

Réduction :

①

① Sous espace stable : E $\mathbb{K}e.v$ de dim fini

* endomorphisme induit : $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E

on dit que F stable par u si : $\forall x \in F, u(x) \in F$

$u|_F$: endomorphisme induit par u sur F

$\in \mathcal{L}(F)$

$$u|_F : F \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto u(x)$$

- exp: $\triangle$
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \\ \text{sont stables par } u \end{array} \right.$

si $u \circ v = v \circ u$ alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est stable par v .

$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u \circ v = v \circ u \\ \text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \\ \text{sont stables par } v \end{array} \right.$

Prop :

si $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors F est stable par u si :
 $u(e_i) \in F \forall i \in \{1, \dots, p\}$ ou bien $= (u(F) \subset F)$

$E = F \oplus G$ et $B = B_1 \cup B_2$: base de E adaptée à

base de $F = (e_1, \dots, e_p)$ la décomposition
 base de $G : (e_{p+1}, \dots, e_n)$

alors : F est stable par u si :

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-p, p} & C \end{pmatrix}$$

$$A \in M_p(\mathbb{K})$$

$$\text{De plus : } A = M_{B_1}(u|_F)$$

si de plus : F et G

sont stables par u

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} A & 0_{p, n-p} \\ 0_{n-p, p} & B \end{pmatrix} \quad B = M_{B_2}(u|_G)$$

→ Généralisation:

soient $F_1, \dots, F_k$ des s.e. de E tq: $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$

B_i base de F_i et $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ base de E .

alors: F_i est stable ssi $\text{par } u$ $P_i = \dim(F_i)$

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \boxed{A_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

$$A_i \in M_{P_i}(K) \quad \forall i$$

Dans ce cas,

$$A_i = M_{B_i}(u|_{F_i})$$

② Valeurs propres – vecteurs propres =

* valeur propre = $\lambda \in \mathcal{L}(E)$

$\alpha \in K$, si $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq: $u(x) = \alpha x$ alors α est une valeur propre de u .

$S_p(u)$ = spectre de u = l'ensemble des valeurs propres de u .

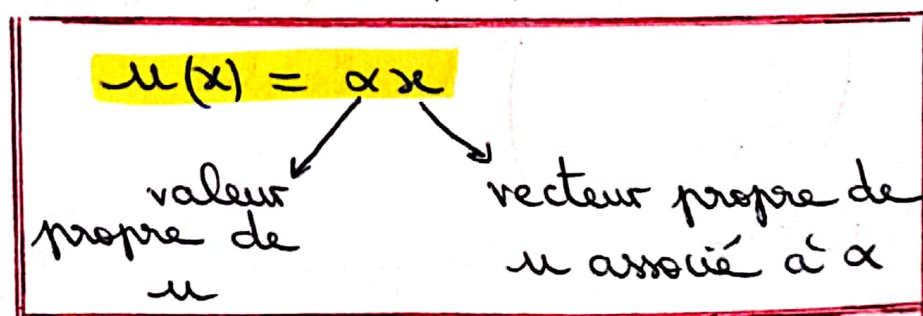
$$\alpha \in S_p(u) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 \text{ tq: } x \in \ker(u - \alpha \text{Id}) \neq \{0\}$$

$$\Leftrightarrow u - \alpha \text{Id non inj} \Rightarrow \text{non bij} \Leftrightarrow \det(u - \alpha \text{Id}) = 0$$

* vecteur propre = $\lambda \in \mathcal{L}(E)$

$x \in E$, si $x \neq 0$ et $\exists \alpha \in K$ tq: $u(x) = \alpha x$

alors x est un vecteur propre de u .



Prop: =

⊙ $x \neq 0$, x est un vecteur propre de $u \Leftrightarrow \text{vect}(x)$ est stable par u .

* sous espace propre de u :

$\forall \alpha \in \text{Sp}(u)$, $\text{Ker}(u - \alpha \text{Id})$ = s. espace propre de u associé à α

noté: $E_\alpha(u)$

→ $x \neq 0$ est un vecteur propre de u ssi: $x \in E_\alpha(u)$

→ $\alpha \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u ssi: $E_\alpha(u) \neq \{0\}$

⚠: des éltos propres sont = $\begin{cases} \text{la valeur propre} \\ \text{le vecteur propre} \\ \text{le s. espace propre} \end{cases}$

⊙ $\forall \alpha \in \text{Sp}(u)$: $E_\alpha(u)$ est stable par u

⊙ si $u \circ v = v \circ u$: $E_\alpha(u)$ est stable par v .

⊙ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ valeurs propres de u & à à $\neq$ alors:

$E_{\alpha_1}(u), \dots, E_{\alpha_n}(u)$ sont en somme directe.

⊙ $x_1, \dots, x_n$ vecteurs propres de u alors $(x_1, \dots, x_n)$ libre.

* éltos propres d'une matrice = $A \in M_n(\mathbb{K})$

si $\exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tq: $AX = \alpha X$ alors =
 $X \in \text{Ker}(A - \alpha \text{Id})$
↓
valeur propre de A vecteur propre de A

noté: $E_\alpha(A)$; $\text{Sp}(A)$ } spectre de A ou:
s. espace propre de A ensemble des valeurs propres de A .

Prop: $\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tq: } Ax = \alpha x$

① $\alpha \in S_p(A) \Leftrightarrow \ker(A - \alpha I_n) \neq \{0\} = \text{non inversible}$

$$\Leftrightarrow \det(A - \alpha I_n) = 0.$$

⚠: les élt's propres d'une matrice A sont les élt's propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n & \text{si } f_A(x) &= \alpha x \\ x &\mapsto Ax & \Leftrightarrow & Ax = \alpha x \end{aligned}$$

③ Polynôme caractéristique: $A \in M_n(\mathbb{K})$

$\chi_A = \det(XI_n - A)$: le polynôme caractéristique de A .

Prop: $\chi_A(x)$ est un polynôme unitaire de degré n .

$$\chi_A(x) = x^n + -\text{tr}(A) \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

② $\alpha \in S_p(A) \Leftrightarrow \chi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow S_p(A) = \{ \text{les racines de } \chi_A \}$

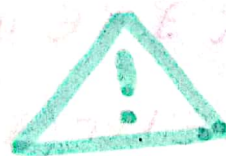
② A admet au max n val propres

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} = S_p(A) \text{ peut être vide.} \\ \bullet \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} = S_p(A) \text{ est tj non vide.} \end{array} \right\} S_{\mathbb{R}}(A) \subset S_{\mathbb{C}}(A)$

② la multiplicité de $\alpha =$ la multiplicité de α racine χ_A .
($\alpha \in S_p(A)$)

Rappel: α racine de P de multiplicité $m =$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^m / P \text{ et } (x-\alpha)^{m+1} \nmid P \\ P(x) = (x-\alpha)^m \cdot Q(x) \text{ avec: } Q(\alpha) \neq 0. \\ P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0. \end{array} \right.$$



① soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\chi_A = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ est scindé

$$\begin{cases} \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \det(A) = \prod_{i=1}^n \alpha_i \end{cases}$$

$$A = P B P^{-1}$$

② si A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\chi_A = \chi_B \Rightarrow S_p(A) = S_p(B)$$

$$\chi_A = \chi_{t_A}$$

* polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

$$\chi_u = \det(xI_d - u) = \text{poly carac de } u$$

$$\chi_u(x) = \chi_A(x) \text{ avec : } A = M_B(u) \rightarrow \text{base qlq de } E.$$

* matrices par bloc :

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}) \quad ; \quad T' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}) \text{ par bloc.}$$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ $A' \in M_n(\mathbb{K})$

$$TT' = \begin{pmatrix} AA' & X \\ 0 & CC' \end{pmatrix} \Rightarrow T^K = \begin{pmatrix} A^K & X \\ 0 & C^K \end{pmatrix} \text{ diagonale par bloc.}$$

si $B=0$: $TT' = \begin{pmatrix} AA' & 0 \\ 0 & CC' \end{pmatrix} \Rightarrow T^K = \begin{pmatrix} A^K & 0 \\ 0 & C^K \end{pmatrix}$

③ si :

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \times \det(C) = \det(D)$$

⇒ conséquences: $\chi_D = \chi_A \times \chi_C$

→ Généralisation:

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix} \times$$

$$\det(D) = \prod_{i=1}^n \det(A_i)$$

$$\chi_D(x) = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x)$$

Th: E $\mathbb{K}$ ev de dim n , $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev de E .

si F est stable par u alors:

$$\chi_{u|_F} / \chi_u$$

④ Endomorphisme - Matrices diagonalisables:

• u est diagonalisable si: $\exists B$ base de E tq:

$M_B(u)$ est diagonale.

• si: $\exists B$ base formé des vecteurs propres de u

$\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ tq: $u(e_i) = \alpha_i e_i \forall i, \alpha_i \in \mathbb{K}$
ou admet une base des vecteurs propres Δ

• si: $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p$ & $\alpha_i \neq \alpha_j \in S_p(u)$ tq:

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\alpha_i}(u) \quad \text{en effet: } E = E_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus E_{\alpha_p}$$

E_{α_i} est stable par u : $r_i = \dim(E_{\alpha_i})$

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} M_{B_1}(u|_{E_{\alpha_1}}} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{B_p}(u|_{E_{\alpha_p}}) \end{pmatrix}$$

avec:

$$M_{B_i}(u|_{E_{\alpha_i}}) = \alpha_i I_{r_i} = \begin{pmatrix} \alpha_i & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

→ Conséquences: u est diagonalisable ssi:

$$\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\alpha_i}(u))$$

⊙ χ_u est sindé: $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^p (x - \alpha_i)^{m_i}$; $Sp(u) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$

$$\forall i, \quad 1 \leq \dim(E_{\alpha_i}(u)) \leq m_i \quad \text{2 à 2} \neq$$

⊙ u est diagonalisable ssi: χ_u est sindé et

$$\forall \alpha_i \in Sp(u): \quad m_{\alpha_i} = \dim(E_{\alpha_i}(u))$$

⚠: χ_u est sindé à racines simples alors u est diagonalisable. (u admet n.v.p $\neq$).

- $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonalisable ssi:

⊙ A est semblable à une matrice diagonale =

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), D \in D_n(\mathbb{K}) \text{ tq: } A = P D P^{-1}$$

⊙ l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

$$\odot \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\alpha_i}(A)$$

$$\underbrace{\dim(\mathbb{K}^n)}_n = \sum_{i=1}^p (n - \text{rg}(A - \alpha_i I_n))$$

⊙ χ_A est sindé et $m_i = \dim(E_{\alpha_i}(A))$

* Polynôme d'endomorphisme - polynôme d'une matrice

on a: $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

$f \in \mathcal{L}(E)$

$$P(f) = \sum_{k=0}^m a_k f^k = a_0 \underbrace{\text{Id}}_{f^0} + a_1 f + \dots + a_m f^m$$

Prop: $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

○ $(P+Q)(f) = P(f) + Q(f)$

○ $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$

○ $f \circ Q(f) = Q(f) \circ f$

○ $\text{Ker } f, \text{Im } f$ et $\underbrace{\text{Ker}(f - \alpha \text{Id})}_{E_\alpha(f)}$ sont stables par $P(f)$ et $Q(f)$.

→ polynôme annulateur: $P(f) = 0$

Prop: $\mathcal{P}: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$

$$P \mapsto P(f)$$

○ $\mathcal{P}$ morphisme d'algèbre

idéal de $\mathbb{K}[X]$

○ $\exists P_0 \in \mathbb{K}$ tq: $\text{Ker } \mathcal{P} = P_0 \mathbb{K}[X]$

○ $\text{Im } \mathcal{P} = \mathbb{K}[f]$: ensemble des polynômes en f .
s. algèbre commutative

○ si $\deg(P_0) \geq 1$: $\text{Im } \mathcal{P} = \text{vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{d-1})$

Th: E un K e.v de dim finie. $\forall f \in \mathcal{L}(E)$:

③

$\exists$ polynôme $\neq 0$: $P \in K[x]$ tq: $P(f) = 0$

on prend: $F = \{ \text{id}, f, f^2, \dots, f^{n^2} \} \subset \mathcal{L}(E)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{card}(F) = n^2 + 1 \\ \dim(\mathcal{L}(E)) = n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{card}(F) > \dim(\mathcal{L}(E)) \Rightarrow F \text{ est liée}$$

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}) \neq (0, \dots, 0)$ tq: $\alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n^2} f^{n^2} = 0$

on pose: $P(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 x^2 + \dots + \alpha_{n^2} x^{n^2+1}$ $\left\{ \begin{array}{l} P(f) = 0 \\ P \neq 0 \text{ car } (\alpha_1, \dots, \alpha_{n^2}) \neq 0 \end{array} \right.$

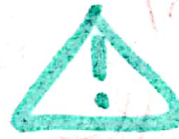
$\rightarrow$ Polynôme minimal: $\exists!$ polynôme noté m_f

tq: $\odot m_f(f) = 0$

$\odot \forall P \in K[x], P(f) = 0 \Leftrightarrow m_f / P$

$\odot m_f$ unitaire

Th de Cayley Hamilton:



E K e.v de dim finie

$f \in \mathcal{L}(E) \Rightarrow \chi_f(f) = 0$ ou bien m_f / χ_f

- Prop:

$\odot$ si $\lambda \in S_p(f)$ alors $P(\lambda) \in S_p(P(f))$

$\odot$ si $P(f) = 0$ alors $S_p(f) \subset \{ \text{racines de } P \}$.

$\rightarrow$ Conséquences: $\lambda \in S_p(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow m_f(\lambda) = 0$

$\mathcal{L}$ $= S_p(f) = \{ \text{racines de } \chi_f \} = \{ \text{racines de } m_f \}$.

* Polynôme d'une matrice: $P \in \mathbb{K}[x]$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k \Rightarrow P(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$$

→ Polynôme annulateur: $P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$

Prop: $P, Q \in \mathbb{K}[x]$

$$\odot (P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$$

$$\odot (P \times Q)(A) = P(A) \circ Q(A) = Q(A) \circ P(A)$$

$$\odot \text{si } M_B(f) = A \Rightarrow P(A) = M_B(P(f))$$

$$\odot P(A) = 0 \Leftrightarrow P(f) = 0$$

⚠ $\star D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow P(D) = \begin{pmatrix} P(\alpha_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\alpha_n) \end{pmatrix}$

* si A est diagonalisable: $A = P D P^{-1}$

$$Q(A) = P Q(D) P^{-1}$$

Lemme des noyaux: !!!

$u \in \mathcal{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ tq $P \wedge Q = 1$ alors:

$$\boxed{\text{Ker}((P \times Q)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))}$$

→ Conséquences: $\Rightarrow \text{Ker}((P \times Q)(u)) = E$

si $P \times Q(u) = 0$

$$\Rightarrow E = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$$

→ Généralisé: $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{K}[x]$, 2 à 2 premiers entre eux

$$\text{Ker}((Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_m)(u)) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(Q_i(u))$$

en particulier, si $(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_m)(u) = 0$

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}(\Phi_i(u)).$$

-Th: u est diagonalisable

ssi $\odot u$ admet un polynôme annulateur à racines simples

$\odot m_u$ scindé à racines simples
 $\downarrow$
polynôme minimal

Δ : F sev de E , F stable par u

si u est diagonalisable alors $u|_F$ est diagonalisable

* Endomorphismes et matrices trigonalisables:

u trigonalisable ssi $\odot \exists B$ base de E tq =

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ est } \underline{\text{triangulaire sup.}}$$

$\odot \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), T = \text{triangulaire sup.} = A = P T P^{-1}$

$\odot \chi_A$ scindé

$\odot A$ admet polynôme annulateur scindé

$\odot m_A$ scindé

$\swarrow$
 $\begin{matrix} A \\ \text{trigonalisable} \\ \text{(matrice)} \end{matrix}$

Δ : u trigonalisable: $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ de E tq =

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} f(e_1) & & f(e_n) \\ \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

$\odot e_1$ est un vect propre.

$\odot u$ admet au moins une vp.

$$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i); \quad S_p(u) = \{ \alpha_i \}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(u) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \\ \det(u) &= \prod_{i=1}^n \alpha_i \end{aligned} \quad \Delta$$