

① Ensemble dénombrable :

* / Déf = un ensemble I est dit dénombrable si :
 $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. (de $\mathbb{N}$ sur I)

⚠ : $\begin{cases} I \text{ dénombrable} \Rightarrow I \text{ infini.} \\ I \text{ au plus dénombrable} \end{cases}$

$\begin{cases} I \text{ dénombrable} \\ \text{ou} \\ I \text{ fini.} \end{cases}$

⊙ I infini, dénombrable si : $\exists (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite ↗ de I
 $(F_n \subset F_{n+1})$

$$tq : \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = I \right|$$

Familles sommables

→ Exemples = $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

⚠ : ⊙ $I_1, \dots, I_n$ dénombrables

$\begin{cases} I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \text{ dénombrable} \\ \text{produit cartésien fini} \\ \bigcup_{k=1}^n I_k \text{ dénombrable.} \\ \text{réunion finie.} \end{cases}$

⊙ partie infinité de $\mathbb{N}$:
 $\hookrightarrow$ dénombrable.

* / $K \subset \mathbb{N}, K \neq \emptyset, (I_k)_{k \in K}$: partition de l'ensemble I =
 famille de I non vide
 & a' & disjointe
 avec : $\left| \bigcup_{k \in K} I_k = I \right|$

② Famille sommable des réels positifs = soit I ensemble
 au plus dénombrable

$$P_f(I) = \left\{ F \subset I \mid F \neq \emptyset \text{ et } F \text{ fini} \right\}$$

* / Déf = $u = (u_i)_{i \in I}$ famille des réels $(+)$ est dite sommable

$$si : \exists M \geq 0, \forall F \in P_f(I), \left| S_F(u) = \sum_{i \in F} u_i \right| \leq M$$

Dans ce cas, $S(u) = \sup_{F \in P_f(I)} S_F(u) \in \mathbb{R}_+$

et $S(u) = \sum_{i \in I} u_i$ = somme de la famille u .

⚠: si I fini, u est sommable et on a $S_I(u) = \sum_{i \in I} u_i$

$$S_I = \sum_{k=1}^n u_{i_k} = \text{somme classique}$$

⊙ I, J dénombrables si $(u_i)_{i \in J}$ sommable $\leadsto (u_i)_{i \in I}$ sommable.
($I \subset J$)

⊙ $\forall i \in I, 0 \leq u_i \leq v_i$ si $\begin{cases} \rightarrow v \text{ sommable} \leadsto u \text{ sommable} \\ S(u) \leq S(v) \\ \rightarrow u \text{ n'est pas sommable} \leadsto v \text{ n'est pas sommable} \end{cases}$

→ Th de sommation par paquets =

I dénombrable, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partition de I , $u = (u_i)_{i \in I}$ f. des réels (+)

* / u est sommable si :

① $\forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in F_n}$ sommable de somme $S_{F_n}(u)$.

② la série $\sum_{n \geq 0} S_{F_n}(u)$ est c.v

Dans ce cas, $S_I(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{F_n}(u) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in F_n} u_i \right)$

⚠: si F_n finie $\leadsto$ ① est tj vrai.

→ Corollaire 1: $I = \mathbb{N}$

* / $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable si: $\sum_{n \geq 0} u_n$ c.v

Dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

→ Corollaire 2: $I = \mathbb{Z}$

* / $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sommable si: $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} u_{-n}$ c.v

Dans ce cas, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{-n})$

→ Prop: $u = (u_i)_{i \in I}$ est sommable si: la suite $(S_{F_n}(u) = \sum_{i \in F_n} u_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est c.v. Dans ce cas,

$$S_I(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{F_n}(u) \Leftrightarrow \sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in F_n} u_i$$

③ Famille sommable des nombres complexes :

* / $(u_i)_{i \in I}$ f. des nb complexes est sommable si :

$|u| = (|u_i|)_{i \in I}$ f. des réels (+) est sommable.

* / $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite $\uparrow$ de I / $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = I$, u est sommable alors :

la suite $\left(\sum_{i \in F_n} u_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$ c.v. Dans ce cas, $S(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in F_n} u_i$
 somme de f. u

* / $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ sommables, $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (\lambda u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable et on a : $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$

→ Prop 1 = $I = \mathbb{N}$

* / $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommable si : $\sum_{n \geq 0} u_n$ abs c.v. et on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

→ Prop 2 = $I = \mathbb{Z}$

* / $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sommable si : $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \leq -1} u_n$ c.v. abs

$$\text{et : } \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + u_{-n})$$

→ Th de sommation par paquets :

I dénombrable, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partition de I , $u = (u_i)_{i \in I}$ f. de nb complexe

* / u sommable si :

① $\forall n \in \mathbb{N}, (|u_i|)_{i \in F_n}$ sommable.

② $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in F_n} |u_i| \right)$ c.v. et : $S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in F_n} u_i \right)$

⚠ : si $\forall n \in \mathbb{N}, F_n$ fini alors ① tj vrai.

→ Conellane = (séries doubles) $(U_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

($\forall m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 0} |U_{m,n}|$ c.v et $\sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \geq 0} |U_{m,n}| \right)$ c.v ($\Delta =$ permuter $\& \sum \infty$)

($\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m \geq 0} |U_{m,n}|$ c.v et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{m \geq 0} |U_{m,n}| \right)$ c.v

Donc on a: $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} U_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_{m,n} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} U_{m,n} \right)$

→ Cas particulier: $U_{m,n} = v_m \times w_n$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$

$(U_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ sommable ssi $\sum_{m \geq 0} v_m$ et $\sum_{n \geq 0} w_n$ abs c.v et :

$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} U_{m,n} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right)$

→ Rq: $|U_{m,n}| \leq v_m w_n$ et $\sum_{m \geq 0} v_m, \sum_{n \geq 0} w_n$ c.v alors :

$(U_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. (Δ Pratique)

→ Th: (Invariance par permutation) =

I dénombrable et $\sigma: I \rightarrow I$ permutation de I

$i \mapsto \sigma(i)$

(σ bijection de I dans I)

$(u_i)_{i \in I}$ sommable ssi $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ sommable.

$\Rightarrow \sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$

→ Conséquence: si $\sum_{n \geq 0} U_n$ abs c.v alors :

$\forall \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ permutation de $\mathbb{N}$ on a :

$\sum_{n \geq 0} U_{\sigma(n)}$ est abs c.v et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)}$