

Espace préhilbertien - euclidien :

① Produit scalaire : $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
 $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$

② φ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

③ φ est bilinéaire $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E, \alpha \in \mathbb{R} :$

$$\begin{cases} \varphi(\alpha x + y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \varphi(y, z) & \text{linéaire \% 1^{ère} variable} \\ \varphi(x, \alpha y + z) = \alpha \varphi(x, y) + \varphi(x, z) & \text{linéaire \% 2^{ème} variable} \end{cases}$$

④ φ positive $\Leftrightarrow \forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$

⑤ φ définie $\Leftrightarrow \forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

* Espace préhilbertien réel = $(E, \varphi) : \text{espace vectoriel } E \text{ muni d'un produit scalaire.}$
 $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle = (x/y) = x \cdot y$

* Espace euclidien = espace préhilbertien réel de dim finie.

→ Exemples : $E = \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \left\{ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{produit scalaire usuel sur } \mathbb{R}^n \right.$$

$$E = M_{n,p}(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}(t_A B)$$

$$E = \mathbb{R}[x], \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

①

* Inégalité de Cauchy Schwarz : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

→ Cas d'égalité : $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ ssi : (x, y)

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } y = \alpha x \text{ ou } x = \alpha y$$

* Inégalité triangulaire (Minkowski) :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \text{ssi : } \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } y = \alpha x \text{ ou } x = \alpha y$$

(positivement liés)

* Norme euclidienne : $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) : \text{identité de Plücker}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \right\} \text{identité de polarisation}$$

2) Orthogonalité :

○ x et y sont orthogonaux $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

○ $\{x_i, i \in I\}$ famille des vecteurs est orthogonale $\Leftrightarrow$

$$\forall i, j \in I, i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = 0. \quad \text{les vecteurs sont 2 à 2 orthogonaux.}$$

○ x est unitaire $\Leftrightarrow \|x\| = 1$

○ $\{x_i, i \in I\}$ est orthonormé $\Leftrightarrow \forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{ij}$

- famille orthogonale + vecteurs $\neq 0 \Rightarrow$ libre
- famille orthonormée $\Rightarrow$ libre 

* Th de Pythagore :

- $x, y \in E, \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

- $\{u_1, \dots, u_n\}$ est orthogonal alors : $\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$

* Orthogonal d'une partie / sev = (A partie $\neq \emptyset$ de E)

$$A^\perp = \{x \in E / \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\} = \text{orthogonal de A}$$

→ Par convention  : si $A = \emptyset \Rightarrow \emptyset^\perp = \{0\}$ sev de E.

- $A^\perp$ sev de E et $A^\perp = (\text{vect}\{A\})^\perp$

- si $F = \text{vect}\{e_1, \dots, e_p\}$ sev de E alors :

$$F^\perp = \{x \in E / \langle x, e_i \rangle = 0, \forall 1 \leq i \leq p\}$$

- $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$

- $F \oplus F^\perp$

- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

- $A \subset (A^\perp)^\perp$

- $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et : $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

* Sev ortho / supp. ortho :

- F et G sont orthogonaux ssi : $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$

- F et G sont supp. orthogonaux ssi : $\begin{cases} F \oplus G = E \\ F \text{ et } G \text{ sont ortho} \end{cases}$

on note : $F \oplus^\perp G = E$

① F et G ortho $\Rightarrow F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$

② F et G supp. ortho $\Rightarrow F = G^\perp$ et $G = F^\perp$

$\rightarrow$ Généralisation :

① $F_1, \dots, F_p$ a.a. ortho $\forall i, j \in \{1, \dots, p\} \ (i \neq j)$ F_i et F_j ortho

② $F_1, \dots, F_p$ supp. ortho $\forall i = \bigoplus_{i=1}^p F_i = E$ } on note :
 $F_1, \dots, F_p$ a.a. ortho $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$

⚠ : si $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, $\forall x_i \in F_i \setminus \{0\} \Rightarrow \{x_1, \dots, x_p\}$ libre

si de plus $= \bigoplus_{i=1}^p F_i = E$ et B_i base de F_i (des vecteurs ortho)

alors $B = \bigcup_{i=1}^p B_i$ b.e.n adaptée à la décomposition.
(base orthonormée)

③ F de dim finie = alors $\begin{cases} F \oplus F^\perp = E \Leftrightarrow (F^\perp \oplus F = E) \\ \text{et } F = F^{\perp\perp} \end{cases}$
(sev de E)

$\rightarrow$ Conséquence : en espace euclidien $= \forall F$ sev de E

on a $F \oplus F^\perp = E$ et $F = F^{\perp\perp}$.

④ $B = (e_1, \dots, e_p)$ b.e.n de E , $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ tq :

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i}_{x_1 \in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i}_{x_2 \in F^\perp}$$

⑤ Projecté orthogonale : (Projection) :

$$P_F : E \rightarrow E$$

$x = x_F + x_{F^\perp} \rightarrow x_F = P_F(x)$ } projecté orthogonale sur F
 $\Rightarrow$ endo de E tq $\boxed{P_F^2 = P_F}$

⑥ $\forall x \in E$, $x = x_F + x_{F^\perp}$ ($F \oplus F^\perp = E$)

$$\Rightarrow P_F(x) = x_F \quad (\text{façon unique}) \Rightarrow x = P_F(x) + P_{F^\perp}(x)$$

$$\textcircled{2} \forall x \in E, \begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$$

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + p_{F^\perp}(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \quad (\text{Pythagore})$$

$$\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2$$

$$\textcircled{3} \text{ si } B = (e_1, \dots, e_p) \text{ b.o.n. de } F \text{ alors } \forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

Δ : E espace euclidien, $F = \langle a \rangle^\perp$ est un hyperplan car:

$$\begin{cases} \langle a \rangle^\perp \oplus \langle a \rangle = E \\ \dim \langle a \rangle^\perp = n-1 \end{cases}$$

$\textcircled{4}$ Orthogonalisation = (Procédé de Schmidt) E espace euclidien

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E \leadsto B' = (v_1, \dots, v_n)$ b.o.n. de E

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \text{ et } v_{i+1} = \frac{e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, v_k \rangle v_k}{\|e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1}, v_k \rangle v_k\|}$$

$\textcircled{5}$ toute espace euclidien admet une b.o.n.

$\textcircled{6}$ toute famille orthoormé $\leadsto$ compléter en b.o.n.

$$\textcircled{7} B = (e_1, \dots, e_n) \text{ b.o.n. de } E \text{ et } \begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \end{cases}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$j \text{ fixe, } \langle x, e_j \rangle = x_j$$

$$\Delta: x = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle x, e_i \rangle}_{x_i} e_i$$

$$\textcircled{8} \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2 = \text{Inégalité de Bessel.}$$



⑤ Distance à un sev = F sev de dim finie.

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \min_{y \in F} \|x - y\| = \|x - P_F(x)\| = \|P_{F^\perp}(x)\|$$

↳ distance de x à F ♥

① $B = (e_1, \dots, e_p)$ b.o.n de F , $\forall x \in E$,

$$d(x, F) = \|x - P_F(x)\| = \left\| x - \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i \right\| = \|P_{F^\perp}(x)\|.$$

② $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dite famille totale si $F = \text{vect}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E . c.a.d. : $\bar{F} = E$

c.a.d. : $\forall x \in E, \exists (x_n) \in F$ tq =

$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in F$ tq $\|x - y\| \leq \varepsilon$. $(x_n \rightarrow x$ pour la $\|\cdot\|$ associée au p.s.)

③ $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ f. totale, $F = \text{vect}\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$

$F_n = \text{vect}\{e_0, \dots, e_n\}$ (finie)

P_n : proj. ortho sur F_n alors $P_n(x)$ c.v vers x $\forall x \in E$.

si de + f. orthonormée, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ ($P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$)

$$\Rightarrow x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

→ conséquences = $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ f. totale orthonormée ($F_n = \text{vect}\{e_0, \dots, e_n\}$ P_n proj. orth sur F_n)

$$④ P_n(x) = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

$$⑤ d(x, F_n) = \|x - P_n(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = (\text{reste de la série})$$

$$⑥ \|P_n(x)\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2 \rightsquigarrow \left\| \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \langle x, e_k \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|^2$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle^2$$

⑥ Endomorphisme symétrique: E espace euclidien

⑦ u est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$
($u \in \mathcal{L}(E)$)

⚠ p projecteur de E : p symétrique $\Leftrightarrow p$ proj orthogonale

⑧ $S(E)$: l'ensemble des endo-symétriques.

* $u \in S(E)$, F sev de E , F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u .

* $\text{Im}(u) = (\ker u)^\perp$ et $\ker(u) = (\text{Im } u)^\perp$

* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in S_p(u)$, $E_{\alpha_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\alpha_p}(u)$
($\alpha_i \neq \alpha_j$)

* B b.i.e.n de E , $x, y \in E$
 $B = (e_1, \dots, e_n)$ $\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\langle x, y \rangle_E = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^n} = t_{xy}$
 $M_B(x) = X$, $M_B(y) = Y$

* $B = (e_1, \dots, e_n)$ b.i.e.n de E , $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_B(u)$
 $u \in S(E) \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$.

* Lemme: $E \neq 0$, $u \in S(E)$ alors χ_u est scindé dans $\mathbb{R}$

⚠ Th spectrale: $u \in S(E)$, alors u est diag dans une b.i.e.n (c.a.d: admet une b.i.e.n de $\vec{v}_p$)

↪ Version matricielle: $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors A diag dans B b.i.e.n
 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P D P^{-1}$
 $D \in D_n(\mathbb{R})$ les colonnes de P forment une b.i.e.n ♥

⚠: Ce th est faux dans $M_n(\mathbb{C})$.

⊕ Endomorphisme orthogonal, matrices orthogonales :

⊙ $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si : $t_{AA} = A^t A = I_n$
c.à.d. : A inversible et $A^{-1} = t_A$

$O_n(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices orthogonales.

⊙ $O_n(\mathbb{R})$ est s. groupe de $(G_n(\mathbb{R}), \times)$

⊙ $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ les vecteurs lignes/colonnes de A forment une b.o.n de $\mathbb{R}^n$.

⚠: $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists D$ diagonale
 $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq : $A = P D t_P$

⊙ $A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1, 1\}$

→ $\det(A) = 1$: A orthogonale positive $\in SO_n(\mathbb{R})$
→ $\det(A) = -1$: A orthogonale négative.

⚠: $SO_n(\mathbb{R})$ s. groupe de $O_n(\mathbb{R}) =$ groupe spécial orthogonal.

⊙ $B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de E , $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ famille de E
 $\Rightarrow B'$ est b.o.n de E si : $M_B(B') \in O_n(\mathbb{R})$.

⚠: si B et B' b.o.n alors $P_{B \rightarrow B'}$, $P_{B' \rightarrow B} \in O_n(\mathbb{R})$.

⊙ u endo orthogonale ou isométrie si :
 $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$, $u \in O(E) =$ ensemble des isométries

⊙ $u \in O(E)$ alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.

⚠: $0 \notin Sp(u) \Rightarrow u$ bijectif (dim finie)
 $\Rightarrow u$: automorphisme orthogonal.

○ $u \in O(E) \equiv u$ conserve la norme

$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \equiv u$ conserve le produit scalaire

○ $B = (e_1, \dots, e_n)$ b.i.e.n de E .

$u \in O(E) \Leftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est b.i.e.n.

$\Leftrightarrow M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$: matrice orthogonale



soit $A \in O_2(\mathbb{R})$ tq $\boxed{\det(A) = 1}$

$\exists! \theta$ tq $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \underbrace{R(\theta)}_{\text{rotation d'angle } \theta}$

soit $A \in O_2(\mathbb{R})$ tq $\boxed{\det(A) = -1}$

$\exists! \theta$ tq $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \underbrace{S(\theta)}_{\text{symétrie orthogonale}}$

○ F stable $\Rightarrow F^\perp$ stable

F stable $\Rightarrow u(F) = F = u$ automorphisme

○ $\dim(E)$: finie, $E \neq 0$, $u \in \mathcal{L}(E)$

$\exists$ au moins une droite vectorielle ou plan stable par u .

(3)

○ E euclidien, $\exists B$: b.o.n de E tq =

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & R(\theta_1) \\ & & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & R(\theta_p) \end{pmatrix}$$

avec $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$