

Séries entières et familles sommables

Exercice 1 :

Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières :

$$1) \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} x^{3n},$$

$$2) \sum_{n \geq 2} \frac{2n^2}{n-1} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) x^{3n},$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^{2n+1},$$

$$4) \sum_{n \geq 1} z^{n^2},$$

$$5) \sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n,$$

$$6) \sum_{n \geq 1} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) z^n,$$

$$7) \sum_{n \geq 1} n 2^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} z^{2n},$$

$$8) \sum_{n \geq 1} (1+i)^n z^n.$$

Exercice 2 :

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de chacune des séries entières :

$$1) \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1} x^{2n},$$

$$2) \sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n} x^{2n},$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 3}{n!} x^n,$$

$$4) \sum_{n \geq 0} (n+1) \cos(an) x^n,$$

$$5) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2},$$

$$6) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 3 :

Montrer que f est développable en série entière et donner le rayon de convergence. Calculer $f^n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$(i) \quad f(x) = \ln\left(\frac{2+x^2}{1-2x^2}\right),$$

$$(ii) \quad f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

$$(iii) \quad f(x) = \sin(2x) \cos x.$$

Exercice 4 :

Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^n(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. Développer en série entière la fonction φ et calculer le rayon de convergence où :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

2. On pose :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\forall x > 2$, la fonction : $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\forall x \in]2, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} F(t)e^{-xt} dt = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Exercice 6 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^\pi e^{-ix \cos \theta} d\theta.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : xy'' + y' + xy = 0$.
2. Déterminer les fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.
3. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^\pi (\cos \theta)^n d\theta$.

Exercice 7 :

On définit la suite (w_n) par : $w_0 = 1$, $w_1 = 0$ et $2nw_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2}$, $\forall n \geq 2$.

1. Prouver que $\forall n \geq 2$, $1/2n \leq w_n \leq 1$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$. On note W sa somme.
3. Montrer que W vérifie l'équation différentielle : $2(1-x)y' - xy = 0$. Déterminer $W(x)$.

Exercice 8 : F.S

Dans chacun des cas suivants montrer que la famille est sommable et calculer sa somme.

(1) $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$, (2) $\left(\frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*}$ on admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 9 : F.S

On pose pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}.$$

1. Montrer que φ est bien définie sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n.$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

2. En déduire que φ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et déterminer son $DL_{10}(0)$.

Exercice 10 : F.S

On pose :

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right] \quad \text{et} \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Justifier la convergence et calculer la somme de la série :

$$\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1).$$

2. Démontrer que pour $|z| < 2$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^2}{k(k-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) z^n.$$

3. Montrer que θ est développable en série entière sur $]-1,1[$ définie par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \theta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Ex 1:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} x^{3n}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1} |x|^{3n+3}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n |x|^{3n}} \rightarrow \text{D'Alembert série entière}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} |x|^3 = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n |x|^3$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n |x|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e |x|^3$$

$$\left. \begin{array}{l} e |x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[3]{e} \\ \Rightarrow \sum U_n \text{ conv} \\ e |x|^3 > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ \Rightarrow \sum U_n \text{ div} \end{array} \right\} R = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

Ex 3:

$$i/ f(x) = \ln \left(\frac{2+x^2}{1-x^2} \right) \quad \text{> 0 pour séparer ln}$$

$$= \ln(2+x^2) - \ln(1-x^2)$$

$$= \ln(2) + \ln \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) - \ln(1-x^2)$$

$$\left| \frac{x^2}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| < \sqrt{2} \\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[, \text{ on a :}$$

$$f(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n +$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x^2)^n}{n}$$

$$= \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + 2^n \right) x^{2n}$$

$$f(0) = \ln(2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(2n)}(0) = (2n)! \times \frac{1}{n} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + 2^n \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(2n+1)}(0) = 0.$$

$$ii/ \arctan \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = f(x)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2}$$

$$= \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{\frac{(1+x)^2 - (1-x)^2}{(1+x)^2}}$$

$$= \frac{-2}{2+2x^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\exists c \in \mathbb{R} / f(x) = -\arctan(x) + c$$

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x)$$

$$x=0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$f(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$f^{(2n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)}$$

$$\Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \cdot (2n)!$$

$$iii/ f(x) = \sin(ax) \cos x$$

$$\Delta: \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (\sin(3x) + \sin(x))$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3^{2n+1} + 1)}{2(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n}{2} (3^{2n+1} + 1), \forall n \in \mathbb{N}$$

Ex 4:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(1)

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$$

$$\forall x < 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sin(\sqrt{-x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \frac{(-x)^n}{(2n+1)!}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}, R = +\infty$$

donc f de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{et } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{(2n+1)!} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!}{(2n+1)!}$$

Ex 1 :

$$2) \sum_{n \geq 2} \underbrace{\frac{2n^2}{n-1} \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}_{a_n} x^{3n}$$

$$U_n = a_n x^{3n}$$

$$a_n \sim 2n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim 2n \times \frac{-2}{n+1} \sim -4$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} x^3 \sim \frac{4}{4} x^3 = x^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = x^3$$

$$|x^3| < 1 \text{ c.à.d } |x| < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$|x^3| > 1 \text{ c.à.d } |x| > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ d'v}$$

$$\Rightarrow R = 1.$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \underbrace{C_{2n}^n}_{U_n} x^{2n+1}$$

$$U_n = C_{2n}^n x^{2n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n+1}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} |x|^2$$

(2)

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4|x|^2$$

$$4|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$4|x|^2 > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{2} \Rightarrow \sum U_n \text{ d'v}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

$$4) \sum_{n \geq 1} x^{n^2}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|x|^{(n+1)^2}}{|x|^{n^2}} = |x|^{2n+1}$$

$$\Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ d'v}$$

$$R = 1$$

$$5) \sum_{n \geq 1} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{a_n} x^n$$

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = n^{-1/2} \times 1$$

$$\sum a_n x^n \text{ a m. rayon que } \sum_{n \geq 1} x^n$$

donc $R = 1$. série géo

$$6) \sum_{n \geq 1} \underbrace{\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right)}_{a_n} x^n$$

$$a_n = \sqrt[n]{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

(+\infty)^0 = F.I

$$= e^{\frac{\ln(n)}{n}} \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1+\frac{1}{n})} - 1 \right)$$

$$a_n \sim 1 \left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) \sim \frac{1}{n^2} = n^{-2} \times 1$$

$$\sum a_n x^n \text{ de m. rayon que la}$$

série $\sum x^n$ donc $R = 1$.

$$7) \sum_{n \geq 1} \underbrace{n x^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}_{U_n} x^n$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(n+1) x^{n+1}}{n x^n} |x|^2 \rightarrow 2|x|^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2|z|^2 < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.} \\ 2|z|^2 > 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sum U_n \text{ div.} \end{array} \right\} R = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$8/ \sum_{n \geq 1} (1+i)^n 2^n \text{ de rayon } R = \frac{1}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

-Ex 2:

$$4/ \sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1} x^{2n}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \sim \frac{(-1)^n}{n} \\ U_n = a_n x^{2n} \end{array} \right\} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} x^2 \sim \frac{1}{n+1} x^2 \sim \frac{1}{n} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.} \\ x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ div.} \end{array} \right\} R = 1.$$

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2-1} x^{2n} \text{ D.E.S.}$$

$$\frac{n-3}{n^2-1} = \frac{n-3}{(n-1)(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} = \frac{-1}{n-1} + \frac{2}{n+1} \quad S(0) = 0 \quad \forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\} :$$

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n-1} x^{2n} + \frac{2(-1)^n}{n+1} x^{2n} \right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} x^{2n} + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n+2} + 2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n-2}$$

$$= -x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^2)^n + \frac{2}{x^2} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x^2)^n$$

$$= -x^2 \ln(1+x^2) + \frac{2}{x^2} \left(\ln(1+x^2) - x^2 + \frac{x^4}{2} \right) \text{ que la série } \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ donc } R = +\infty$$

$$= \left(\frac{2}{x^2} - x^2 \right) \ln(1+x^2) - 2 + x^2$$

$$U = S(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{x^2} + x^2 \right) \ln(1+x^2) - 2 + x^2 & \text{si } x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$a_n \sim \frac{e^n}{n}$$

$$U_n = a_n x^{2n}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} x^2 \sim \frac{\frac{e^{n+1}}{2(n+1)}}{\frac{e^n}{2n}} x^2$$

$$\sim \frac{e n}{n+1} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } e x^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.} \\ \text{si } e x^2 > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \sum U_n \text{ div.} \end{array} \right\} R = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sh(n)}{n} x^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{n} x^{2n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e x^2)^n}{n} - \frac{(e^{-1} x^2)^n}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e x^2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{-1} x^2)^n}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\ln(1 - e x^2) + \ln(1 - e^{-1} x^2) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \frac{x^2}{e}}{1 - e x^2} \right)$$

$$3/ \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 2n + 3}{n!} x^n$$

$$a_n \sim \frac{n^2}{n!} \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ est de } \hat{m} \text{ rayon}$$

$$\frac{x^4}{2} \text{ que la série } \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ donc } R = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n!} x^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) - n + 3}{n!} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n(n-1)}{n!} x^n - \frac{n}{n!} x^n + \frac{3}{n!} x^n \right) \\
 &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + 3e^x \\
 &= x^2 e^x - x e^x + 3e^x = (x^2 - x + 3)e^x
 \end{aligned}$$

$$5/ \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}}_{a_n} x^{2n+2}$$

$$a_n \sim \frac{(-1)^n}{4n^2}, \quad U_n = a_n x^{2n+2}$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} x^2 \sim \frac{1}{4(n+1)^2} x^2 \sim \frac{1}{4n^2} x^2$$

$$\sim \frac{n^2}{(n+1)^2} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$$

$$\text{si } |x^2| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.} \\ \text{si } |x^2| > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow \sum U_n \text{ div.} \quad R=1$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}$$

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan(x)$$

$$S(x) = \underbrace{S(0)}_0 + \int_0^x S'(t) dt$$

$$= \int_0^x \arctan(t) dt$$

$$= \text{I.P.P.} \left[t \arctan(t) \right]_0^x - \int_0^x t \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]_0^x$$

$$= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$4/ \sum_{n \geq 0} \underbrace{(n+1) \cos(an)}_{a_n} x^n$$

$a_n \sim n \cos(an) \Rightarrow \sum a_n x^n$ a m. rayon
que la série $\sum_{n \geq 0} \cos(an) x^n$

$$x_0 = 1, \quad \sum \cos(an) x_0^n$$

$$\text{or } \begin{cases} \cos(an) x_0^n = \cos(an) : \text{bornée} \\ \Rightarrow |x_0| \leq R \end{cases} \quad \text{donc } \underline{R \geq 1}$$

$$x_0 = 1, \quad \cos(an) x_0^n = \cos(an) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

en effet, supposons que =

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(an) = 0$$

$$\text{donc } = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2an) = 0 \quad \text{or}$$

$$\cos(2an) = 2 \cos^2(an) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1 \neq 0 \quad \text{absurd.}$$

$$\text{donc } = |x_0| \geq R \Rightarrow \underline{1 \geq R}$$

$$\underline{R = 1}.$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cos(an) x^n = G'(x)$$

$$\text{avec: } G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(an) x^{n+1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(an) x^n$$

$$= x \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{ian} \cdot x^n \right)$$

$$= x \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{ia} x)^n \right)$$

$$= x \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - e^{ia} x} \right)$$

$$= x \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(1 - \cos(a)x) - i \sin(a)x} \right)$$

$$= x \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - \cos(a)x) + i \sin(a)x}{(1 - \cos(a)x)^2 + (\sin(a)x)^2} \right)$$

$$= x \frac{1 - \cos(ax)}{1 - 2\cos(ax)x + x^2}$$

$$\text{donc} : S(x) = G'(x) = \left(\frac{x - \cos(ax)x^2}{x^2 - 2\cos(ax)x + 1} \right)'$$

$$6) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad , \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ div à termes } \geq 0$$

$$\frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\sim \ln(n+1) \sim \ln(n)$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \sim \frac{\ln(n)}{\ln(n)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\text{avec} : a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ avec} : a_0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1$$

$$= \sum_{k=0}^n U_k v_{n-k}$$

$$\text{avec} = \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

$$v_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est la série entière

produit des 2 séries entières

$$\sum_{n \geq 0} U_n x^n, \sum_{n \geq 0} v_n x^n$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n} \text{ et } \sum_{n \geq 0} x^n \text{ de rayons } 1$$

$$\text{donc} : \forall |x| < 1, S(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

$$S(x) = - \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Ex 5:

$$1) \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Rappel} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$$

$$\forall |x| < 1$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \text{ donc} : |2x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$$

$$2) F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} U_n$$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} x^2 = \frac{1}{(n+1)^2} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum U_n$ c.v $\forall x \in \mathbb{R}$ donc

la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ de rayon $R = +\infty$

$\Rightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2}$$

$$F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(n!)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow F$ convexe sur $\mathbb{R}$.

b/ soit $x > a$,

$$\forall t \in [0, +\infty[, F(t) e^{-xt} = e^{-xt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} e^{-xt}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

$$\text{avec} : f_n(t) = \frac{t^{2n} e^{-xt}}{(n!)^2}, \forall t \in [0, +\infty[$$

* $\sum f_n$ c.s sur $[0, +\infty[$ vers la fct $F(t) e^{-xt}$ continue sur $[0, +\infty[$

* $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ intégrable sur $[0, +\infty[$
(en effet : $t^2 f_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$)

$$* U_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$$

$$mq = \sum U_n \text{ c.v. ?}$$

$$U_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n} e^{-xt}}{(n!)^2} dt$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-xt} dt$$

$$\text{c.v. : } u = xt \\ \Rightarrow t = \frac{1}{x} u$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{2n} e^{-u} \frac{1}{x} du$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \frac{1}{x^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n} e^{-u} du = \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$$

Δ : à connaître : $\Gamma(2n+1) = (2n)!$

$$\left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{(2n+2)! (n!)^2 x^{2n+1}}{((n+1)!)^2 x^{2n+3} (2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{x^2 (n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} < 1$$

car $x > 2$
(huyv)

$$\Rightarrow \sum U_n \text{ c.v.}$$

$\Rightarrow$ Th d'intégration termes à termes :
la fct $t \mapsto F(t) e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} F(t) e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 x^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \times \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}$$

$$\text{avec : } 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \text{ car : } x > 2$$

$$= \frac{1}{x} \wp\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$\int_0^{+\infty} F(t) e^{-xt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Ex 7 :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 0 \end{cases} \quad \forall n \geq 2, \quad 2n w_n = 2(n-1) w_{n-1} + w_{n-2} \quad (1)$$

$$1/ \text{mq} = \forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2n} \leq w_n \leq 1 \quad (P_n)?$$

$$(1) \Rightarrow 4 w_2 = 2 w_1 + w_0 = 1$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{1}{4}$$

$$(1) \Rightarrow 6 w_3 = 4 w_2 + w_1 = 1$$

$$\Rightarrow w_3 = \frac{1}{6} \quad (P_2) \text{ et } (P_3) \text{ sont vrais.}$$

supposons que : (P_{n-1}) et (P_{n-2}) sont vrais
et mq = (P_n) est vrai ?

$$\Rightarrow \frac{1}{2(n-1)} w_n \leq \frac{1}{2(n-1)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2(n-2)} \leq w_{n-2} \leq 1 \quad (3)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{2(n-2)} \leq \frac{2(n-1) w_{n-1} + w_{n-2}}{2(n-1)} \leq \frac{2(n-1) + 1}{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2(n-1)} < 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2n w_n \leq 2n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq w_n \leq 1$$

$$(Q) = \forall n \geq 2, \quad \frac{1}{2n} \leq w_n \leq 1.$$

2/ soit R : rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$.

$$\text{Rappel} = \sum a_n x^n : R, \quad 0 \leq a_n \leq b_n \\ \sum b_n x^n : R' \Rightarrow \underline{R \geq R'}$$

$$0 \leq \frac{1}{2n} \leq w_n \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{Rayon} \left(\sum \frac{x^n}{2n} \right) \leq R \leq \text{Rayon} \left(\sum x^n \right)$$

$\frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad 1$

$$\Rightarrow R=1$$

$$W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

$$\exists \text{ m.q. } \forall x \in]-1, 1[,$$

$$2(1-x)w'(x) - xw(x) = 0 \quad ?$$

$$2(1-x)w'(x) - xw(x) =$$

$$2w'(x) - 2xw'(x) - xw(x) =$$

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n w_n x^{n-1} -$$

$$x \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)w_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nw_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1}x^n$$

$$2w_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(2(n+1)w_{n+1} - 2nw_n - w_{n-1})}_{=0 \text{ (d'après 1)}} x^n =$$

$$= 0.$$

$\underline{Q}$ = la fct w vérifie l'éq :

$$(E) : 2(1-x)y' - xy = 0 \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

• Résolution de (E) :

$$(E) : y' = \frac{x}{2(1-x)} y$$

$$y = c e^{\int \frac{x}{2(1-x)} dx} \quad / \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{or} : \int \frac{x}{2(1-x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{x}{-1+x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1+1}{x-1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int 1 + \frac{1}{x-1} dx \quad \text{car } x \in]-1, 1[$$

$$= -\frac{1}{2} \left(x + \ln(1-x) \right) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

$$\Rightarrow y = c \cdot e^{-\frac{x}{2}} e^{-\frac{1}{2} \ln(1-x)}$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{x}{2}} \quad / \quad c \in \mathbb{R}$$

sol^e générale de (E). (7)

$$\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in]-1, 1[,$$

$$w(x) = \frac{c}{\sqrt{1-x}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\sim w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \Rightarrow w(0) = w_0 = 1$$

$$\Rightarrow c = w(0) = 1 \Rightarrow \underline{c=1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad w(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x}}.$$

Ex 6 :

$$f(x) = \int_0^\pi e^{-ix \cos \theta} d\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{x^n} \quad f(x) = \int_0^\pi h(x, \theta) d\theta$$

$$\text{avec} : h(x, \theta) = e^{-ix \cos \theta},$$

$$\forall (x, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \text{ segment}$$

$$* h(x, \theta) = e^{-ix \cos \theta} \text{ continue sur } \mathbb{R} \times [0, \pi]$$

$$* \forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, \theta) = (-i \cos \theta)^k e^{-ix \cos \theta}$$

$$\text{existe et continue sur } \mathbb{R} \times [0, \pi].$$

$$\underline{Q}$$
 = la fct f est de classe E^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$* \text{m.q.} = \text{la fct } f \text{ vérifie sur } \mathbb{R} \text{ l'éq}$$

$$(E) = xy'' + y' + xy = 0.$$

$$f(x) = \int_0^\pi e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

$$f'(x) = \int_0^\pi -i \cos \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

$$f''(x) = \int_0^\pi -\cos^2 \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

$$\text{m.q.} = \forall x \in \mathbb{R}, x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0.$$

$$x f''(x) + x f(x) = x \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) e^{-ix \cos \theta} d\theta$$

$$= \int_0^\pi x \sin^2 \theta e^{-ix \cos \theta} d\theta.$$

$$= -i \int_0^\pi \underbrace{ix \sin \theta e^{-ix \cos \theta}}_{\text{pr}} \underbrace{\sin \theta}_{\text{pr}} d\theta$$

$$\Rightarrow \text{I.p.p :}$$

$$-i \left(\underbrace{\left[e^{-ix \cos \theta} \sin \theta \right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi e^{-ix \cos \theta} \cos \theta \, d\theta = \right.$$

$$\left. \int_0^\pi i \cos \theta e^{-ix \cos \theta} \, d\theta = -f'(x) \right.$$

$$\Rightarrow x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\underline{Q} = f$ vérifie sur $\mathbb{R}$ l'éq diff

$$(E) : x y'' + y' + x y = 0.$$

Ex 8 :

$$1/ u_{i,j} = \left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$$

on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / i+j=n\}$

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

$$\text{or } F_n = \{(i, n-i) \in \mathbb{N}^2 / 0 \leq i \leq n\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, F_n$ ensemble fini

(card $(F_n) = n+1$) donc 1/ vrai

$$\begin{aligned} S_{F_n}(u) &= \sum_{(i,j) \in F_n} u_{i,j} = \sum_{(i,j) \in F_n} \frac{i+j}{2^{i+j}} \\ &= \sum_{(i,j) \in F_n} \frac{n}{2^n} = \underbrace{\text{card}(F_n)}_{=n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{n(n+1)}{2^n} \\ &= a_n \end{aligned}$$

mq = $\sum a_n$ c.v.?

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n+2)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} < 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum a_n$ c.v. car d = $\sum_{n \geq 0} S_{F_n}(u)$ c.v

donc = la famille $u = \left(u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable de somme :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{+\infty} S_{F_n}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall |x| < 1, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} \right) = 8.$$

$$(2) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = 8.$$

$$2/ \left(U_{p,q} = \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$$

* mq $(U_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \sum_{p \geq 0} |U_{p,q}| = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$$

converge car : $\frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^2}$

$$\text{et on a : } S_q = \sum_{p=0}^{+\infty} |U_{p,q}|$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(1+p+q^2)}$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{1+p+q^2}$$

télescopie
= $\frac{1}{q^2}$

$$\Rightarrow \sum_{q \geq 2} \frac{1}{q^2} \text{ converge}$$

d'où la suite double $(U_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

$$\begin{aligned} \text{et } S &= \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} U_{p,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} U_{p,q} \right) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Ex 9: $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k}$

$\forall x \left| \frac{x^k}{1-x^k} \right| \sim |x|^k \quad (1)$

$0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow \sum |x|^k \text{ c.v.} \xRightarrow{(1)} \sum \left| \frac{x^k}{1-x^k} \right| \text{ c.v.}$

$\Rightarrow \sum \frac{x^k}{1-x^k} \text{ c.v. donc } \varphi \text{ est bien}$

définie sur $] -1, 1[$.

* $\forall x \in]-1, 1[$, on a:

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} (x^k)^m \right)$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} x^{km} \right)$

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} U_{k,m} \right) \text{ avec } U_{k,m} = x^{km}$

mq la suite double $(U_{k,m} = x^{km})_{\substack{(k,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}}$ sommable?

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{m \geq 1} |U_{k,m}| = \sum_{m \geq 1} |x^{km}| = \sum_{m \geq 1} |x|^m \text{ c.v.}$

car $0 \leq |x|^k < 1$. et on a:

$S_k = \sum_{m=1}^{+\infty} |U_{k,m}| = \sum_{m=1}^{+\infty} (|x|^k)^m = \frac{|x|^k}{1-|x|^k} \sim_{k \rightarrow +\infty} |x|^k$

$\sum |x|^k \text{ c.v.} \Rightarrow \sum S_k \text{ c.v.}$

donc $(U_{k,m})_{(k,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable.

d'où, $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sum_{\substack{(k,m) \in \\ \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}} U_{k,m}$

on pose: $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = \{ (k,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \}$

tg: $k \cdot m = n$

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On a: $F_n = \left\{ (k, \frac{n}{k}) / k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \text{ divise } n \right\}$

F_n fini et $\text{card}(F_n) = d(n) =$ le nb de diviseurs de n

TR de sommation par paquets:

$\varphi(x) = \sum_{(k,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} U_{k,m} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k,m) \in F_n}} x^{km} \right)$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \text{card}(F_n) x^n$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n. \quad (2)$

2) $\forall x \in]-1, 1[$, (2) $\Rightarrow$ la série entière

$\sum_{n \geq 1} d(n) x^n$ c.v. de rayon $R \geq 1$

On a: $d(n) \leq n \Rightarrow 1 \leq R \leq 1$ donc: $R=1$.

donc: $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$

$\forall x \in]-R, R[=]-1, 1[$ est de classe $\mathcal{E}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

* $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{10} d(k) x^k, \forall x \in]-1, 1[$

avec: $R_{10}(x) = \sum_{k=11}^{+\infty} d(k) x^k$

$= x^{10} \times \sum_{k=11}^{+\infty} d(k) x^{k-10} = \theta(x^{10})$

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{10} d(k) x^k + \theta(x^{10})$

c'est le DL(0) de φ .

$\left. \begin{array}{l} d(1) = 1 \\ d(2) = 2 \\ d(3) = 2 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 2 \\ d(6) = 4 \\ d(7) = 2 \\ d(8) = 4 \\ d(9) = 3 \end{array} \right\} \varphi(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \theta(x^{10})$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) \sim \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\geq 0)$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ c.v.} \Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) \text{ c.v.}$$

$$\begin{aligned} * S &= \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=2}^{+\infty} U_{n,m} \end{aligned}$$

$$\text{avec: } U_{n,m} = \frac{1}{m^n}, \forall (m,n) \geq 2$$

mq = la suite double $\left(U_{n,m} = \frac{1}{m^n}\right)_{\substack{n \geq 2 \\ m \geq 2}}$ est sommable ?

$$\begin{aligned} * \forall n \geq 2, \text{ la série } \sum_{m=2}^{+\infty} |U_{n,m}| \\ = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} \text{ c.v.} \\ \text{(série de Riemann)} \\ n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et on a: } S_n &= \sum_{m=2}^{+\infty} |U_{n,m}| \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} = \zeta(n) - 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} S_n = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) \text{ c.v.}$$

donc $\left(U_{n,m} = \frac{1}{m^n}\right)_{\substack{n \geq 2 \\ m \geq 2}}$ suite double sommable.

$$\begin{aligned} \text{d'où: } S &= \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) \\ &= \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{m^n} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n \right)$$

$$= \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^2}{1 - \frac{1}{m}} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m(m-1)}$$

$$= \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \text{ télescopie} = 1 - 0 = 1.$$

$$\underline{Q} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1.$$

$$2) |z| < 2,$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k(z-k)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(z/k)^k}{(1 - z/k)}$$

$$\text{avec: } \forall k \geq 2, \left| \frac{z}{k} \right| \leq \frac{|z|}{2} < 1$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{k} \right)^n \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} U_{k,n} \right)$$

$$\text{avec: } (U_{k,n} = \left(\frac{z}{k} \right)^n)_{\substack{k \geq 2 \\ n \geq 2}}$$

mq: la suite double $(U_{k,n} = \left(\frac{z}{k} \right)^n)_{\substack{k \geq 2 \\ n \geq 2}}$ est sommable.

$$\forall k \geq 2, \sum_{n \geq 2} |U_{k,n}| = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{|z|}{k} \right)^n \text{ c.v. (géométrique)}$$

avec:

$$\frac{|z|}{k} \leq \frac{|z|}{2} < 1$$

$$\text{et } S_k = \sum_{n=2}^{+\infty} |U_{k,n}| = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{k} \right)^n = \frac{\left(\frac{|z|}{k} \right)^2}{1 - \frac{|z|}{k}} \sim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{|z|}{k} \right)^2$$

$\Rightarrow \sum S_k$ c.v. donc:

$(U_{k,n})_{\substack{k \geq 2 \\ n \geq 2}}$ est sommable.

$$\text{d'où: } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k(z-k)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} U_{k,n} \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^n}{k^n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} z^n \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \right)_{\zeta(n)-1}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n)-1) z^n.$$

$$3) \theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right)$$

$$\Delta: \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$x - \ln(1+x) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

$$\text{on a: } \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n} \leq |x| < 1 \text{ donc:}$$

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{n} \right)^k}{k} \right)_{U_{n,k}}$$

$$\text{mq: } (U_{n,k} = (-1)^k \frac{x^k}{k n^k})_{\substack{n \geq 1 \\ k \geq 2}} \text{ sommable?}$$