

- Déf: f c.p.m. $I = [a, b[$

on pose: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$\int_a^b f$ c.v. ssi: $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \underline{l \in \mathbb{K}} = \int_a^b f.$

Δ : mq convergence
+ calcul de
valeur

- Déf: f c.p.m. $I =]a, b]$

on pose: $F(x) = \int_x^b f(t) dt$

$\int_a^b f$ c.v. ssi: $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \underline{l \in \mathbb{K}} = \int_a^b f.$

Intégration

- Prop: f : fct positive: $I = [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$

on pose: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$\int_a^b f$ c.v. ssi: F majorée sur $[a, b[$.

Δ : pour les fct
(+)
(convergence)

- Prop: encadrement des fct:

$$\begin{array}{c} \text{c.v.} \Leftarrow \text{c.v.} \\ 0 \leq \underbrace{f}_{\downarrow \text{d.v.}} \leq \underbrace{g}_{\downarrow \text{d.v.}} \\ \text{d.v.} \Rightarrow \text{d.v.} \end{array}$$

- Déf: f int sur I ssi: $\int_I |f|$ c.v.

f int sur $I \Rightarrow \int_I f$ c.v. $\Leftrightarrow$ (si $f \geq 0$)

- Prop: $\left\{ \begin{array}{l} f =_b \Theta(g) \\ f =_b o(g) \end{array} \right\} g \text{ int} \Rightarrow f \text{ int sur } [a, b[.$

Δ : mq fct
intégrable

$f \sim g : f \text{ int} \Leftrightarrow g \text{ int sur } [a, b[.$

- Exemples de Riemann: Δ : exemples de référence

1) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ int sur $[1, +\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1$

2) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ int sur $]0, 1] \Leftrightarrow \alpha < 1$

3) $f(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ int sur $]a, a+1] \Leftrightarrow \alpha < 1$

4) $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ int sur $[b-1, b[\Leftrightarrow \alpha < 1$

des règles de Riemann:

1) $x^\alpha \cdot f(x)$ en $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{*} \exists \alpha > 1 \text{ tq: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot f(x) = l \in [0, +\infty[\\ f \in \mathcal{EM}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+) \Rightarrow f \text{ int sur } [a, +\infty[\\ \textcircled{*} \exists \alpha \leq 1 \text{ tq: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot f(x) = l \in]0, +\infty] \\ \Rightarrow f \text{ n'est pas int} \end{array} \right.$$

2) $x^\alpha \cdot f(x)$ en 0^+ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{*} \exists \alpha < 1 \text{ tq: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot f(x) = l \in [0, +\infty[\\ f \in \mathcal{EM}(]0, b], \mathbb{R}_+) \Rightarrow f \text{ int sur }]0, b]. \\ \textcircled{*} \exists \alpha \geq 1 \text{ tq: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot f(x) =]0, +\infty[\\ \Rightarrow f \text{ n'est pas int sur }]0, b] \end{array} \right.$$

3) $(x-a)^\alpha \cdot f(x)$ en a^+ :

$f \in \mathcal{EM}([a, b], \mathbb{R}_+)$:

- $\circledast \exists \alpha < 1$ tq: $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\alpha \cdot f(x) = \ell \in [0, +\infty[$
 $\Rightarrow f$ int sur $[a, b]$
- $\circledast \exists \alpha \geq 1$ tq: $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\alpha \cdot f(x) = \ell \in]0, +\infty]$
 $\Rightarrow f$ n'est pas int sur $[a, b]$.

4) $(b-x)^\alpha \cdot f(x)$ en b^- :

$f \in \mathcal{EM}([a, b[, \mathbb{R}_+)$:

- $\circledast \exists \alpha < 1$ tq: $\lim_{x \rightarrow b^-} (x-b)^\alpha \cdot f(x) = \ell \in [0, +\infty[$
 $\Rightarrow f$ int sur $[a, b[$
- $\circledast \exists \alpha \geq 1$ tq: $\lim_{x \rightarrow b^-} (x-b)^\alpha \cdot f(x) = \ell \in]0, +\infty]$
 $\Rightarrow f$ n'est pas int sur $[a, b[$

- Déf :

$f \in \mathcal{EM}([a, b[, \mathbb{R})$

$\varphi: [\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$
 $t \mapsto x = \varphi(t)$

Δ : Changement de variable.

continue, bijective, de $\mathcal{C}^1$

$\circledast f$ int sur $[a, b[$ ssi : $t \mapsto f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ int sur $[\alpha, \beta[$

$\circledast \int_a^b f(x) dx$ c.v ssi : $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$ c.v

=

- Déf: $f, g: [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ de $\mathcal{E}^1$

○ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{K}$

⚠: intégration par partie:

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b f' \cdot g}_{\text{c.v}} = \underbrace{[f \cdot g]_a^b}_{\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)} - \underbrace{\int_a^b f \cdot g'}_{\text{c.v}}$$

○ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{K} \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \cdot g(x) \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_a^b f' \cdot g}_{\text{c.v}} = \underbrace{[f \cdot g]_a^b}_{\lim_{x \rightarrow b^-} f \cdot g - \lim_{x \rightarrow a^+} f \cdot g} - \underbrace{\int_a^b f \cdot g'}_{\text{c.v}}$$

Prop: $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$, $\int_a^b f$ c.v

$F(x) = \int_x^b f(t) dt$ de classe $\mathcal{E}^1$ et $\begin{cases} F'(x) = -f(x) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = 0 \end{cases}$

⚠: $\lim_{\substack{x \rightarrow b^- \\ y \rightarrow b^-}} \int_x^y f = 0$

$f:]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$, $\int_a^b f$ c.v

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$ de classe $\mathcal{E}^1$ et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$

- Prop: $f \geq 0$ et int sur I si $\int_I f = 0 \Rightarrow f = 0$

- Notations: $L^1(I, \mathbb{K}) : \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{K}) \text{ tq: } f \text{ est int sur } I \\ \downarrow \mathbb{K} \text{ e.v} \end{array} \right\}$

$L^2(I, \mathbb{K}) : \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{K}) \text{ tq: } f^2 \text{ est int sur } I \\ \downarrow \mathbb{K} \text{ e.v} \end{array} \right\}$

Δ : ensemble des fcts int:

① si $f, g \in L^2(I, \mathbb{K}) \longrightarrow f \cdot g \in L^1(I, \mathbb{K})$

② $\forall f, g \in L^2(I, \mathbb{K}) \longrightarrow \left| \int_I f \cdot g \right| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \times \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}$

$I = [a, b[$ et g int sur $[a, b[$ et $g \geq 0$:

① $f = 0 \Rightarrow \int_x^b f = 0 \Rightarrow \int_x^b g$

② $f = 0 \Rightarrow \int_x^b f = 0 \Rightarrow \int_x^b g$

③ $f \sim g \Rightarrow \int_x^b f \sim \int_x^b g$

si $I =]a, b]$

$\int_x^b \Rightarrow \int_a^x$
devient

$I = [a, b[$ et g non int sur $[a, b[$ et $g \geq 0$:

① $f = 0 \Rightarrow \int_a^x f = 0 \Rightarrow \int_a^x g$

② $f = 0 \Rightarrow \int_a^x f = 0 \Rightarrow \int_a^x g$

③ $f \sim g \Rightarrow \int_a^x f \sim \int_a^x g$

si $I =]a, b]$

$\int_a^x \Rightarrow \int_x^b$
devient