

① Continuité : $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

Intégrale ^a paramétrée

si on a :

$$\begin{cases} \odot \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ est continue sur } A. \\ \odot \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ c.p.m sur } I \\ \odot \forall [a, b] \subset A, \exists \varphi \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{R}_+) \text{ int sur } I \text{ tq:} \end{cases}$$

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad (\text{H.D})$$

alors : la fct = $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ définie + continue
 $\forall x \in A$ sur A.

② Dérivabilité : (classe $\mathcal{E}^1$)

si on a :

$$\begin{cases} \odot \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur } A \\ \odot \forall x \in A, t \mapsto f(x, t) \text{ est c.p.m, int sur } I \\ \odot \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ c.p.m sur } I \\ \odot \forall [a, b] \subset A, \exists \varphi \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{R}_+) \text{ int sur } I \text{ tq} \end{cases}$$

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad (\text{H.D})$$

alors : la fct = $F(x) = \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{E}^1$ sur A
 $\forall x \in A$ (dérivable)

et on a :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt, \quad \forall x \in A$$

Formule de Leibniz.

→ Corollaire ① = (classe E^k), $k \in \mathbb{N}$

$$\text{si on a: } \begin{cases} \odot \forall t \in I, x \mapsto f(x, t) \text{ de classe } E^k \text{ sur } A, \\ \odot \forall x \in A, \forall 0 \leq p \leq k-1, t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \text{ c.p.m.} \\ \text{et int sur } I \\ \odot \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ c.p.m. sur } I \\ \odot \forall [a, b] \subset A, \exists \varphi \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{R}_+) \text{ int sur } I \text{ tq:} \\ \forall x \in [a, b], \forall t \in I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ (H.D)} \end{cases}$$

alors: $\forall x \in A, F(x) = \int_I f(x, t) dt$ de classe E^k sur A et:

$$\forall 0 \leq p \leq k, \quad F^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt \quad \text{Formule de Leibniz } \heartsuit$$

→ Corollaire ② = (classe E^∞)

si on a: $\odot \forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est de classe E^∞ sur A .

$\odot \forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ c.p.m. et int sur I .

$\odot \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in A, t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ c.p.m. sur I

$\odot \forall [a, b] \subset A, \exists \varphi \in \mathcal{EM}(I, \mathbb{R}_+) \text{ int sur } I \text{ tq:}$

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \text{ (H.D)}$$

alors: $\forall x \in A, F(x) = \int_I f(x, t) dt$ de classe E^∞ sur A et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt \quad \text{Formule de Leibniz } \heartsuit$$

③ Intégrales à paramètre sur un segment =

(a) Continuité = $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

si $f(x, t)$ continue sur $A \times [a, b]$ alors =

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \quad \forall x \in A, \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur } A.$$

(b) Dérivabilité = (classe $\mathcal{E}^1$)

si on a = $\begin{cases} \textcircled{1} f(x, t) \text{ continue sur } A \times [a, b]. \\ \textcircled{2} \text{ la fct } \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ existe et continue sur } A \times [a, b] \end{cases}$

alors = $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \quad \forall x \in A, \text{ de classe } \underline{\mathcal{E}^1} \text{ sur } A.$

et on a = $\forall x \in A$ $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ Formule de Leibniz

(classe $\mathcal{E}^n$) =

si on a = $\begin{cases} \textcircled{1} f(x, t) \text{ continue sur } A \times [a, b] \\ \textcircled{2} \text{ les fct } \frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \\ \text{existent + continues sur } A \times [a, b]. \end{cases}$

alors = $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt, \quad \forall x \in A, \text{ de classe } \mathcal{E}^n \text{ sur } A$

et $\forall 1 \leq k \leq n,$ $F^{(k)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt, \quad \forall x \in A$

④ Théorème de Fubini : $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

si $f(x, t)$ est continue sur $[c, d] \times [a, b]$ alors :

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dx \right) dt$$