

Integration :

(convergence)

Existence d'un Intégrable. $\int_E f(t) dt$

existe à vérifier que f est intégrable au $V(x)$ et $V(\epsilon)$

à toute f continue sur un segment est intégrable.

à toute f constante est intégrable.

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f$$

cas de convergence

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$$

$$F \text{ est } C^1, F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

f est prolongeable par continuité au $V(a)$.

f est continue alors f est intégrable au voisinage de a .

$$\int_a^{+\infty} f \text{ ou } \int_a^{+\infty} f \rightarrow 0 \text{ iff } \int_a^{+\infty} f' = -\frac{1}{t^2}$$

l'intégral de Riemann :

sur $[a, +\infty[$ $\alpha > 1$

sur $]0, a]$ $\alpha < 1$

sur $]a, a+1]$ $\alpha < 1$

sur $[b-1, b]$ $\alpha < 1$

Regle de comparaison :

$0 \leq f(x) \leq g(x)$: g est intégrable alors f est aussi.

$f(x) \sim g(x)$: g est intégrable alors f est aussi.

$f = o(g)$ ou $f = O(g)$

Intégrale de Bertrand : $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$

$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ continue sur $[a, +\infty[$.

si $\alpha < 1$, on pose $\alpha < \beta < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha (\log x)^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\beta-\alpha}}{(\log x)^\beta} = +\infty$

Alors $x \rightarrow \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$

de plus :

$f = h \circ g$ (parrocchia)

Rq : h et g sont intégrables ne garantit que f est aussi (Zuplice)
toute f bornée sur un intervalle bornée est intégrable

$$Df : \{x \in \mathbb{R} \mid \int f(x) dx\}$$

Riemann $\leftrightarrow$ intégral équivalent

f est intégrable $\Leftrightarrow \int f$ est abs convergente $\Leftrightarrow \int |f|$ converge

Rq : $\int_a^{+\infty}$ n'existe pas cette forme d'intervalle

les formes possibles :

$$\int_a^{+\infty}$$

$$\int_a^b \text{ n'existe pas}$$

$$\int_a^{a+\epsilon}$$

$$\int_b^{b+\epsilon}$$

densité

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt \quad \left(\int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \right)$$

$$\text{ex: } f_n(t) = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \quad t \in]0, +\infty[$$

$f_n(t)$ continue sur $]0, +\infty[$

$$|f_n(t)| \leq \frac{e^{-2t}}{1+t^2} = \varphi(t)$$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) \in \mathbb{R}$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$
 $\varphi(t) = O(\frac{1}{t^2})$, $2 > 1$ $\int_0^{+\infty}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \pi$$

Rq : toujours vérifier la continuité

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\beta-2}}{(\log x)^\beta} = +\infty$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \text{ diverge}$$

• si $\alpha > 1$: $1 < \alpha < 2$. alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(\log x)^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1} (\log x)^p} = 0$.

• si $\alpha = 1$: on pose $F(x) = \int_a^x \frac{1}{t(\log t)^p} dt$.

équivalence :

↳ comparaison entre
2 var ou 1 var
et une de au
voisinage de a.

$(1-t)^{x-1} \sim \frac{1}{\Gamma(x)} e^{-xt}$
Alors $\int_0^1 f(t) dt$

problèmes de par
↳ admet une limite
⇒ intégrable.

• pour $p = 1$: $F(x) = \int_a^x \frac{1/t}{\log t} dt = \log(\log(x)) - \log(\log(a))$
↳ n'est pas intégrable.

et somme ≥ 0 , $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t \log t} dt$ diverge.

• pour $p \neq 1$: $F(x) = \frac{(\log x)^{-p+1}}{-p+1} + \frac{\log(a)^{-p+1}}{-p+1}$

• si $p < 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$; $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^p (\log t)^p} dt$ diverge

• si $p > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\log(a)^{-p+1}}{-p+1}$; $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^p (\log t)^p} dt$ converge

→ $\int_0^1 f(t) dt$ converge (direct).

→ $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge $\Leftrightarrow x > 0$.

• $f(x) > 0$.
• f est continue.

$\int_a^b f(t) dt$ converge est vaut $= 0$
 $\int_B = 0$.

* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$
Gamma
↳ $\Gamma(1) = 1$
↳ $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (itération)
 $\Gamma(1) = 1$

⇒ $\forall t \in [a, b] : f(t) = 0$

$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$
Beta = $\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ pp 2013
central 2015

Intégration par partie : $\int_a^b u' v = [uv]_a^b - \int_a^b u v'$
 $\begin{cases} u' : \dots \rightarrow u' \\ u : \dots \rightarrow u \end{cases}$ * $\int f(x) g(x) dx$
↳ dérivation et intégration

Intégrale de Wallis :
calculer I_n (38) en f
de I_n + récurrence sur
 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t$

changement de variable :

• $\varphi(t)$ est C^1 sur I , $\varphi'(t) \neq 0$.

• intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^k} dt$ $\int t = u^2$
 $2t dt = 2u du$

• $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{\ln^n x}{1+x^2} dx$

$F(x) = \int_{u(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt$

$F'(x) = \varphi'(x) f(\varphi(x)) - u'(x) f(u(x))$

$(\log)' = g' \times f' \log$

taux d'accroissement
(problèmes par 5)

$\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n} \ln a}$
 $= (e^{\ln a})^{\frac{1}{n}}$

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{\ln^n x}{1+x^2} dx$

$\frac{t^x - 1}{\ln t} \rightarrow 0$ $\leftarrow x - a$ $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a)$

→ f est dérivable en a.

$\lim_{x \rightarrow a} f' = \lim_{x \rightarrow a} f'$
der en gauche et a d te
ne suffit pas!

• $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T-périodique :

$\forall a : \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$

• $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire

$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

• f est pair $\Rightarrow f'$ est impaire.

• f est impaire $\Rightarrow f'$ est pair.

Primitive:

équivalences:

$$e^t \sim 1$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$$Rq: \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^2 - 1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx$$

$$\int_0^n x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^n = \frac{1}{n+1} n^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} n^{n+1} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \rightarrow \tan(x); \int \frac{a}{2^n} \rightarrow \frac{a}{2^{n-1}(1-n)}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \arctan x; \int 1 + \log(x) \rightarrow \log(x^2); \int a 2^n \rightarrow \frac{a}{(n+1)} 2^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arcsin x; \int \cos(x) \rightarrow \sin(x); \int \frac{u'}{u^n} \rightarrow \frac{u'^{n+1}}{1-n}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \arccos x; \int \sin(x) \rightarrow -\cos(x); \int \frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \ln t \sim t - 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{1+\alpha} (\log n)^k}{n^\alpha} = 0$$

Developpement limite:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\log x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

③ applique l'intégrale à une inégalité,

somme, suite de fonction:

④ → vérifie la continuité, sinon, prolongeable par $\leq$, sinon, limite.

⑤ → applique l'intégral.

Intégrale à paramètre: $F(x) = \int_I f(x,t) dt$

• Continuité de F:

sur J.

Rq: $F = \int f(x,t) dt$

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

• f est continue.

→ si I un segment: $(x,t) \rightarrow f(x,t) \in$ sur $J \times I$.

→ sinon: $\forall t \in I: x \rightarrow f(x,t) \in$ sur J.

• $\forall x \in J: t \rightarrow f(x,t)$ cpm sur I.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• $\forall x \in [a,b] \subset J: |f(x,t)| \leq c(t)$.

• F est C^k

sur un segment: $x \mapsto f(x,t)$ est C^k sur J .

$$\left(\frac{\partial^k f(x,t)}{\partial^k x} \text{ cpm} \right)$$

$\rightarrow t \mapsto f(x,t) \in \text{sur } I$.

$\rightarrow t \mapsto \frac{\partial^k}{\partial^k x} f(x,t) \in \text{sur } I$.

Rq

$$\int_n^{n+1} \frac{E(x)}{x^{k+1}} dx = n \int_n^{n+1} \frac{1}{x^{k+1}} dx$$

Intégrable.

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

HP 2004 2017

$$\frac{1}{x^k} \text{ intég } (1, +\infty).$$

sinon:

$\rightarrow x \mapsto f(x,t)$ est C^k .

$x \mapsto \frac{\partial^k}{\partial^k x} f(x,t)$ ~~est~~ continue (à tester et finie).

$\rightarrow t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I .

$\rightarrow t \mapsto \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial^k x}$ cpm sur I .

$\rightarrow \forall x \in [a,b] \subset J \quad \left| \frac{\partial^k f(x,t)}{\partial^k x} \right| \leq \varphi(t)$.

• F est C^∞

sur un segment: $x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur J .

$\rightarrow x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur J .

$\rightarrow t \mapsto f(x,t)$ continue sur J . (intégrable si I n'est pas un segment)

$\rightarrow t \mapsto \frac{\partial^k}{\partial^k x} f(x,t)$ cpm sur I .

sinon:

$\rightarrow \forall x \in [a,b] \subset J \quad \left| \frac{\partial^k}{\partial^k x} f(x,t) \right| \leq \varphi(t)$ intég cpm positive

Détermination des limites

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt, \quad x \rightarrow 0$$

① soit $(x_n) \rightarrow +\infty$ ($2n \in \mathbb{Z}$).

montrer alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$.

$$F(x_n) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+2n} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{b_n} dt \quad (TCD)$$

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+2n} dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{t+2n} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+2n} dt$$

$$= -\frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\left| \frac{1}{t} e^{-t^2} \right| \leq \frac{1}{t} e^{-t^2} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t^2 x^2}}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow 0$$

$$|F(x)| \leq \int_0^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{t+x} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt$$

$$\frac{0 \leq t \leq \pi}{x \leq t+x} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

* Pour $x \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-nx} = 0$$

* Pour $x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} \rightarrow +\infty$$

• Théorème de Fubini:

$$\int_I \int_J f(x,t) dt dx = \int_J \int_I f(x,t) dx dt$$

Somme:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J} U_n = \sum_{j \in J} \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n \quad x \mapsto f(x,t) \text{ est continue sur } I \times J.$$

• Riemann Lebesgue:

$$\int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow +\infty)$$

f est C^1 sur $[a,b]$.

$$\int e^{ax} = \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]$$

$$|f| \leq |g| \Rightarrow \int |f| \leq \int |g|$$

Rq: Détermination de limite

encadrement + pch majoration

CCP 2022
• Intégrale de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$$

$$\int \sin(t) e^{it} = \int \text{Im}(e^{it}) e^{it}$$

$$= \text{Im} \int e^{(1+i)t}$$

$$\rightarrow \int f(t) e^{it} = \int f(t) \cos(t) dt + i \int f(t) \sin(t) dt$$

Serie et suite de fonctions.

suite de fonction: $(f_n)_n$

- convergence simple: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$

→ convergence uniforme :

$$\|f_n - f\|_{\infty} \leq \epsilon; \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \Delta$$

- Etude de $\mathbb{R}^n$
- Majoration
- Dev. limitée

- (f_n) sont continues et f discontinue
 $\rightarrow$ pas de convergence uniforme.

$\hookrightarrow \|p_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.
 $\hookrightarrow (p_n - f)$ est bornée
 d'après $\rightarrow 0$.

f_n est C^p $\rightarrow$ f est C^p.
 f_n cos $\rightarrow$ f est C^p.
 f_n cos. (intervall d'existence $+\infty$)

$\rho_{\alpha}^{\text{est } C^{\infty}}$
 $\rho_{\alpha}^{(1)} \quad \text{cos.} \rightarrow \rho^{\text{est } C^{\infty}}$
 $\rho_{\alpha}^{(2)} \quad \text{evn}$

(f is continuous on A
 f is coll. $\rightarrow f$ is continuous on A)

si $\exists (x_n)_n$ tq :
 $f_n(x_n) - f(x_n) \not\rightarrow 0$
 $\rightarrow$ pas de convergence
 uniforme.

the Le double limite:

$$x'' \rightarrow \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1 \\ +\infty & x > 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = b_n$.

- f will never f

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} b_n$$

(-bn klinge).
• Ladmet ein liniz
du a.

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
 $\rightarrow$ pas de convergence.
 uniforme.

Th de convergence :

domine TCD $\int b_p(t) dt$

• $\Gamma \rightarrow \rho_3$ eqm.

- $t \mapsto f_n \cos \rightarrow f_{cpm}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$.
 f_n et f intégrable.

extension.

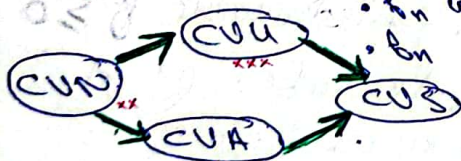
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(t) dt$$

$$= \int f(x) dx.$$

Inversion line $\leftrightarrow$ J :

- En continué en laib.
- En est uniformément.

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dt$$



Rg $x \rightarrow xx \rightarrow xxxx : CVA \rightarrow CVP [a,b] \rightarrow CVP[a,b]$
 (TIF 2020)

Séries de fonctions: $S_n = \sum f_n$.

→ convergence simple $\Leftrightarrow$ serie num converge associe.

→ konvergenz uniforme

① cas d'une série alternée:

$$B_n(x) = (-1)^n a_n(x)$$

$$\bullet |R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x)| \leq |a_{n+1}(x)| \leq a_{n+1}$$

$$\text{Qu: } \sup_{E \in \mathcal{I}(b)} |\sum b_n| \leq a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k!} \right|$$

sinon ①: $\sum f_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum \|f_n\|_\infty < \infty$ ($\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$) indépend pas de n
 $\|f_n\|_\infty = \sup |f_n(x)|$
 si $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$! $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, $\sup |f_n(x)| \leq \alpha_n$
 * continuité: pas de conv. ex: $\sum \frac{1}{n} \sin nx$
perie convergente
geo
ex
équivalence

f_n continue $\Rightarrow \sum f_n$ continue (définie).
 $\sum f_n$ conv $\Rightarrow \sum f_n$ continue (définie).
 * Inversion:
 ① limite - somme: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 ② Integral - somme: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

* Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

* Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

* Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

* Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

* Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$
 * Théorème de double limite: $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$
 * Théorème d'intégration: $\sum f_n$ conv. $\Rightarrow \int \sum f_n(x) dx = \sum \int f_n(x) dx$

Holder - Jensen :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\text{Soit } \lambda = \frac{1}{p} \text{ et } (1-\lambda) = \frac{1}{q}.$$

$$\lambda \ln(a) = \frac{1}{p} \ln(a) \text{ ou } a. \text{ ln st concave.}$$

$$\hookrightarrow e^x : a^{1/p}$$

$$a = \frac{a_1^p}{a_1^p + a_2^p}$$

$$\text{MP 2018. } a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

$$a = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \text{ puis appliquant la somme.}$$

Taylor Lagrange - avec reste d'intégrale :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) dt.$$

$$= T_n(x) + R_n(x)$$

$$\Rightarrow |f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$$

MP 2021.

$\exists c$ entre x et y .

$$T(f)(x) - T(f)(y) - (x-y)T(f)'(y) = \frac{(x-y)^2}{2} T''(f)(c).$$

$$|T(f)(x) - T(f)(y) - (x-y)T(f)'(y)| \leq \frac{|T(f)''(c)|}{2} (x-y)^2$$

$$\text{ou } T(f)(x) = T(f)(y) + (x-y)T(f)'(y) + \int_y^x (x-t)T(f)''(t) dt.$$

$$\text{Zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

$$\left(\frac{1}{n^x}\right)' = \frac{(-1)^k k!}{n^{x+k}}$$

$$D_x =]1, +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty.$$

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{x}{x-1}.$$

$$\zeta(ax) \sim a.$$

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}.$$

ccp 1008
MP 1004

zeta alternée

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$$

Rq :

converge normalement $\Rightarrow$ convergence uniforme sur I $[a, b] \subset I$

converge uniforme $\Rightarrow$ continuité (conservée).

$\sum f_n(x)$ est monotone $\Rightarrow$ admet une limite.

$\sum (x_{n+1} - x_n) \text{ cv.} \Leftrightarrow \sum x_n \text{ cv.}$

suite de polynôme :

- majorée + croissante
 - minorée + décroissante
 - majorée par un terme convergent
- $\rightarrow$ convergence.

$\rightarrow$ Dèm Weierstrass

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$(a^n - b^n) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

$$\frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1}, \quad n = C_n^{n-1}$$

polynôme de Bernoulli

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

$$B_0 = 1, \quad B_n' = n B_{n-1}$$

$$\int_0^1 B_n(t) dt = 0, \quad b_n = B_n(0).$$

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

$$b_{2p+1} = 0.$$

$$u_n = n\pi, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$\cos(u_n) = (-1)^n \hookrightarrow \cos(x) \text{ n'admet pas une limite}$$

$$\text{si } \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(u_n) = \ell \in \mathbb{R}$$

ce qui est absurde.

ccp 1008
Techo 1006

$$\bullet |x - k/n| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(k/n)| < \epsilon/2.$$

$$\bullet |x - k/n| > \alpha \Rightarrow |f(x) - f(k/n)| \leq 2 \|f\|_{\infty}.$$

$$\hookrightarrow |x - k/n|^2 > \alpha^2 \Rightarrow \frac{(x - k/n)^2}{2^2} > 1.$$

Bernstein.

$$\Rightarrow \frac{2 \|f\|_{\infty}}{2^2} \left(\frac{x(1-x)}{n} \right) \text{ etude de } f^+. \\ \Rightarrow \frac{\|f\|_{\infty}}{2nd^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\hookrightarrow$ Déf: $\exists n_0 \in \mathbb{N} /$

$\forall n > n_0$, on aura $\frac{\|f\|_{\infty}}{2nd^2} < \frac{\epsilon}{2}$

* Approximation des fonctions: $\hookrightarrow \mathcal{P}(S_n = k)$

Weierstrass: (Dém. avec poly de Bernstein)

• toute fonction continue sur un segment est limite uniforme. $\rightarrow$ CNC 2017: $d(U, \mathcal{P}) \leq \|U - P_n\|_{\infty} \rightarrow 0$
segment d'une suite de fonctions polynomiales.

$$\hookrightarrow f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}) \dots B_n(f) = \sum_{k=0}^n f(k/n) B_{n,k} \quad \text{* Hq qu'une ft n'est pas polynomiale:}$$

$\rightarrow$ par récurrence: $\exists P_n \neq 0$
tq $\forall x \geq 0$ $P_n^{(n)}(x) \neq 0$.

$\rightarrow$ f n'est pas une ft poly
ex: $f(x) = e^{-1/x}$
 $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x}$.

$$\bullet \rightarrow \exists (P_n)_n \in \mathcal{K}[x] \text{ tq: } \|P_n - f\| \rightarrow 0.$$

ex: $\|B_n - f\|_{\infty} : \text{CNC 2016 (marroc)}$

$$\bullet \bullet \rightarrow \exists P \in \mathcal{K}[x] \text{ tq } \|P - f\| \leq \epsilon \quad \sup \|P_n - f\| \rightarrow 0.$$

$\rightarrow$ fts continues par morceaux.

• toute ft cpm sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier sur celui-ci.

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{K}).$$

$$\bullet \rightarrow \exists (g_n)_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}).$$

$$\text{tq } \|g_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$$

$$\bullet \bullet \forall \epsilon > 0 \exists g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}).$$

$$\text{tq } \|g - f\|_{\infty} < \epsilon.$$

$$\textcircled{a} f = \text{Solé} \rightarrow f, \text{ serie de } f^+, \dots$$

$$\rightarrow f \in \text{solé} \bullet S \subseteq \text{solé } J. \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{sur } I. \end{array} \right.$$

$$\textcircled{b} f \text{ est derivable en } a. \\ \Leftrightarrow f(a+\epsilon) = f(a) + \epsilon f'(a) + \epsilon g(\epsilon). \\ \text{tq } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(\epsilon) = 0.$$

$$\begin{matrix} x_n = a + \epsilon_n^+ \\ y_n = a - \epsilon_n^- \end{matrix} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a) \quad \text{tq } a_n \leq x_n \leq y_n.$$

* accroissements finis:

$\rightarrow$ Theoreme des acc finis:

- $f \in \text{sur } [a, b]$
- f der sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tq:

$$|f'(c)| = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ (\text{si } f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0) \\ \text{en de Roll.}$$

$\rightarrow$ Inegalite des acc finis:

Inegalite Taylor avec reste d'integral $\leftarrow f \text{ est } C^1 \text{ et } \|f'\| \leq M.$
Alors: $\|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$

* Theoreme de Heine:

f est continue sur un segment (un compact) Alors: $[a, b]$
 f est uniformement continue.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ telque } \forall x, y \in [a, b] \\ |x - y| < \alpha.$$

$$\text{ona: } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Aq: unif continue $\Rightarrow$ continue (toujours)

Série entière :

Def rayon de cv :

$R = \sup \{ r \geq 0, (a_n r^n) \text{ bornée} \} \rightarrow \sum a_n r^n \text{ converge pur } \mathbb{R}$
 $R = \sup \mathbb{R}$.

$\rightarrow |z| > R : (a_n r^n) \text{ non bornée.}$

$\rightarrow |r| < R : (a_n r^n) \text{ cv A} \quad (r=R : \text{pas de règle (selon l'exemple)})$.

En d'Abel :

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n > b_2 x \quad (b_n > 0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$$|a_n r^n| \leq M.$$

$$\text{soit } |z| < r : |a_n z^n| \leq |a_n r^n| \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$$

$$\leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \rightarrow 0 \text{ car } \sum \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \text{ cv A}$$

Règle d'Alembert :

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$; \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho |x|$$

serie geometrique.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_{n+1}}{a_0} \right| < \varepsilon^{n+1}$$

$$\text{soit } 0 < r < \frac{1}{\rho} : |a_n r^{n+1}| \leq |a_n| \varepsilon^{n+1} r$$

$$= |a_n| \varepsilon^{n+1} r = M \Rightarrow (a_n r^n) \text{ est bornée.}$$

$$R = +\infty.$$

$\hookrightarrow$ d'après d'Alembert :

$\Rightarrow$ si $|x| < 1 : \sum a_n x^n \text{ cv A.}$

$\Rightarrow$ si $|x| > 1 : \sum a_n x^n \text{ diverge grossi}$

$$\Rightarrow \text{Alors } R = \frac{1}{\rho}$$

$$A9 : \text{si } \sum a_n x^n \text{ cv A } \forall x \Rightarrow R = +\infty$$

$\sum z^n$: serie geo $\Rightarrow R = 1$.

$\sum \frac{1}{n} z^n$: d'Alembert.

$\sum f(n) z^n \Rightarrow R = 1$.

$\sum \frac{b(n)}{n!} z^n \Rightarrow R = +\infty$

* $\sum a_n z^n, \sum |a_n| z^n, \sum \lambda a_n z^n (\lambda \neq 0)$ ont le même R.

* $\sum a_n z^n, \sum a_n z^{n+1}, \sum a_n z^{n+k}$ ont le même R.

(Derivation - Integration)
 $\int_0^x f(t) dt$ (xx generaliser)
 $1 + \int_0^x f(t) dt = G_x(x)$

Critère de comparaison :

$\sum a_n z^n$ de Rayon de cv R_a .

$\sum b_n z^n$ de Rayon de cv R_b .

$$① |a_n| \leq |b_n| \text{ Alors : } (R_a \geq R_b).$$

$$② a_n = O(b_n) \text{ ou } a_n = o(b_n) \text{ Alors : } R_a \geq R_b.$$

$$③ a_n \sim b_n \text{ alors : } R_a = R_b.$$

$$④ \frac{b_n}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l.$$

$$\text{alors : } a_n = O(b_n)$$

$$\Rightarrow R_a \geq R_b.$$

• Somme : $\sum s_n z^n : s_n = a_n + b_n$.

$$\Rightarrow R_s \geq \min(R_a, R_b).$$

$$\hookrightarrow \text{si } R_a \neq R_b \Rightarrow R_s = \min(R_a, R_b) \Rightarrow R\left(\frac{1}{(n+1)!}\right) = +\infty$$

• produit de Cauchy : $\sum p_n z^n : p_n = \sum a_k b_{n-k}$ (comme le produit)

Binome de Newton :

$$(a+b)^n = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

$$\neq r > 1/3!$$

$$(n+1) a_{n+1} z^n = a_{n+1}$$

ici calcul des séries
 Rayon de convergence
 pris en compte

$\frac{1}{2} \times 100 = 50$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

A9: $k! C_n^k n^k$
 $n! \sim \sqrt{2n\pi} n^n e^{-n}$
 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

$R_z = 1 \rightarrow \sum \mathcal{P}(n) z^n$

$\rightarrow \sum F(n) x^n$ decomposition e
 + $f(x) = \sum a_n x^n$ impar & pair
 $\sum a_n x^{2n} = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$
 $\sum a_n x^{2n+1} = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$
 $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Dēm ā
petenir .
↑

* le DSE s'il existe, il est unique.

- ①. calculer f' . (avec DSE de b')
 • $\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a)$ ^{usuel} $\Rightarrow f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a)$
 ↳ exple:
 $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
- ②. Relation entre f' et f .
 • Résoluto de l'eq diff.
- ③. itération et récurrence.

(9) - produit de Cauchy.

la 2^{ème} somme
(modificateur des puissances) $(x^k \frac{x^m}{m!})$

$$x^n = x^2 \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

impar & pair si $\frac{E(n)}{2}$

exple: $\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}} = \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} - x$

→ Décomposition en éléments simple: (usuels).

TP 10 11.

TP 10 16

TP 10 10

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1/2}{k+2}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}$$

$$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n-x} \right)$$

$$\frac{1}{1-k^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k} \right)$$

forme general:

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{a_1}{(x-a)} + \frac{a_2}{(x-b)} + \frac{a_3}{(x-b)^2}$$

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Ra: ① $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!}$ $e^{2xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2xt)^n}{n!}$

$$e^{-t^2} \cdot e^{2xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n$$

$$C_n = \sum_{k=0}^n b_k \frac{(2x)^{n-k}}{(n-k)!} \quad \begin{cases} b_k = \frac{(-1)^k}{k!} \\ b_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

• somme fini $\Rightarrow R_c = +\infty$

ici $b_k = 0$ $\Rightarrow$ TP 10 6.

$$C_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2x)^{n-k}}{(n-k)!}$$

produit de Cauchy
 $\sum a_n z^n \sum b_n z^n$

$$\hookrightarrow \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

② $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \Rightarrow$ CCP 10 8.

nb paire distribution de Bernoulli.

$$\Rightarrow P(S_n = k) = P(\tilde{S}_n = n-k)$$

$$S_n \sim B(n, p)$$

$$\tilde{S}_n \sim B(n, q) \quad q = 1-p$$

fonctions Rémorphes
TP 10 15.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$f(z) = \sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} k! C_{n-k}^k a_{n-k} z^n$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt$$

$$\forall 0 < r < R$$

by d'Alambert: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

f Rémorphes sur $\mathbb{C}$ (ouvert connexe par arc) $\Rightarrow f = cte \Leftrightarrow f' = 0$.
(seri. de Laurent) d.c.
rémorphes (pas programme).

Espaces vectoriels normés

Topologie

$$\| \sum x_k \| \leq \sum \| x_k \|$$

$$| \| x \| - \| y \| | \leq \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

$$| \langle x, y \rangle | \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

• f est continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ est uniformément continue (Heine)

• f est continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ est bornée sur $[a, b]$

• f est k -lipschitzienne $\Rightarrow f$ est continue

• f est linéaire en dim $< \infty \Rightarrow f$ est continue

• f est une ft polynomiale $\Rightarrow f$ est continue

$E = \mathbb{R}^n : u = (u_1, \dots, u_n)$

$$\| u \|_1 = \sum |u_i|$$

$$\| u \|_2 = \left(\sum |u_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\| u \|_\infty = \sup |u_i|$$

ou rationnelle
(en coordonnées)
 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\exists c > 0 \text{ tq } \| f(x) \| \leq c \| u \|$$

$\| \cdot \|$ est une norme sur E

$$\| 0 \| = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\| \lambda u \| = |\lambda| \| u \|$$

$$\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$$

$$\frac{1}{\det H} \cdot \text{com}(H)$$

$$B(a, r) = \{ u \in E \text{ tq } \| u - a \| \leq r \}$$

$$B_E(a, r) = \{ u \in E \text{ tq } \| u - a \| \leq r \}$$

$$S(a, r) = \{ u \in E \text{ tq } \| u - a \| = r \}$$

$$R_2 : B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$x \mapsto x^n \quad \begin{cases} x \mapsto (x_1, \dots, x_n) \\ x \mapsto \pi x \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ex} \\ \text{ex} \end{matrix}$$

$$x^n = e_1, 0, e_2 \quad \begin{matrix} \text{continue} \\ \text{par composition} \end{matrix}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

N_1 et N_2 deux normes sur E :

• N_1 et N_2 sont équivalentes si:

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{\beta} N_2(x) \quad \text{Rq: produits scalaires usuels}$$

$\Rightarrow$ les ft $\frac{N_2(x)}{N_1(x)}$ et $\frac{N_1(x)}{N_2(x)}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

• ne sont pas équivalentes:

$$\text{tq } \frac{N_2}{N_1} \text{ ou } \frac{N_1}{N_2} \text{ ne sont pas bornées}$$

$$\text{càd: } \exists (x_n) \text{ tq } \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \rightarrow +\infty \text{ ou } 0$$

$$\rightarrow f_n(x) = x^n / \cos(nx) / \sin(nx) / e^{inx}$$

en dim finie toutes les normes de E sont équivalentes
 $\rightarrow$ ex 30 (démonstration)

$\rightarrow f$ continue pour N_1

f n'est pas continue pour N_2

$$f(\alpha x + x', y) = \alpha f(x, y) + f(x', y)$$

• f : produit scalaire: f : bilinéaire

• f : symétrique: $f(x, y) = f(y, x)$

• f : positive: $f(x, x) \geq 0$

• f : de finie: $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\det = \sum \epsilon_i x(\epsilon_i)$$

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

$$\| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}$$

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

$$B_1(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_1 \leq 1 \}$$

$$B_2(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_2 \leq 1 \}$$

$$B_\infty(0, 1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \| (x, y) \|_\infty \leq 1 \}$$

A non vide, A est compact $\Rightarrow A$ fermé et borné.

en dim fini: A compact $\Leftrightarrow A$ fermé et borné (problème 119 (alg. grandeur) dim fini)

f est lipschitzienne: $\exists k > 0$ tq $\forall x, y \in A$

Pq Bolzano-Weierstrass:

f est uniformément continue: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x, y \in A$ on a: $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.
 (intégral inverse) f est $\rightarrow$ (np 2018) $\Rightarrow$ toute suite (u_n) bornée de A admet au moins une suite convergente. $\Rightarrow$ suite convergente elle est bornée.

A est convexe si: $\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in A$

$\rightarrow$ les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

A est convexe par arc si: $\forall x, y \in A \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A$.

T.V.I. (f est continue).

$t \rightarrow \gamma(t)$ continue par [0, 1].

$\rightarrow$ existe $a, b \in A$ et $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.
 $|f(a)| < 0$ et $f(b) > 0$.
 $\exists c \in A$ tq: $f(c) = 0$.

A est dite étoilée si $\exists a \in A$ tq: $\forall x \in A$ on a: $[a, x] \subset A$.

A convexe $\Rightarrow A$ étoilée $\Rightarrow A$ connexe par arcs.

Pq: les convexes par arc sur $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

$\mathbb{R}^n$: n'est pas un intervalle.
 $f^{-1}(\text{convexe}) = \text{convexe}$.

Théorème d'accroissement

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 1) f est continue sur $[a, b]$.

ii) f est dérivable $]a, b[$.

iii) $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tq $m \leq f'(x) \leq M$.

$\Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tq $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

$\Rightarrow m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

$\rightarrow$ utilisable dans problème de f lipschitzienne et théorème de point fixe.

- np 2015 -
 $|f(x) - f(y)| \leq \|f'\| \|x - y\|$

Théorème de valeurs intermédiaires: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

tq $f(a) \cdot f(b) \leq 0$.

donc $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = 0$.

Théorème de Rolle:

$a < b$.

f est continue sur $[a, b]$.

f est dérivable sur $]a, b[$.

$f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$.

Valeur d'adhérence:

$\forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists n_0 \geq n$.

$\|u_{n_0} - a\| \leq \varepsilon$.

$\rightarrow a$ est valeur d'adhérence.

à toute forme d'un compact est un compact.
 à toute suite dans un compact admet une valeur d'adhérence.

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \|x_n - x + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \\ &\leq \varepsilon + \|x\| = \pi. \end{aligned}$$

Si (x_n) est bornée
 toute suite convergente
 est bornée.

reciproque pas toujours
 valable.

↳ Bolzano Weierstrass:

(x_n) bornée en $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

↳ (x_n) admet une valeur
 d'adhérence.

↳ $\exists$ a strictement $\neq$
 tq x_n conv. vers a .

• fonction α -Hölderienne (2018)
 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha$

→ continuité:

Pour $k > 0$, $\varepsilon > 0$

on pose $\eta = (\varepsilon/k)^\alpha$.

alors $|x - y| < \eta$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^\alpha \leq k\eta^\alpha = \varepsilon.$$

alors continue.

f -lips $\Rightarrow$ sont continues.

(*)

• f est continue sur $[a, b] \Rightarrow f$ bornée et atteint ses bornes. (inf, sup).

• f est continue α -periodique sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ bornée et atteint ses bornes.

• $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow b} f = l_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow f$ bornée sur $]a, b[$.

• f continue sur $\mathbb{R}^+$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l_1$ $\Rightarrow f$ est bornée.

$\|f\|_\infty = q_n \rightarrow +\infty$
 $n \rightarrow +\infty$
 non bornée.

Probabilités

$$\{x\} \subseteq \Omega; \sum P(\{x\}) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0$$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé.

$(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ système complet d'événements: $\bigcup A_i = \Omega.$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad \text{(2 à 2 incompatibles)}$$

$$\overline{\bigcup A_i} = \bigcap \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap A_i} = \bigcup \overline{A_i}$$

$$\Rightarrow P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$$

A et B indépendantes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \text{ ou } P(B/A) = P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

formule de Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B/A)}{P(B)}$$

formule de probabilité totale:

$(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ système complet d'événement:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

formule de probabilité composée:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{k=1}^n P(A_k / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1}) \cdot P(A_1)$$

Variables aléatoires

$$X \text{ VAD} \Leftrightarrow X(\omega) \begin{cases} \text{fini} \\ \text{ou} \\ \text{denombrable} \end{cases}$$

$$\forall u \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega):$$

$$(X=u) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = u\}$$

$$(X \in B, X=u) = (X \in B) \cap (X=u) \quad \leftarrow \text{peut être un év. usuel.}$$

$$(X \in B, X \in C) = (X \in B) \cap (X \in C)$$

$$(X \geq u) = (X=u) \cup (X > u)$$

$$(X=Y=Z) = \bigcup_{u,y,z} (X=u, Y=y)$$

$$(XY=Z) = \bigcup_{u,y,z} (X=u, Y=y)$$

$$Z = \min(X, Y)$$

$$(Z \geq n) = (X \geq n) \cap (Y \geq n)$$

$$= (Z=n) \cup (Z > n)$$

$$(Z > n) = (Z \geq n+1)$$

Remarque:

$$\odot 0 \leq P(X=k) \leq 1$$

$$\odot \sum P(X=k) = 1$$

$$\Rightarrow P(X=n) = \frac{a}{5^n}$$

$$a \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k}$$

$$P(X \in B) = \sum P(X=u) \cdot P(X \in B / X=u)$$

$\hookrightarrow$ loi conditionnelle

$$\leadsto P(X+Y=Z) = \sum_{u,y,z} P(X=u, Y=y)$$

$$\leadsto P(XY=Z) = \sum_{u,y,z} P(X=u, Y=y)$$

$$Z = \max(X, Y)$$

$$(Z \leq n) = (X \leq n) \cap (Y \leq n)$$

$$P(Z \leq n) = P(Z=n) + P(Z < n)$$

$$P(Z \leq n) = P(Z \leq n-1)$$

$$P(Z=n) = P(Z \leq n) - P(Z \leq n-1)$$

• $(X < Y) = \cup (X=k, Y>k) \Rightarrow P(X < Y) = \sum P(X=k, Y>k)$

si x et y indépendants
 $P(X > 1) = 1 - P(X=0) \cdot P(Y > k) = P(\cup_{i=k+1}^{+\infty} (Y=i)) = \sum P(X=k) \cdot P(Y > k)$

ou
 $P(X > 1) = \sum_{k \geq 1} P(X=k)$
 $= \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(Y=i)$

• $P(X=Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k, Y=k)$
 si x et y indépendants.
 $= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) \cdot P(Y=k)$

• $(X \neq Y) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \neq Y(\omega)\}$ Algèbre TP.
 $\hookrightarrow P(X \neq Y) = 1 - P(X=Y)$ 2018-2021.

• $P(X+Y=k) = \sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ k-i \in Y(\Omega)}} P(X=i, Y=k-i)$

TP 1018 -
 $(S_n=k) = ((S_{n-1}=k) \cap X_n=0) \cup (S_{n-1}=k-1) \cap (X_n=1)$
 $\hookrightarrow (S_n = S_{n-1} + X_n)$

$P(X \leq 3) = \sum_{k=1}^3 P(X=k)$
 $P(X \leq 3) = \sum_{k=1}^{3k=1} P(X=k)$
 200 Bimod

$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e$

loi conjointe (X, Y)
loi marginale $\left. \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\}$

$\Rightarrow P(X=u) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=u, Y=y)$

la loi conjointe détermine la loi marginale et la loi conditionnelle.

$P(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = P(S_n = k)$

$\Rightarrow P(X=u, Y=y) = P(X=u) \cdot P(Y=y | X=u)$
 $= P(Y=y) \cdot P(X=u | Y=y)$

suite arithmético-géométrique

$P_{n+1} = a P_n + b$
 ① $a \neq 1$ fixe : $l = a l + b \Rightarrow l = \frac{b}{1-a}$

② $U_n = P_n - l$ suite geo.

$U_{n+1} = P_{n+1} - l = a P_n + b - l = a(P_n - l) = a U_n$
 $\Rightarrow U_n = a^{n-1} U_1$

Esperance:

$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X=x_i)$

$E((X,Y)^2) \leq E(X^2) \cdot E(Y^2)$

$\hookrightarrow$ l'esperance est linéaire.

formule de transfert:

$E(\varphi(X)) = \sum \varphi(x_i) P(X=x_i)$

$E(X^2) = \sum x_i^2 P(X=x_i)$

parce

exple:
 $P_{n+1} = 1/5 P_n + 2/5$
 $a = 1/5, b = 2/5$

$(P_{n+1} = a) = 1/5 (P_n - a)$
 $\Rightarrow P_n = (1/5)^{n-1} (P_1 - a)$

• $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
 • $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

• $E(\pi X_i) = \pi E(x_i)$ • $E(ax+b) = a E(X) + b$

• $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

fonction génératrice:

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \cdot t^n$$

$$E(X) = G'_X(1)$$

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum P(X=n) t^n$$

$$V(X) = G'_X(1) + G''_X(1) - (G'_X(1))^2$$

$$\left. \begin{array}{l} N \text{ in } [1, 1] \\ 0^{00} \text{ in }]-1, 1[\\ P(X=n) = G_X^{(n)}(0) \end{array} \right\}$$

Variance:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \quad (\text{n et Y indep})$$

Inégalité de Tchebychev:

$$P(|X_i - E(X_i)| \geq \delta) \leq \frac{V(X_i)}{\delta^2}$$

Inégalité de Markov:

$$P(X_i \geq a) \leq \frac{E(X_i)}{a}$$

Lois Usuelles:

① Loi Uniforme:

$$X(\omega) = [1, n]$$

$$P(X=k) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

$$G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k$$

② Loi de Bernoulli $B(p)$ → succès
→ échec

$$X(\omega) = \{0, 1\}$$

$$P(X=1) = p$$

$$P(X=0) = 1-p$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1-p)$$

$$G_X(t) = 1-p+pt$$

X_i Var aléatoire
 $\frac{S_n}{n}, \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \dots$

③ Loi géométrique: $G(p)$

→ espère de Bernoulli avec succès à l'ordre n.

$$X(\omega) = \mathbb{N}^*$$

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

④ Loi Binomiale: $B(n, p)$

→ répétition n fois de Bernoulli.

$$X(\omega) = \{0, n\}$$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$G_X(t) = (1-p+pt)^n$$

⑤ Loi de Poisson: $P(\lambda)$

$$X(\omega) = \mathbb{N}$$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

fonction de dev

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y).$$

$$\text{cov}(x, x) = V(x).$$

$$V(x) + 2\text{cov}(x, y) + V(y) = V(x+y) \quad \hookrightarrow \text{si } x \text{ et } y \text{ indépendantes:}$$

exemple:

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{cov}(x, x)} = \sqrt{V(x)}.$$

$$E(xy) = \sum_{i,j} x_i y_j P(x=i, y=j).$$

$$= \sum_i x_i P(x=i) \cdot \sum_j y_j P(y=j) = E(x) \cdot E(y).$$

$$E(xy) = E(x)E(y).$$

$$\text{cov}(x, y) = 0.$$

$$V(x+y) = V(x) + V(y).$$

$\text{cov}(x, y)$ bilinéaire
symétrique,
positive.

+ Cauchy Schwarz:

$$G_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(x=n).$$

$$|\text{cov}(x, y)| \leq \sqrt{\text{cov}(x, x)} \cdot \sqrt{\text{cov}(y, y)} \leq \sigma(x) \cdot \sigma(y).$$

$$\hookrightarrow |t^n P(x=n)| \leq P(x=n) \text{ or } \sum P(x=n) < \infty.$$

$$G'_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} P(x=n).$$

Alors $\sum t^n P(x=n)$ définie sur $[-1, 1]$. $\begin{cases} \text{à } t=1 \\ \text{à } t=-1 \end{cases}$ (CVA).

$x(x-1)$ admet une espérance

$$\hookrightarrow G'_x(1) = \sum n P(x=n) = E(x).$$

$$\text{il } \rightarrow \sigma(x) \sum n(n-1) P(x=n)$$

$$G''_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) t^{n-2} P(x=n). \quad \text{marroc 10/6-10/7}$$

$\sum n(n-1) P(x=n) X^{n-1}$ converge.
à même Rayon de convergence que $\sum P(x=n) X^n$

$$\hookrightarrow G''_x(1) = \sum n(n-1) P(x=n).$$

$$\text{or } E(x(x-1)) = \sum n(n-1) P(x=n).$$

$$\Rightarrow G''_x(1) = E(x^2 - x) = E(x^2) - E(x).$$

$$\Rightarrow E(x^2) = G''_x(1) + G'_x(1).$$

$$G'_x(1)$$

$$\begin{aligned} G_{x_1+x_2}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(x_1+x_2=n) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(x_1=k) P(x_2=n-k) \right) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} P(x_1=k) P(x_2=n-k) \right) t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(x_1=k) t^k \sum_{n=k}^{\infty} P(x_2=n-k) t^{n-k} \\ &= G_{x_1} \cdot G_{x_2}. \end{aligned}$$

$$G_{x_1+x_2}(t) = E(t^{x_1+x_2}) = E(t^{x_1} \cdot t^{x_2}) = E(t^{x_1}) E(t^{x_2}) = G_{x_1} \cdot G_{x_2}.$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$= G''_x(1) + G'_x(1) - (G'_x(1))^2.$$

$$\sum k = n \frac{(n+1)}{2}.$$

$$\sum k^2 =$$

$$\sum k^3 =$$

$$\begin{aligned} (k+1)^3 - k^3 &= 3k^2 + 3k + 1. \\ \sum_{k=1}^n (k+1)^3 - k^3 &= 3 \sum k^2 + 3 \sum k + \sum_{k=1}^n 1. \end{aligned}$$

somme télescopique.

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + 3 \sum k + n.$$

$$S =$$

Serie numerique

$\sum u_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \text{ (ou } \infty)$
 $u_n \rightarrow 0$ (nécessairement)
 $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
 Inverse: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ diverge grossièrement.

$\sum u_n$ à terme ≥ 0 .
 $u_n v_n \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} = 1$
 $\Rightarrow \frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1)$
 $\Rightarrow u_n = v_n + o(v_n)$
 Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.
 (Réciproque n'est pas toujours valable).

$\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ majorée
 $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum u_n = +\infty$

Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.
 (Réciproque n'est pas toujours valable).

Série de Riemann: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv si $\alpha > 1$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série télescopique: $\sum (u_n - u_{n+1})$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^p}$ cv si $p > 1$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série géométrique: $\sum a^n$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série exponentielle (complexe): $\sum \frac{z^n}{n!}$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^p}$ cv si $p > 1$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série géométrique: $\sum a^n$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série exponentielle (complexe): $\sum \frac{z^n}{n!}$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série de Bertrand: $\sum \frac{1}{n^p}$ cv si $p > 1$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série géométrique: $\sum a^n$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Série exponentielle (complexe): $\sum \frac{z^n}{n!}$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow l \Rightarrow u_n = l v_n + o(v_n)$
 $\sum a = a$; $\sum 0 = 0$
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.
 Critère de Riemann: $u_n = (-1)^n w_n$, $w_n = |u_n|$.

signe de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \text{signe de } \left(\frac{(-1)}{1+x} \right) \leq 0$.

Alors: $\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \leq \frac{1}{n}$. ①

• signe de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \text{sig } \frac{(-1)^2}{2+x} > 0$.

Alors: $\frac{1}{n} - \frac{1}{1+x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{1+x}$. ②

① et ② donnent le resultat.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{-1}$
 développement asymptotique
 $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1}$

Regle d'Alcubert: (→ de factoriel ou exponentielle).

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$

$l = 1$: pas de conclusion

$l > 1$ (ou) $\sum u_n$ div geo

$l < 1$: $\sum u_n$ abs cv. ③

Regle n^α u_n: (pas d'équivalent simple) → $\sum u_n$ cv. → existence

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l \in [0, +\infty[$. ($\alpha > 1$): $\sum u_n$ cv.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l \in]0, +\infty[$ ($\alpha \leq 1$): $\sum u_n$ div

t² et x l u x → 0

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} u_n}{n^2} \rightarrow 0$
 $\frac{u_n(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

serie produit de Cauchy:

$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$; $\sum u_k$ et $\sum v_k$ abs cv

→ Abs convergente.

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2}$

comparaison serie-integrale:

① $\sum (f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx)$ cvssi

- f cpm.
- f ≥ 0
- f décroissante

$\sum \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \right)$

Relation de change:

$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

en cas de cv:

② $\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx$

$\int_{a+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=a+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx$

③ $\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \sim \frac{1}{k^\alpha}$