

① Convergence simple: $f_n: A \rightarrow F$

Déf: la suite (f_n) c.s. ssi $\forall x \in A$, la suite $(f_n(x))$ c.v.
Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$: la limite simple de (f_n) .

② Convergence uniforme:

Déf: la suite (f_n) c.u. ssi $\exists f \in \mathcal{F}(A, F)$ tq:

$\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n \geq p, (f_n - f) \text{ est } \underline{\text{bornée}} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \odot \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0 \Rightarrow (f_n) \text{ c.u. vers } f. \end{array} \right.$

Suites des fct

Δ méthode pratique: (f_n) c.s. vers f . (mq (f_n) c.u.)

si $\forall n \geq p, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\forall x \in A,$
 $\Rightarrow$ alors (f_n) c.u. vers f .

———— (f_n) c.s. vers f (mq (f_n) ~~c.u.~~) méthode des suites.

si $\exists (a_n)$ de A tq: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(a_n) - f(a_n)) \neq 0$ alors:
 (f_n) ~~c.u.~~ vers f .

③ c.u. sur tout compact:

(f_n) c.u. sur tout compact de A ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^K = 0$

Δ compact sur $\mathbb{R} \rightarrow$ segment $[-a, a]$

④ Th de doubles limites: (permuter 2 limites)

(f_n) une suite de $\mathcal{F}(A, F)$ et $a \in \bar{A}$ (si $A = \mathbb{R}$ on peut avoir $a = +\infty$ ou $a = -\infty$)

si: $\left\{ \begin{array}{l} \odot (f_n) \text{ c.u. vers } f \\ \odot \forall n, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n \in F = \underline{\text{limite finie}} \end{array} \right.$

alors = $\odot$ la suite (b_n) c.v

$$\odot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) \end{array} \right.$$

⚠: mq (f_n) c.v =

$$\left. \begin{array}{l} \text{on a} = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n \\ \text{et la suite } (b_n) \text{ d.v} \\ \text{ou} = \text{on a} = \\ \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \end{array} \right\} \text{ alors } (f_n) \text{ c.v.}$$

⑤ c.v et continuité:

si on a = $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ continue en } a \\ \odot \text{ la suite } (f_n) \text{ c.v sur } A \text{ vers } f \end{array} \right.$ (continuité en empt)

alors = $\boxed{f \text{ continue en } a}$ ♥

→ Corollaire 1) = si $\forall n, f_n$ continue sur A (continuité sur une partie)
alors = $\boxed{f \text{ est continue sur } A}$ ♥ $\left\{ \begin{array}{l} \odot (f_n) \text{ c.v sur } A \text{ vers } f \end{array} \right.$

⚠: mq (f_n) c.v = $\left(\begin{array}{l} \text{si on a } f_n \text{ continue sur } A \\ \text{et } f \text{ n'est pas continue sur } A \end{array} \right)$
⇒ (f_n) c.v sur A

→ Corollaire 2) = si $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ continue sur } A \\ \odot (f_n) \text{ c.v sur tout compact de } A \text{ vers } f \end{array} \right.$
alors = $\boxed{f \text{ est continue sur } A}$ ♥

⑥ c.u et intégration = $\left\{ \begin{array}{l} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ f_n: I \rightarrow \mathbb{K} \end{array} \right.$

si on a = $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ continue sur } I \\ \odot (f_n) \text{ c.u sur tout segment de } I \text{ vers } f. \end{array} \right.$ (Intégral sur intervalle glg de $\mathbb{R}$)

alors = $\forall a \in I$ (fixé)

la suite = $\left\{ \begin{array}{l} F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \text{ c.u sur tout segment de } I \text{ vers } \\ F(x) = \int_a^x f(t) dt \end{array} \right.$

→ Corollaire = $f_n = [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ (Intégral sur un segment de $\mathbb{R}$)

si = $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ continue sur } [a, b] \\ \odot (f_n) \text{ c.u sur } [a, b] \text{ vers } f. \end{array} \right.$

alors = $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$

⑦ c.u et dérivation = $\left\{ \begin{array}{l} I \text{ intervalle de } \mathbb{R} \\ f_n = I \rightarrow \mathbb{K} \end{array} \right.$

si on a = $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur } I \\ \odot (f_n) \text{ c.s sur } I \text{ vers } f \\ \odot (f'_n) \text{ c.u sur tout segment de } I \text{ vers } g \end{array} \right.$

alors = $\left\{ \begin{array}{l} \odot f \text{ est de classe } \mathcal{E}^1 \text{ et } \underline{f'} = g \\ \odot (f_n) \text{ c.u vers } f \text{ sur tout segment de } I \end{array} \right.$

→ Corollaire 1 = (classe $\mathcal{E}^k, k \in \mathbb{N}^*$)

si on a = $\left\{ \begin{array}{l} \odot \forall n, f_n \text{ de classe } \mathcal{E}^k \\ \odot \forall 0 \leq p \leq k-1, (f_n^{(p)}) \text{ c.s sur } I \text{ vers } g_0 = f \\ \odot (f_n^{(k)}) \text{ c.u sur tout segment de } I \text{ vers } g_k \end{array} \right.$

alors :

- ⊙ f est de classe E^k sur I et $\underline{f^{(p)}} = g_p \quad \forall 0 \leq p \leq k-1$
- ⊙ $\forall 0 \leq p \leq k-1, (f_n^{(p)})$ c.u. sur tout segment de I vers g_p .

→ Corollaire 2 : (Classe E^∞) :

si on a :

- ⊙ $\forall n, f_n$ de classe E^∞ sur I .
- ⊙ (f_n) c.s. sur I vers f
- ⊙ $\forall k \in \mathbb{N}^*, (f_n^{(k)})$ c.u. sur tout segment de I

alors :

- ⊙ f de classe E^∞ sur I et $\underline{f^{(k)}} = g_k$ vers g_k .
- ⊙ (f_n) c.u. sur tout segment de I vers f .

③ Th de convergence dominée = (T.C.D.) : I intervalle de $\mathbb{R}$

si on a :

- ⊙ (f_n) c.s. sur I vers $f \in \mathcal{E}M(I, \mathbb{K})$
- ⊙ $\exists$ fct $\varphi \in \mathcal{E}M(I, \mathbb{R}_+)$ avec φ int sur I vérifiant : $\forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ (H.D.)

alors : $\forall n, f_n$ et f sont int sur I et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$$

→ extension = T.C.D. : $A \in \mathbb{R}$, a adhérent à A
 I intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in A}$ famille des fcts de $\mathcal{E}M(I, \mathbb{K})$

si on a :

- ⊙ $\forall t \in I, \lim_{\lambda \rightarrow a} f_\lambda(t) = f(t) \in \mathcal{E}M(I, \mathbb{K})$
- ⊙ $\exists \varphi \in \mathcal{E}M(I, \mathbb{R}_+)$ avec φ int sur I et $\forall \lambda \in A, |f_\lambda(t)| \leq \varphi(t)$ (H.D.)

alors : f_λ et f sont int sur I et :

$$\lim_{\lambda \rightarrow a} \int_I f_\lambda(t) dt = \int_I f(t) dt.$$

① Convergence simple : (f_n) suite des fct $F(A, F)$

Déf : la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.s sur A ssi : $\forall x \in A$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est c.v. Dans ce cas, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et on note : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ fct somme de la série

② Convergence absolue = **Séries des fct**

Déf : la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ abs. c.v sur A ssi : la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est abs c.v. Δ : $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.s ssi :

③ Convergence uniforme =

Déf : $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.u sur A ssi : la suite des fct (S_n) c.u sur A avec : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ vers S

→ méthode Pratique = $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.u sur A ssi :

$\left\{ \begin{array}{l} \odot \sum_{n \geq 0} f_n \text{ c.s sur A} \\ \odot R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \text{ c.u sur vers 0 : fct nulle} \end{array} \right.$
suite des fct restes Δ : on utilise cette méthode souvent si on a c.s.s.A

→ si $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.u sur A alors = la suite des fct (f_n) c.u sur A vers 0 : fct nulle.

→ si $\exists$ une suite (a_n) de A tq = $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a_n) \neq 0$ alors $\sum f_n$ ~~c.u~~ sur A. Δ = pour mg $\sum f_n$ ~~c.u~~ = méthode des suites

→ Convergence uniforme sur tout compact = (intervalle dans $\mathbb{R}$)
 Déf = $\sum f_n$ c.u sur tout compact de A ssi =
 $\forall K$: compact de A $\Rightarrow \sum f_n|_K$ c.u sur K.

④ Convergence normale =

Déf = on dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.v sur A ssi =
 la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ c.v. (Rappel = $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$)

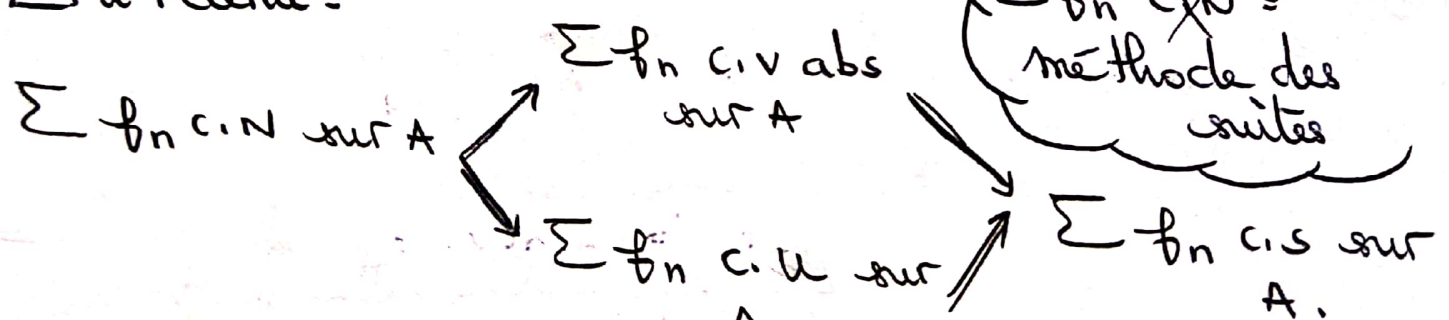
→ méthode Pratique =

- ① si $\exists$ une suite (α_n) de $\mathbb{R}_+$ tq = $\|f_n(x)\| \leq \alpha_n$
- ② $\sum \alpha_n$ c.v

$\Rightarrow \sum f_n$ c.v sur A.

→ si $\exists (a_n)$ suite de A tq = la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n(a_n)\|$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ ~~c.v~~ sur A.

⚠ à retenir =



⑤ Th. interversion des limites = (f_n) suite des fcts et a pt adhérent à A

- si on a :
- ① $\sum_{n \geq 0} f_n$ c.u sur A, de somme S
 - ② $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n \in F$ finie

alors = $\sum_{n \geq 0} b_n$ c.v et $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

⚠ : permuter limite et $\sum$ infini

(-) $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

⑥ Continuité de la fct somme =

$$\text{si on a: } \begin{cases} \textcircled{1} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ c.u. sur tout compact de } A \text{ vers } S \\ \textcircled{2} f_n \text{ continue sur } A \end{cases}$$

alors: S continue sur A .

⑦ Intégration termes à termes sur segment =

$$\text{si on a: } \begin{cases} \textcircled{1} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue sur } [a, b] \\ \textcircled{2} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ c.u. sur } [a, b], \text{ de somme } S \end{cases}$$

$$\text{alors: la série } \sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n(x) dx \text{ c.v. et } = \underbrace{\Delta}_{\text{permuter } \int \text{ et } \sum \text{ infini}}$$

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

$$\underline{\text{signifié}} = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

⑧ Dérivation de la fct somme = (Classe E^1)

$$\text{si on a: } \begin{cases} \textcircled{1} \forall n, f_n \text{ de classe } E^1 \text{ sur } I \\ \textcircled{2} \sum_{n \geq 0} f_n \text{ c.s. sur } I \text{ de somme } S \\ \textcircled{3} \sum_{n \geq 0} f'_n \text{ c.u. sur tout segment de } I \end{cases}$$

$$\text{alors: } S \text{ de classe } E^1 \text{ sur } I \text{ et } S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

→ Corollaire 1 = (Classe $E^k, k \in \mathbb{N}^*$) Formule de Leibniz

$$\text{si on a: } \begin{cases} \textcircled{1} \forall n, f_n \text{ de classe } E^k \\ \textcircled{2} \forall 0 \leq p \leq k-1, \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)} \text{ c.s. sur } I, \text{ de somme } S^{(p)} \\ \textcircled{3} \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)} \text{ c.u. sur tout segment de } I \end{cases}$$

alors: S de classe E^k et $\forall 1 \leq p \leq k$, on a: =

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) \quad \text{Formule de Leibniz } \heartsuit$$

⑤ Th d'intégration termes à termes sur intervalle qlq =

$$si = \begin{cases} \bigcirc \sum_{n \geq 0} f_n \text{ c.s sur } I \text{ vers } f \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{K}) \\ \quad \left(\Delta: f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \\ \bigcirc \forall n, f_n \text{ intégrable sur } I \\ \bigcirc \sum_{n \geq 0} \int_I |f_n(t)| dt \text{ c.v} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Delta = \text{permuter} \\ \text{et } \sum \text{ infini} \\ \rightarrow \text{intégral généralisée} \end{matrix}$$

alors = f int sur I et $= \int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$

signifie : $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) dt \right)$

- Approximation uniforme =

Rappel $\Delta: f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite en escalier si :

$\exists \sigma = \{a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b\}$ = subdivision tq $f(x) = d_k$
 $\forall x \in]a_{k-1}, a_k[$, $\forall 1 \leq k \leq n \Rightarrow \sigma$ est adapté à f . = cte

Th = $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ c.p.m sur $[a, b]$ alors :

$\exists (f_n)$ suite des fct en escalier sur $[a, b]$ c.u vers f .

Th de Weierstrass = si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[a, b]$
 alors $\exists (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suites de polynômes de $\mathbb{K}[x]$ qui c.u vers f .

$\rightarrow$ Corollaire $\mathcal{E} = (\text{Classe } \mathcal{E}^\infty) =$

si on a : $\bigcirc \forall n, f_n$ est de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur I
 $\bigcirc \forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ c.u sur tout segment de I
 $\bigcirc \sum_{n \geq 0} f_n$ c.s sur I , de fct somme S

alors = S de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur I et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I =$

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) = \text{Formule de Leibniz } \heartsuit$$