

Espaces vectoriels normés

* Norme: $N: E \rightarrow [0, +\infty[$

$$x \mapsto N(x) \text{ ou } \|x\|$$

$\|x\|$ est une norme si:

$$\odot \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\odot \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\odot \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

→ le couple $(E, \|\cdot\|)$ K.e.v normés.

→ si $\|x\| = 1$ alors x est unitaire.

Prop =

$$\odot \|-x\| = \|x\| \text{ et } \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\odot \forall x_1, \dots, x_n \in E, \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

$$\odot \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x+y\|$$

* Distance: $d: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$
 $(x, y) \mapsto d(x, y)$

$d(x, y)$ est une distance si:

$$\odot d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\odot d(x, y) = d(y, x)$$

$$\odot d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

→ Distance associée à une norme =

$$d: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$$

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

* Boules / sphère:

$$\odot a \in E, r > 0: B(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| < r\}$$

↳ boule ouverte de centre a et rayon r

(1)

$$\odot \bar{B}(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| \leq r\}$$

↳ boule fermée de centre a et rayon r

$$\odot S(a, r) = \{x \in E / \|x - a\| = r\}$$

↳ sphère de centre a et rayon r

* Partie convexe = $A \subset E$

A est une partie convexe de E si:

$$\forall x, y \in E, t \in [0, 1] \text{ on a:}$$

$$\boxed{(tx + (1-t)y) \in A}$$

⊙ toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

* Partie bornée =

⊙ $A \subset E$, A est une partie bornée

de $(E, \|\cdot\|)$ si: $\exists M > 0$ tq =

$$\forall x \in A, \boxed{\|x\| \leq M = \text{cte}}$$

⊙ une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si:

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall n: \boxed{\|U_n\| \leq M}$$

⊙ $f: A \rightarrow E$ est une fct bornée si:

$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$ est une partie

bornée de $E \Rightarrow \exists M > 0 / \boxed{\|f(x)\| \leq M}$
 $\forall x \in A$

Notation:

→ * $\mathcal{F}(A, E) = \{f: A \rightarrow E\}$ ensemble des app de A dans E : e.v de E

* $B(A, E) = \{f: A \rightarrow E / f \text{ est bornée}\}$

↳ s. e.v de E

$$\forall f \in B(A, E): \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$$

$$\text{et } \|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

$\|\cdot\|_{\infty}$: la norme de la convergence uniforme.

* Produit scalaire: $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

sur $\mathbb{R}$:

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

φ est un produit scalaire si:

$$\varphi(x, y + \lambda z) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z)$$

linéaire % 2^{ème} place

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

linéaire % 1^{ère} place

$$\varphi(x, x) \geq 0$$

$$\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Notation:

$$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$$

→ le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: espace préhilbertien réel (ou eulidien si $\dim(E)$ finie)

sur $\mathbb{C}$: $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) \text{ vérifiant:}$$

$$\varphi(x, y + \lambda z) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z)$$

linéaire % 2^{ème} place

$$\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

$$\varphi(x, x) \geq 0 \text{ et si } \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

→ le couple $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: espace préhilbertien complexe (ou hermitien si $\dim(E)$ finie)

$$\Delta: \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}: \langle \alpha x, \beta y \rangle = \bar{\alpha} \beta \langle x, y \rangle$$

semi-linéaire % 1^{ère} place

* Produits scalaires usuelles:

sur $\mathbb{R}^n$: $E = \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)$
 $Y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{et } \langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i)^2$$

sur $\mathbb{C}^n$: $E = \mathbb{C}^n$, $Z = (z_1, \dots, z_n)$
 $Z' = (z'_1, \dots, z'_n)$

$$\langle Z, Z' \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i z'_i$$

$$\text{et } \langle Z, Z \rangle = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$$

sur $C([a, b], \mathbb{K})$: ensemble des app $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} \cdot g(t) dt$$

et:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$

* Inégalité de Cauchy-Schwarz:

soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e.p. réel ou complexe:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

* Norme associée à un produit scalaire

soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, l'app:

$$x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

(Identité de Plüger =

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

* Normes usuelles:

sur $\mathbb{K}^n$: $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| : \text{norme } \Sigma$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} : \text{norme eulidienne}$$

$$\|X\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| : \text{norme sup}$$

- sur $C([a, b], \mathbb{K})$:
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ = norme de la convergence en moyenne.
 - $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ = norme de la convergence en moyenne quadratique
 - $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$ = norme de la convergence uniforme

* Comparaison des normes =

N_1 et N_2 2 normes sur E .

N_1 et N_2 sont équivalentes si:

il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tq: $\forall x \in E$:

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Notation: $N_1 \sim N_2$

$N_1 \sim N_2 \Leftrightarrow N_2 \sim N_1$

$\left. \begin{array}{l} N_1 \sim N_2 \\ N_2 \sim N_3 \end{array} \right\} N_1 \sim N_3$

$N_1 \sim N_2$ si: $\exists \alpha > 0$ tq $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $\beta > 0$

$$\alpha \leq \frac{N_2(x)}{N_1(x)} \leq \beta$$

Δ : si $\exists (x_n)$ suite d'elt dans $E \setminus \{0\}$

$$\text{tq } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = 0 \text{ ou } +\infty$$

$$\Rightarrow N_1 \not\sim N_2$$

* Suites dans (E, v, n) :

U_n est c.v si: $\exists l \in E$ tq:

$$\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq p, \|U_n - l\| \leq \epsilon$$

$$\text{Notation: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l.$$

(U_n) c.v vers l si: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_n - l\| = 0$.

Toute suite (U_n) est c.v dans $(E, \|\cdot\|)$ est bornée.

si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et (U_n) c.v vers l par $\|\cdot\|_1 \Rightarrow (U_n)$ c.v vers l par $\|\cdot\|_2$.

* Opérations sur les suites =

si (U_n) c.v vers l_1 et (V_n) c.v vers l_2
 $\Rightarrow (U_n + V_n)$ c.v vers $l_1 + l_2$
 c.a.d: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n + V_n = l_1 + l_2$

si (U_n) c.v vers l alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
 (λU_n) c.v vers λl .

si (U_n) c.v vers l et (λ_n) suite de $\mathbb{K}$
 c.v vers $\lambda \Rightarrow (\lambda_n U_n)$ c.v vers λl .

* Suites extraites =

(V_n) est une suite extraite de (U_n) (sous suite)

si: $\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $\nearrow$ et
 $n \mapsto \varphi(n)$ $V_n = (U_{\varphi(n)})$

Δ : $\varphi(n) \geq n \forall n$.

si (U_n) c.v vers l alors $(U_{\varphi(n)})$ c.v vers l .

(U_n) c.v vers l si: (U_{2n}) et (U_{2n+1}) c.v vers l .

* Valeur d'adhérence =

$l \in E$ est une v. d'adhérence ssi :
 $\exists (U_n) = (U_{\varepsilon(n)})$ c.v. de (U_n) tq :
 (U_n) c.v. vers l .

⚠ : si (U_n) c.v. vers l alors l est la seule v. d'adhérence de (U_n) .

Topologie :

* Ouvert / fermé :

⊙ $\emptyset$ est appelé ouvert de E ssi : $\emptyset = \emptyset$
 ou $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0 / B(x, r) \subset \emptyset$.

⊙ $F \subset E$ est appelé fermé de E ssi :
 $C_E^F = \{x \in E / x \notin F\}$ est un ouvert.

⚠ : $\emptyset$ et E sont ouverts et fermés.

⊙ toute boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert de E .

⊙ toute boule fermée $\bar{B}(a, r)$ est un fermé de E .

⊙ pour $r = 0$: $\bar{B}(a, r) = \{a\}$
 $\rightarrow \{a\}$ est un fermé.

- Prop :

1/ $\cup$ qlq d'ouvert est un ouvert.

2/ $\cap$ fini d'ouvert est un ouvert.

3/ $\cap$ qlq de fermé est un fermé

4/ $\cup$ fini de fermé est un fermé.

⚠ : toute ensemble fini est un fermé

⊙ toute sphère $S(a, r)$ est un fermé.

* Intérieur d'une partie = $A \subset E$

⊙ $x \in E$ est un pt intérieur de A ssi :
 $\exists r > 0 / B(x, r) \subset A$

⊙ $\bar{A} = \{x \in E / x \text{ pt intérieur de } A\}$
 $\hookrightarrow$ intérieur de A

- Prop :

1/ $\bar{A} \subset A$

2/ $\bar{A}$ est un ouvert de E .

3/ $\bar{A}$ est le plus grand ouvert $\subset A$.

4/ A ouvert de $E \Leftrightarrow \bar{A} = A$.

* Adhérence d'une partie = $A \subset E$

⊙ $x \in E$ un pt adhérent à A ssi :
 $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

⊙ $\bar{A} = \{x \in E / x \text{ pt adhérent à } A\}$
 $\hookrightarrow$ adhérence de A .

- Prop :

1/ $C_E^{\bar{A}} = \overset{\circ}{C}_E^A$ et $C_E^A = \overline{C_E^{\bar{A}}}$.

2/ $A \subset \bar{A}$

3/ $\bar{A}$ est un fermé de E .

4/ $\bar{A}$ le plus petit fermé $\subset A$.

5/ A est fermé $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.

- partie dense :

A est dense ssi : $\bar{A} = E$

- frontière de A : $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{C_E^A}$
 $\hookrightarrow$ est tj fermé de E

$Fr(A) = \{x \in \bar{A} \text{ tq : } x \notin A\}$

⚠ : $\bar{A} \subset A \subset \bar{A}$

* Caractérisation avec les suites :

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) / \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$
de A

A fermé de $E \Leftrightarrow \forall (a_n)$ de A c.v
on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in A$.

A dense dans $E \Leftrightarrow \exists (a_n)$ de A tq :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x \quad \forall x \in E$.

- voisinage de x_0 :

$\forall$ voisinage de x_0 $\Leftrightarrow \exists r > 0 / B(x_0, r) \subset V$.

$\mathcal{V}(x_0) = \{ V \subset E / V \text{ voisinage de } x_0 \}$

- ouvert relatif : $A \subset E$

$X \subset A$, ouvert de A $\Leftrightarrow$

$X = A \cap \theta / \theta$ ouvert de E

- fermé relatif : $A \subset E$

$X \subset A$, fermé de A $\Leftrightarrow$

$X = A \cap F / F$ fermé de E .

⚠ : X ouvert de $E \Rightarrow X$ ouvert de A
($A \subset E, X \subset A$)

* Partie compacte : $A \subset E$

A est dite compacte de E $\Leftrightarrow$

$\forall (a_n)$ de A admet $(a_{\varphi(n)})$ c.v et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} \in A$

A compacte $\begin{cases} \text{fermée} \\ + \\ \text{bornée.} \end{cases}$

A compact de E $\Leftrightarrow \exists B$ fermé de $A \rightarrow B$ compact de E .

A compact de $E, (a_n)$ de A c.v $\Leftrightarrow$ elle admet une seule valeur d'adhérence.

* Produit fini d'e.v.n :

$(E_1, N_1), (E_2, N_2) \dots (E_p, N_p) p \in \mathbb{N}$

$E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \quad K \text{ e.v}$

$\forall x \in E, x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ on pose :

$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^p N_k(x_k)$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p (N_k(x_k))^2}$

$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k)$

* limites :

$f: A \rightarrow F, f$ admet une limite en a $\Leftrightarrow \exists l \in F$ tq :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$

Notation :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)$ de $A /$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

Opérations :

1/ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|l\|$

2/ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = 0$.

3/ $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \end{matrix} \right\} \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = l + l'$

4/ $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = \alpha \in K \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \end{matrix} \right\} \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = \alpha l$

5/ $\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 0 \\ f \text{ bornée} \end{matrix} \right\} \lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) f(x) = 0$

→ Composition des limites =

$$f: A \rightarrow F \quad B \subset F$$

$$g: B \rightarrow G \quad f(A) \subset B$$

$$g \circ f: A \rightarrow G$$

si:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = l \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l.$$

→ Comparaison des fcts:

$$f: A \rightarrow F$$

$$g: A \rightarrow G$$

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \exists M > 0, \exists r > 0 /$$

$$\forall x \in A \cap B(a, r): \|f(x)\| \leq M \|g(x)\|$$

⚠: si $g(x) \neq 0$ alors: $\frac{f}{g}$ bornée

$$f \underset{a}{\sim} 0(g) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 /$$

$$\forall x \in A \cap B(a, r), \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$$

⚠: si $g(x) \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$

$$f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{\sim} 0(g)$$

⚠: si $g(x) \neq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

* Continuité:

$$f: A \rightarrow F, f \text{ continue en } a \text{ si:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (x_n) \text{ de } A /$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a: \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$$

Notation: $\mathcal{C}(A, F) = \{f: A \rightarrow F / f \text{ continue sur } A\}$

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A, \mathbb{K}).$$

- Prop:

$$1/ f \in \mathcal{C}(A, F) \text{ sur } \mathbb{K} \text{ e.v}$$

$$2/ f \in \mathcal{C}(A) \text{ sur } \mathbb{K} \text{ alg\`ebre (2\`eme loi "x")}$$

$$3/ \text{si } f \in \mathcal{C}(A) \text{ et } g \in \mathcal{C}(A, E) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{C}(A, E).$$

$$4/ \text{si } f \in \mathcal{C}(A) \text{ et } f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{C}(A)$$

$$5/ f \in \mathcal{C}(A, F), B \subset F, g \in \mathcal{C}(B, G), f(A) \subset B \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{C}(A, G).$$

$$6/ f, g: E \rightarrow F \text{ 2 fcts continues si } A \text{ dense dans } E \text{ alors } f = g.$$

* App lipschitzienne:

$$f: A \rightarrow F \text{ app lip sur } A \text{ si:}$$

$$\exists K \geq 0 \text{ tq: } \forall x, y \in A \text{ on a:}$$

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E$$

Prop: f lip sur $A \Rightarrow f$ continue sur $A.$

- Distance d'un pt a une partie =

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\| / a \in A \} \in \mathbb{R}_+$$

continue sur $E.$

* App uniform\`ement continue u.c.:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x, y \in A \text{ on a:}$$

$$\|x - y\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

- Prop =

$$1/ f \text{ lip sur } A \Rightarrow f \text{ u.c sur } A.$$

$$2/ f \text{ u.c sur } A \Rightarrow f \text{ continue sur } A$$

$$3/ (a_n), (b_n) \text{ de } A / \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n = 0$$

$$\text{alors } f(a_n) - f(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0: f \text{ u.c}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) - f(b_n) = 0$$

Théorème de Heine :

$f: A \rightarrow F$ continue sur A alors :
compact $\Rightarrow f$ est u.c sur A .

* App linéaire - bilinéaire :

$f: E \rightarrow F$ app linéaire est continue

sur E si : $\exists c > 0 / \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq c \|x\|_E$

→ Notation :

$\mathcal{L}_c(E, F) = \{ f: E \rightarrow F / f \text{ linéaire + continue} \}$
 $\mathcal{L}_c(E) = \{ f: E \rightarrow E / f \text{ linéaire + continue} \}$

⚠ : si $\exists$ suite (x_n) de $E \setminus \{0\}$ /
 f linéaire et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} = +\infty$
 $f: E \rightarrow F$
 $\Rightarrow f$ n'est pas continue.

3 $f: E \times F \rightarrow G$
 $x \times y \mapsto f(x, y)$ bilinéaire

f continue sur $E \times F$ si :

$\exists c > 0 / \forall (x, y) \in E \times F :$

$$\|f(x, y)\|_G \leq c \cdot \|x\|_E \cdot \|y\|_F.$$

* Topologie + app continue :

1 $f: E \rightarrow F$ continue :

$f^{-1}(F)$ est un fermé

$f^{-1}(\emptyset)$ est un ouvert

2 $f: A \rightarrow F$ continue sur A

$A \subset E$ et $B \subset A$

$\Rightarrow f(B)$ compact de F

3 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continue alors f est bornée

compact
et : $\exists a_1, a_2 \in A / f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2)$

* Partie convexe par arcs :

A une partie convexe par arcs si =
 $\forall x, y \in A, \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A$ continue
 $t \mapsto \gamma(t)$ sur $[0, 1]$

et $\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$

Rappel ! :

$[x, y] = \{ tx + (1-t)y / t \in [0, 1] \}$
segment

1 A est dite étoilée si = $\exists a \in A$ tq :
 $\forall x \in A$, on a : $[a, x] \subset A$.

- Prop :

a) A convexe $\Rightarrow A$ étoilée

a) A étoilée $\Rightarrow A$ convexe par arcs

TVI : $A \subset E$, A convexe par arcs et
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur A

si il existe $a, b \in A / f(a) < 0$ et $f(b) > 0$
alors : $\exists c \in A$ tq : $f(c) = 0$.

* e.v.n de dim finie : E e.v.n, $\dim(E) = n$
→ des normes usuelles = $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ base de E

1 $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$

2 $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$

3 $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

• toutes les normes sont équivalentes
si $\dim(E)$ est finie.

• Bolzano - Weierstrass : toute suite (u_n)
bornée de E admet au moins une
s. suite c.v

(7)

dim(E) = p, B = (e₁, ..., e_p) base de E.

(U_n) suite de E, l ∈ E

$$U_n = \begin{pmatrix} U_{n,1} \\ U_{n,2} \\ \vdots \\ U_{n,p} \end{pmatrix}_B \text{ et } l = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_p \end{pmatrix}_B$$

(U_n) est c.v. ssi. $\forall 1 \leq k \leq p, (U_{n,k})$ est c.v. vers l_k

f: A → F, dim(F) = n, B = (e₁, ..., e_n) base de F

$$\forall x \in A, x \mapsto f(x)$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}_B, l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}_B$$

ona: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ssi $\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = l_k$
 $\forall 1 \leq k \leq n$

f_k: E → K $\forall 1 \leq k \leq n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \mapsto f_k(x) = x_k$$

est continue sur E.

→ monôme / polynôme = $\lambda \prod_{k=1}^n x_k^{p_k}$
 monôme

$\sum_{i=1}^n \lambda \prod_{k=1}^n x_k^{p_k} \Rightarrow$ polynôme

dim(E) = n : finie alors * A compact $\Leftrightarrow$
 A fermé + borné.

* f linéaire alors f est continue

* f: E₁ × E₂ × ... × E_n → F

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \text{ si } f$$

est multilinéaire alors f est continue sur E₁ × ... × E_n.

* F sev de E de dim finie alors F est un fermé.

* Séries dans un e.v. n de dim finie:

① $\sum_{n \geq 0} u_n$: la série de terme général u_n

② S_n = $\sum_{k=0}^n u_k$: suite de somme partielle

③ $\sum u_n$ c.v. ssi (S_n) c.v. = $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$

S : somme de la série $\sum u_n$

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

④ $\sum u_n$ c.v. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
 (réciproque fausse)

⑤ R_n = $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: reste de la série d'ordre n.

si $\sum u_n$ c.v. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

⑥ $\sum u_n$ et $\sum v_n$ c.v. alors :

$$\sum (\lambda u_n + v_n) \text{ c.v.}$$

$$\text{et } \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

⑦ $\sum (u_n - u_{n+1})$ c.v. ssi la suite (u_n) c.v.

⑧ $\sum u_n$ est abs c.v. ssi $\sum \|u_n\|$ c.v.

⑨ $\sum u_n$ abs $\Rightarrow \sum u_n$ c.v.
 (réciproque fausse)

End.
