

- Rappel = (1^{ère} année)

Séries numériques

⊗ $\sum u_n$ c.v $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (réciproque fausse)

⊗ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$: $\sum u_n$ diverge grossièrement.

⊗ $\sum u_n$ à termes ≥ 0 : $\begin{cases} \sum u_n \text{ c.v} \Leftrightarrow (S_n) \text{ majorée} \\ \sum u_n \text{ div} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \end{cases}$

⊗ $\sum |u_n|$ c.v $\Rightarrow \sum u_n$ c.v (réciproque fausse)
 $\Rightarrow \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$

⊗ $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ c.v $\Leftrightarrow$ la suite (a_n) c.v.

$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \right) - a_0$

⚠ série télescopique ↗

⊗ $\sum_{n \geq 0} z^n$ $\begin{cases} \text{abs c.v (donc c.v) pour } |z| < 1 \\ \text{div. gross pour } |z| \geq 1 \end{cases}$

⚠ série géométrique ↗

• pour $|z| < 1$: $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$

⊗ $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ c.v si $\alpha > 1$: ⚠ série de Riemann

⊗ $0 \leq u_n \leq v_n$ $\begin{cases} \sum v_n \text{ c.v} \Rightarrow \sum u_n \text{ c.v} \\ \sum u_n \text{ div} \Rightarrow \sum v_n \text{ div} \end{cases}$

$$\textcircled{*} \begin{cases} U_n = \theta(V_n) \\ U_n = o(V_n) \end{cases} \begin{cases} \rightarrow \sum V_n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.} \\ \rightarrow \sum V_n \text{ div.} \Rightarrow \sum U_n \text{ div.} \end{cases}$$

$V_n \geq 0$

$$\textcircled{*} U_n \sim V_n \rightarrow \sum U_n \text{ et } \sum V_n \text{ ont la m\^eme nature}$$

$U_n \geq 0 \text{ et } V_n \geq 0$

*** Règle d'Alembert :** $U_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = l$$

$l \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$

- $\xrightarrow{l < 1} \Rightarrow \sum U_n \text{ abs. c.v.} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.}$
- $\xrightarrow{l > 1} \Rightarrow \sum U_n \text{ div., gross.}$
- $\xrightarrow{l = 1} \Rightarrow \text{pas de conclusion}$

*** série exponentielle :** $\forall z \in \mathbb{C}, \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}}_{\text{est abs c.v. (donc c.v.)}}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

*** Règle "n^α. U_n" :** $\sum U_n \geq 0$

- $\rightarrow \exists \alpha > 1 / \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \cdot U_n = l \in [0, +\infty[\Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.}$
- $\rightarrow \exists \alpha \leq 1 / \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \cdot U_n = l \in]0, +\infty] \Rightarrow \sum U_n \text{ div.}$

* Série alternée :

$\sum U_n$ est alternée ssi : $U_n = (-1)^n \cdot v_n$

↳ garde signe fixe $\forall n$

⚠ : CSSA : $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq n_0} U_n \text{ alternée} \\ (|U_n|) \text{ est } \downarrow \text{ de limite } = 0 \end{array} \right.$

alors :

- $\sum U_n$ c.v
- $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ a m même signe que $U_0 \Rightarrow |S| \leq |U_0|$
- $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$ a m même signe que $U_{n+1} \Rightarrow |R_n| \leq |U_{n+1}|$

* Comparaison série - intégrale :

soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{c.p.m} \\ \geq 0 \text{ et } \downarrow \end{array} \right.$

→ soit $p \geq a$ et $v_n = \underbrace{\int_{n-1}^n f(t) dt}_{\sum v_n \text{ c.v } \forall n \geq p+1} - f(n)$

→ $\sum_{n \geq p} f(n) \text{ c.v} \Leftrightarrow f \text{ int sur } [a, +\infty[$.

* Série produit de Cauchy : $\sum_{n \geq 0} v_n$

tg :
$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

⊗ si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont abs. c.v $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} w_n$ c.v

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right)$$

* Somme des relations de comparaison :

1/ $\sum v_n$ c.v a' termes ≥ 0 :

$$\odot U_n = o(v_n) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

$$\odot U_n = O(v_n) \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

$$\odot U_n \sim v_n \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

2/ $\sum v_n$ div a' termes ≥ 0 :

$$\odot U_n = o(v_n) \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

$$\odot U_n = O(v_n) \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

$$\odot U_n \sim v_n \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$$