

Exercice 1:

1/ Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

2/ Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3/ En déduire que: $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \frac{\pi}{2} \log(x+1)$ et exprimer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4/ En déduire que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt = \pi \log 2$.

Exercice 2:

On considère la fonction $k(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right] dt$.

1/ Prouver que k est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ Montrer que k est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

3/ En faisant le changement de variable $u = \frac{x}{t}$ dans l'expression intégrale de $k'(x)$, prouver que $k'(x) = -k(x)$ pour tout $x > 0$.

4/ En déduire l'égalité $k(x) = \sqrt{\pi} e^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3:

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$$

1/ Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$ et calculer $F(0)$ et $G(0)$.

2/ Prouver que $F(0) - F(x) + G(x) = C|x|$ avec $C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

3/a- Démontrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $G'' = F$.

b- En déduire l'expression de F sur $[0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

4/ Donner la valeur de la constante C .

5/ Prouver les égalités suivantes pour $a > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(a^2+t^2)} dt = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}) \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2(a^2+t^2)} dt = \frac{\pi}{4a^3} (e^{-\frac{a}{2}} - 1 + 2a).$$

Exercice 4:

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$

1/ Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.

2/ A l'aide d'une intégration par parties montrer qu'on peut définir F en 0.

3/ Prouver que F est continue sur $[0, +\infty[$.

(on pourra considérer la série $\sum u_n$ où $u_n : x \mapsto \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$)

4/ Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer F' .

5/ En déduire que $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, et que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 5:

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$

1/ Etudier la continuité de F et calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

2/ Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = -2e^{-x^2} G(x)$$

3/ En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) + G^2(x) = \frac{\pi}{4}$

4/ En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$

5/ Soit $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt$

a- Montrer que le domaine de définition de f est $[0, +\infty[$ et étudier sa continuité et sa dérivabilité.

b- En déduire que: $\forall x \in [0, +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2} dt = \sqrt{\pi x}$

c- Retrouver ce résultat en faisant un changement de variable et une intégration par parties.

Exercice6:

1/ Montrer que l'application: $t \rightarrow \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \geq 0$.

On définit alors l'application $f : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ sur $\mathbb{R}_+$

2/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3/ a- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b- Montrer que f est solution de l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

avec $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

c/ En déduire que $f(x) = 2 \left(I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) e^x$.

d/ Donner alors la valeur de I .

Exercice7:

1/ Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, pour tout $x > 0$.

On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, sur $]0, +\infty[$.

2/ Montrer que pour $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en déduire $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3/ Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

4/ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par: $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ si $0 \leq t \leq n$ et $f_n(t) = 0$ si $t \geq n$.

a- Montrer que $f_n(t) \leq e^{-t}$, $\forall t \geq 0$

b- En déduire que: $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$, $\forall x > 0$.

c- Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$

d- En déduire que: $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, $\forall x > 0$.

- Ex 5 =

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1/ $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$

$\Rightarrow F$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan(t) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = ?$$

$$F(x) = \int_0^1 f_x(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $f_x(t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$

$\forall t \in [0, 1], \lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(t) = 0 = f(t)$

$f(t)$ continue sur $[0, 1]$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1], |f_x(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = f(t)$

f continue, ≥ 0 , intégrable sur $[0, 1]$

T.C.D $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(t) dt = 0.$

* 2ème méthode = $F(x) \geq 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2} e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

D'ici: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$

2) $\forall f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$

$\forall \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$ continue sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ Donc F de classe $\mathcal{C}^1$

et on a, $\forall x \in \mathbb{R}:$

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 -2x e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \quad (1)$$

$\forall x \neq 0, F'(x) \stackrel{\text{c.v}}{=} \begin{pmatrix} u = xt \\ dt = \frac{1}{x} du \end{pmatrix}$ Δ si $x=0$ on ne peut pas faire c.v (car $u=0$)

$$= -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} \frac{1}{x} du$$

$$F'(x) = -2e^{-x^2} G(x) \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow F'(0) = 0$ Donc = (2) mais pour $x=0$ car $G(0) = 0$

(2) = (2) vrai, $\forall x \in \mathbb{R}.$

c.a.d. $F'(x) = -2e^{-x^2} G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

3/ $H(x) = F(x) + G^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$H'(x) = F'(x) + 2G'(x)G(x) = F'(x) + 2e^{-x^2}G(x) = 0 \quad (\text{D'après 2})$$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / H(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

or $H(0) = F(0) + G^2(0) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow H(x) = \frac{\pi}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $F(x) + G^2(x) = \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

4/ $t \mapsto e^{-t^2}$ continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ ($t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$) donc:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = l \geq 0.$$

$x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow 0 + l^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow l = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (dans 3)

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

5/ $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$

a/ $Df = [0, +\infty[$, on pose: $h(t) = \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2}$ $\forall t \in]0, +\infty[$

$$* x=0 : h(t) = 0, \forall t \in]0, +\infty[$$

$$\text{donc} : f(0) = \int_0^{+\infty} 0 \, dt = 0.$$

* $x \neq 0$: h continue et garde signe fixe sur $]0, +\infty[$ donc $F(x)$ existe

(i) h est intégrable sur $]0, +\infty[$

$$\text{1er cas} : x > 0 : * h(t) \sim \frac{x t^2}{t^2} = x$$

$$\text{Donc} : h \text{ intégrable sur }]0, 1] = \frac{x}{t^0}$$

$$* t^2 h(t) = 1 - e^{-x t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{Donc} : h \text{ intégrable sur } [1, +\infty[$$

$$\text{D'où} : h \text{ intégrable sur }]0, +\infty[\Rightarrow F(x) \text{ existe}$$

$$\text{2ème cas} : x < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |h(t)| = +\infty$$

$\Rightarrow h$ n'est pas intégrable sur $]-\infty, 0[$
 $F(x)$ n'existe pas.

$$\mathcal{Q} = \text{Df} = [0, +\infty[$$

$$: f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x t^2}}{t^2} \, dt$$

mq f continue sur $[0, +\infty[$?

$$f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) \, dt \text{ avec } g(x, t) = \frac{1 - e^{-x t^2}}{t^2}$$

$$(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x, t) \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, t \mapsto g(x, t) \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\text{soit } [a, b] \subset [0, +\infty[$$

$$\forall x \in [a, b], t \in]0, +\infty[, |g(x, t)| = \frac{1 - e^{-x t^2}}{t^2}$$

$$\text{est continue, } \geq 0, \text{ int sur }]0, +\infty[\leq \frac{1 - e^{-b t^2}}{t^2} = \psi(t)$$

$$\mathcal{Q} = F \text{ continue sur } [0, +\infty[.$$

mq f de classe $\mathcal{E}^1$ sur $]0, +\infty[$?

$$* \forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x, t) = \frac{1 - e^{-x t^2}}{t^2}$$

de classe $\mathcal{E}^1$ sur $[0, +\infty[$

$$* \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-x t^2}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, t \mapsto g(x, t) \text{ continue, int sur }]0, +\infty[\quad (\text{E/a})$$

$$* \forall x \in [0, +\infty[, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-x t^2} \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\text{soit } [a, b] \subset]0, +\infty[$$

$$\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[\text{ on a} :$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-x t^2} \leq e^{-a t^2} = \psi(t)$$

$$\psi \text{ continue, } \geq 0 \text{ et intégrable sur }]0, +\infty[\left(t^2 \psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } a > 0 \right)$$

$$\mathcal{Q} = f \text{ est de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$/ \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \sqrt{\pi x} ?$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} \, dt$$

$$\text{c.v} \Rightarrow \text{on pose} : u = \sqrt{x} t \quad dt = \frac{1}{\sqrt{x}} du$$

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]0, +\infty[,$$

$$f(x) = \sqrt{\pi x} + c$$

$$x \rightarrow 0^+ : c = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \left(\text{car } f \text{ continue en } 0^+ \right)$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \sqrt{\pi x}$$

$$\text{encore vrai pour } x=0 \text{ car } f(0)=0.$$

$$\mathcal{Q} = \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \sqrt{\pi x}.$$

$$9 \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt, \quad \forall x > 0$$

c.v. $\Rightarrow$ on pose: $u = \sqrt{x}t$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{\frac{u^2}{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} du$$

$$= \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2} du$$

$$= \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{Pr} \left(\underbrace{1 - e^{-u^2}}_{dr} \right) du$$

$$\stackrel{\text{I.P.P}}{=} \sqrt{x} \left(\underbrace{\left[-\frac{1}{u} (1 - e^{-u^2}) \right]}_{=0} \right)_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} \times e^{-u^2} du$$

$$= \sqrt{x} \left(0 + 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = \sqrt{x\pi}$$

$$\underline{\mathcal{Q}} = \forall x \geq 0, f(x) = \sqrt{\pi x} \quad (\text{car } f(0) = 0)$$

Ex1:

$$1/ \forall x \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

$$\forall t \in]0, +\infty[.$$

g continue sur $]0, +\infty[$

$$* \underline{x=0} : g(t) = 0, \forall t \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow g \text{ int sur }]0, +\infty[$$

$$\underline{x \neq 0} : g(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{xt}{t} = x = \frac{x}{t^0} \Rightarrow g \text{ int sur }]0, 1]$$

$$|g(t)| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{t^3} \text{ donc } g \text{ int sur } ([1, +\infty[) \cup]0, +\infty[$$

$$\text{on note: } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

$$2/ f(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt \text{ avec:}$$

$$h(x, t) = \frac{\text{arctan}(xt)}{t(1+t^2)}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto h(x, t) = \frac{\text{arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$* \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto h(x, t) = g(t)$ continue et int sur $]0, +\infty[$. (d'après 1)

$$* \forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

continue sur $]0, +\infty[$

soit $a > 0$ q.l.q., $\forall x \in [-a, a], \forall t \in]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

φ continue, ≥ 0 int sur $]0, +\infty[$
 $\left(\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 \in \mathbb{R}, \varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \right)$

$\underline{\mathcal{Q}} = f$ est de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} dt$$

$$\text{soit } H(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

D.E.S?

$$\Rightarrow G(t) = \frac{1}{(1+t)(1+x^2t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1+x^2t}$$

$$a = \left[\frac{1}{1+x^2t} \right]_{t=1} = \frac{1}{1-x^2} \quad (x \neq \pm 1)$$

$$b = \left[\frac{1}{1+t} \right]_{t=-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-1} \quad (x \neq 0)$$

$$\Rightarrow H(t) = G(t^2) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2t^2} dt \right) \quad \Delta: \text{couper l'intégral par les fcts int}$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{2}x} dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \left[|x| \arctan(|x|t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}|x| \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1-|x|}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+|x|}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}, f'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|} \quad (1)$$

$$f'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

on ne utilise pas cette méthode car f de $\mathcal{E}^1$

f de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}$ alors :

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|} = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(-1) = f'(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{Q} = f'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$3/ (2) \Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x}$$

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in [0, +\infty[.$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + c$$

$$x=0 \Rightarrow c = f(0) = 0 = \int_0^{+\infty} dt$$

$$\mathcal{Q} = \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) \quad (3)$$

f impaire, $\forall x \in]-\infty, 0[$,

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(-x) \stackrel{(3)}{=} -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \mathcal{Q} = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{avec : } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$4/ \pm = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$$

$$* h(t) = \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$h(t) \underset{0^+}{\sim} 1 = \frac{1}{t^0}$$

$$h(t) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi/2}{t} \right)^2 = \frac{\pi^2/4}{t^2} \left. \begin{array}{l} h \text{ int sur } \\]0, +\infty[\end{array} \right\} \Rightarrow I \text{ existe.}$$

$$* Mq = I = \pi \ln(2).$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \underbrace{\left(\arctan(t) \right)^2}_{\substack{\text{Pr} \\ \text{Dr}}} dt$$

$$\stackrel{I.P.P}{=} = \underbrace{\left[-\frac{1}{t} \arctan(t) \right]_0^{+\infty}}_{!!} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t(1+t^2)} \arctan(t) dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t(1+t^2)} dt = 2f(1) = 2 \times \frac{\pi}{2} \ln(2) = \pi \ln(2)$$

Ex 21 :

$$K(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{x^2}{t^2} + t^2 \right) dt.$$

$$1/ K(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{avec } f(x,t) = \frac{1}{e} \left(\frac{x^2}{t^2} + t^2 \right), \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

$$x \neq t \in]0, +\infty[, x \mapsto f(x,t) = \frac{1}{e} \left(\frac{x^2}{t^2} + t^2 \right) \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$* \forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x,t) \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\forall a > 0, \forall x \in [-a, a], \forall t \in]0, +\infty[$$

$$|f(x,t)| = e^{-\frac{x^2}{t^2} - t^2} = e^{-\frac{x^2}{t^2}} e^{-t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t) \quad (1)$$

$$\varphi \text{ continue, } \geq 0 \text{ et int sur }]0, +\infty[$$

$$\left(\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1, t^2 \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right)$$

$$\mathcal{Q} = K \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

q/ mq = k dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

k fct paire donc: mq = k de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

* $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x, t) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)}$ de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{x}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)}$$

* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x, t)$ continue

int sur $]0, +\infty[$ (voir (1))

$$* \forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{x}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)}$$

continue sur $]0, +\infty[$

soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [a, b]$, $\forall t \in]0, +\infty[$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{x}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)} \leq \frac{b}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{a^2}{t^2} + t^2)} = \psi(t)$$

ψ continue, ≥ 0 int sur $]0, +\infty[$.

en effet, $t^2 \psi(t) = b e^{-\frac{a^2}{2t^2} - \frac{t^2}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

$$\psi(t) = \frac{b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{2t^2} - \frac{t^2}{2}} \sim \frac{b}{t^2} e^{-\frac{a^2}{2t^2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

$\mathcal{Q} = k$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (exp impaire)

k est paire $\Rightarrow k$ de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, k'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = -x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)} dt \quad (1)$$

$$\exists \forall x > 0, (1) \Rightarrow k'(x) = -x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)} dt$$

$$\xrightarrow{c.v} \text{ on pose: } \begin{cases} u = \frac{x}{t} \\ t = \frac{x}{u} \\ dt = -\frac{x}{u^2} du \end{cases}$$

$$k'(x) = -x \int_{+\infty}^0 \frac{u^2}{x^2} e^{-\frac{1}{2}(u^2 + \frac{x^2}{u^2})} \left(-\frac{x}{u^2}\right) du$$

$$= - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{u^2} + u^2)} du = -k(x)$$

$$\mathcal{Q} = \forall x \in]0, +\infty[, k'(x) = -k(x)$$

$$* \text{ mq} = \forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

$\Rightarrow$ k vérifie sur $]0, +\infty[$: (E): $y' = -y$

$y = c \cdot e^{-x}$ / $c \in \mathbb{R}$ solution générale de (E)

donc: $\exists c \in \mathbb{R}$ / $k(x) = c e^{-x}$, $\forall x \in]0, +\infty[$

k continue sur $\mathbb{R}$: $x \rightarrow 0^+ : c = \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = k(0)$

$$\text{or: } k(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\xrightarrow{c.v} \text{ on pose: } \begin{cases} u = \frac{t}{\sqrt{2}} \\ t = \sqrt{2}u \\ dt = \sqrt{2} du \end{cases}$$

$$k(0) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2} du \quad \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad \text{Intégral de Gauss}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

donc: $\forall x \in]0, +\infty[, k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$

$$(1) \Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[, k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \quad (2)$$

or k paire alors: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$k(x) = \underset{\substack{\in \\]0, +\infty[}}{k(|x|)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}$$

$$\text{avec: } k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{t^2} + t^2)} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ex3:

$$\forall F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) dt, \text{ avec: } f(x,t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2} = f(x,t)$$

continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2} = f(x,t) \text{ continue sur } [0, +\infty[$$

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R}, \forall x \in [a,b], \forall t \in [0, +\infty[,$$

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

φ continue, > 0 et int sur $[0, +\infty[$.

$$\left(\varphi(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \right)$$

$\mathcal{Q} = F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$G(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) dt, \text{ avec:}$$

$$g(x,t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)}, \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

$$\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x,t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$$

continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x,t) \text{ continue sur }]0, +\infty[$$

$$\forall a > 0 \text{ qdq}, \forall x \in [-a, a], \forall t \in]0, +\infty[$$

$$|g(x,t)| = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} \quad \Delta:$$

$$= \frac{2 \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)}{t^2(1+t^2)}$$

$$\leq \frac{2 \left(\frac{tx}{2}\right)^2}{t^2(1+t^2)} = \frac{x^2}{2(1+t^2)}$$

$$\leq \frac{a^2}{2(1+t^2)} = \psi(t)$$

$$\cos(ax) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1) \text{ est vrai pour } x=0.$$

$$1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$|\sin t| \leq |t|$$

(6)

ψ continue, ≥ 0 et int sur $]0, +\infty[$.

$$\left(\begin{array}{l} \psi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2}{2} \in \mathbb{R} \\ \psi(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{2t^2} \end{array} \right)$$

$\mathcal{Q} = G$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$G(0) = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

$$\forall F(0) - F(x) + G(x) =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2 + 1} + \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{1+t^2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)}{t^2} dt$$

$$\forall x \neq 0: \xrightarrow{\text{c.v}} u = \frac{tx}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2\left(\frac{t|x|}{2}\right)}{t^2} dt$$

$$t = \frac{2}{|x|} u \Rightarrow dt = \frac{2}{|x|} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(u)}{\frac{4}{x^2} u^2} \frac{2}{|x|} du = |x| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du = c |x| \quad (1)$$

$$c$$

$$\textcircled{3} G(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) dt, g(x,t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)}$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$$

mq: G de classe $\mathcal{E}^2$?

$$\forall t \in]0, +\infty[, x \mapsto g(x, t) = \frac{1 - \cos(tx)}{t^2(1+t^2)} \text{ est}$$

de classe $\mathcal{E}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$ est continue et int sur $]0, +\infty[$ (voir ①)

$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$ continue, int sur $]0, +\infty[= h(t)$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = x \in \mathbb{R} \\ |h(t)| \leq \frac{1}{t(1+t^2)} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3} \end{array} \right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

continue sur $]0, +\infty[$, vérifiant (H.D) (voir 1)

$\mathcal{Q} = G$ est de classe $\mathcal{E}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, G''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2} = F(x) \end{aligned}$$

$$b/ (a) \Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[,$$

$$\pi/2 - G''(x) + G(x) = c \cdot x$$

$$\Rightarrow G''(x) - G(x) = -cx + \pi/2$$

G vérifie sur $[0, +\infty[$, (E): $y'' - y = -cx + \pi/2$

eq caractéristique: $r^2 - 1 = 0$.

$$(E) \quad r = \pm 1$$

$$y_H = A e^x + B e^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$y_P = cx - \pi/2 \text{ sol}^e \text{ particulière de (E).}$$

$$y = y_H + y_P = A e^x + B e^{-x} + cx - \pi/2$$

$$\exists A, B \in \mathbb{R} / G(x) = A e^x + B e^{-x} + cx - \pi/2 \quad (1)$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, G'' = F$$

$$\Rightarrow F(x) = A e^x + B e^{-x}$$

$$F(0) = \pi/2 \Rightarrow A + B = \pi/2$$

$$\sigma = |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi/2$$

$\Rightarrow F$ bornée sur $\mathbb{R}$

$$e^{-x} F(x) = A + B e^{-2x}, \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{bornée}}}{x \rightarrow +\infty} = \text{donne} = A = 0$$

$$\text{donc} = \forall x \in [0, +\infty[, F(x) = \pi/2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\text{or } F \text{ paire donc} = \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F(|x|)$$

$$F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

$$4) C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = ?$$

$$(a) \Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[,$$

$$\pi/2 - \pi/2 e^{-x} + G(x) = c \cdot x$$

$$\text{or } \begin{matrix} A=0 \\ B=\pi/2 \end{matrix} \xrightarrow{(2)} G(x) = \pi/2 e^{-x} + cx - \pi/2 \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow G'(x) = -\pi/2 e^{-x} + c. \quad (3)$$

$$\text{or } G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt$$

$$\Rightarrow G'(0) = 0$$

$$\boxed{(3)} \Rightarrow 0 = -\pi/2 + c$$

$$\Rightarrow c = \pi/2$$

$$\mathcal{Q} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi/2$$

$$\text{Rq: } I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \text{intégrale de Dirichlet}$$

$$\text{Dérivée: } I = \pi/2 ?$$

$$(7) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi/2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \sin^2(t) dt \xrightarrow{\text{I.P.P}}$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{1}{t} \sin^2(t) \right]_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{t} \sin(t) \cos(t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt \xrightarrow{\text{c.v.}} \begin{array}{l} u = 2t \\ t = \frac{1}{2}u \\ dt = \frac{1}{2}du \end{array}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\frac{1}{2}u} \frac{1}{2} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall a > 0, I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t(a^2 + t^2)} dt$$

$$\text{mq} = I(a) = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}) ?$$

$$I(a) \xrightarrow{\text{c.v.}} \text{on pose: } \begin{array}{l} t = au \\ u = t/a \end{array}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{a u (a^2 + a^2 u^2)} a du$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{(1+u^2)u} du$$

$$= \frac{1}{a^2} G'(a)$$

$$\text{or } G'(x) = -\frac{\pi}{2} e^{-x} + C \quad (2)$$

$$= \frac{\pi}{2} (1 - e^{-x})$$

$$\Rightarrow I(a) = \frac{1}{a^2} G'(a)$$

$$I(a) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{2} (1 - e^{-a}) = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a})$$

$$* J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2(a^2 + t^2)} dt$$

$$\xrightarrow{\text{c.v.}} \text{on pose: } t = a \cdot u$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(au)}{a^2 u^2 (a^2 + a^2 u^2)} a du$$

$$= \frac{1}{2a^3} \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(au)}{u^2(1+u^2)} du$$

$$= \frac{1}{2a^3} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2au)}{u^2(1+u^2)} du$$

$$= \frac{1}{2a^3} G(2a)$$

$$\text{or } G(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} + Cx - \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^{-x} + x - 1)$$

$$\Rightarrow J(a) = \frac{1}{2a^3} G(2a) = \frac{\pi}{4a^3} (e^{-2a} + 2a - 1)$$

Ex 6:

$$1/ x \geq 0, h(t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

$$0 \leq h(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t) \text{ continue, int sur } \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow h \text{ int sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{on pose } = f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$2) f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) dt \text{ avec:}$$

$$g(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[$$

$$x \neq 0 \forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto g(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

$$\text{continue sur } \mathbb{R}_+.$$

$$* \forall x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto g(x,t) = h(t) \text{ continue}$$

$$\text{vérifiant (H.D) (voir 1)}$$

$$\underline{\text{Q.E.D.}} = f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.$$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$* f(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t) dt \text{ avec:}$$

$$h_x(t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}, \forall t \in [0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases} = g(t)$$

g c.p.m sur $[0, +\infty[$.

$$|h_x(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t) \text{ continue } \geq 0 \text{ et int sur } [0, +\infty[$$

$$\text{T.C.D} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{g(t)}_0 dt = 0$$

$$3) a/ f(x) = \int_0^{+\infty} g(x,t) dt \text{ avec.}$$

$$g(x,t) = \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, +\infty[$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto g(x,t) \text{ de classe } \mathcal{E}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto g(x,t) \text{ continue, int sur } [0, +\infty[\text{ d'après (1)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$$

continue sur $[0, +\infty[$.

$$\text{soit } [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a,b],$$

$\forall t \in [0, +\infty[$ on a:

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-at^2} \leq e^{-at^2} = \varphi(t)$$

φ continue, ≥ 0 et int sur $[0, +\infty[$

$$(t^2 \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0)$$

$\mathcal{Q} = \mathcal{F}$ de classe $\mathcal{E}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{et } f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

$$b/ \forall x > 0, f'(x) - f(x) =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt =$$

$$- \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} (t^2 + 1) dt =$$

$$- \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \xrightarrow{\text{c.v}} \text{on pose } u = \sqrt{x} t \quad t = \frac{1}{\sqrt{x}} u$$

$$= - \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} du = - \frac{I}{\sqrt{x}}$$

$$\text{avec } I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \text{intégrale de Gauss}$$

f vérifie sur $]0, +\infty[$, l'éq diff =

$$(E) = y' - y = -\frac{I}{\sqrt{x}}$$

$$c/ (E) = y' - y = -\frac{I}{\sqrt{x}}$$

$$y' = y - \frac{I}{\sqrt{x}}$$

$$c'(x) e^x + c(x) e^x - c(x) e^x = -\frac{I}{\sqrt{x}} e^x$$

$$c'(x) = \frac{-I/\sqrt{x}}{e^x}$$

$$c(x) = \int \frac{-I/\sqrt{x}}{e^x} dx$$

$$(E_H) = y' = y \Rightarrow y_H = c \cdot e^x / c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{on pose } y_p = c(x) e^x$$

$$y_p \text{ vérifie (E) lorsque: } c(x) = \int \frac{-I/\sqrt{x}}{e^x} dx$$

$$c(x) = -I \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

une primitive

$$\text{or } t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \text{ int en } 0(+\infty) \text{ on peut}$$

$$\text{prendre } c(x) = -I \int_{+\infty}^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$c(x) = I \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$\Rightarrow y_p = \left(I \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right) e^x$$

$$\Rightarrow \text{on pose } t = u^2 \\ u = \sqrt{t}$$

$$y_p = \left(I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} du \right) e^x \\ = \left(2I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) e^x$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$= c e^x + \left(2I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) e^x / c \in \mathbb{R}$$

$$\exists c \in \mathbb{R} / f(x) = c e^x + \left(2I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) e^x \\ \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\underbrace{e^{-x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} f(x) = c + 2I \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

$$x \rightarrow +\infty : c = 0$$

$$\text{donc } f(x) = \left(2I \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) e^x$$

$$\forall x \in]0, +\infty[.$$

f continue en 0

$$\Rightarrow x \rightarrow 0^+ : f(0) = \frac{\pi}{2} = 2I^2$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ car } I \geq 0$$