$$= 3 \left(\frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T \right)$$

$$\boxed{\overline{E_{c,t}} = \frac{3}{2} k_B T}$$

$$* E_c = \frac{1}{2} I_x \omega^2$$

ici $q = \omega$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E_{c,r}} = \frac{1}{2} I_x \overline{\omega^2} = \frac{1}{2} k_B T}$$

* oscillateur harmonique 1D :

$$E_{os,r} = \frac{1}{2} k y^2 + \frac{1}{2} m v_y^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E_{os,r}} = k_B T}$$

ici q = les positions y et v_y .

Capacité thermique des gaz parfaits

2 forme de gaz parfait.

• monatomique :

$$E_{part} = E_{c,t} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\Rightarrow U = N \overline{E_{part}} = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$= \frac{3}{2} n N_A k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

$$\boxed{C_{v,mol} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{vol} = \frac{3}{2} R}$$

• diatomique

$$E_{part} = \underbrace{E_{c,rot}}_{2 \text{ degré}} + \underbrace{E_{c,tr}}_{3 \text{ degré}} + \underbrace{E_{c,vibration}}_{\substack{\text{négligeable} \\ T \ll T_{rot} \approx 100 K}}$$

$$\overline{E_{part}} = \frac{5}{2} k_B T \Rightarrow \boxed{C_{v,mol} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{vol} = \frac{5}{2} R}$$

Capacité thermique d'un solide

oscillateur harmonique 3D : 6 degrés de liberté

$$C_{v,m} = \left(\frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = 6 \cdot \frac{1}{2} R = 3 R$$

$C_{v,m} = 3 R$: est la loi de Dulong et Petit
la capacité thermique molaire des
cristaux est égal $3 R = 24,9 J K^{-1} mol^{-1}$
indépendante de T