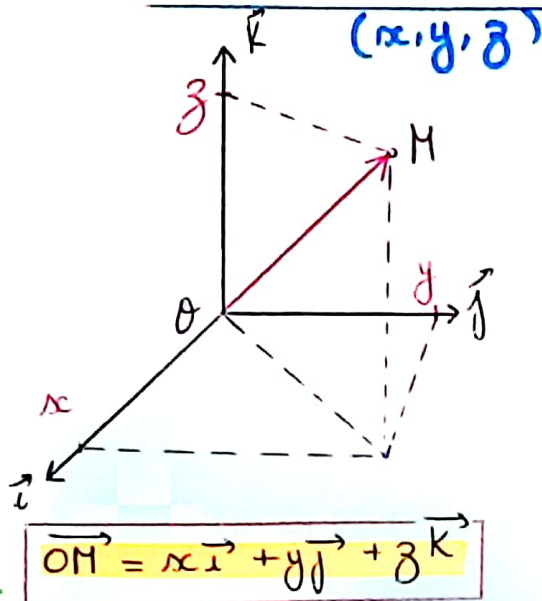


Msi

SP

~ Systèmes de coordonnées.

~ Coordonnées Cartésiennes :



• Il est utilisé pour les solides de forme prismatique :

- * Cube
- * Parallélépipède
- * Pyramide
- * Carré
- * Rectangle
- * Triangle / Tige

→ $d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

- Problème volumique : x, y et z non nuls et indépendants

$dV = dx dy dz$ (Cube / Parallélépipède)

- Problème surfacique : Il y a une équation de liaison

$dS = \frac{dx}{dz} \frac{dy}{dz} dz$ (carré / Rectangle)

- Problème linéique : 2 équations de liaison

$dl = dx / dy / dz$ (Tige)

• $dm = \rho dV$

• $dm = \sigma dS$

• $dm = \lambda dl$

~ Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 + z^2 \end{aligned}$$



Il est utilisé pour les solides de forme cylindrique ou conique.

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{k}$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{k}$$

- Problème volumique :

$$dV = r dr d\theta dz \quad (\text{cylindre / cône plein})$$

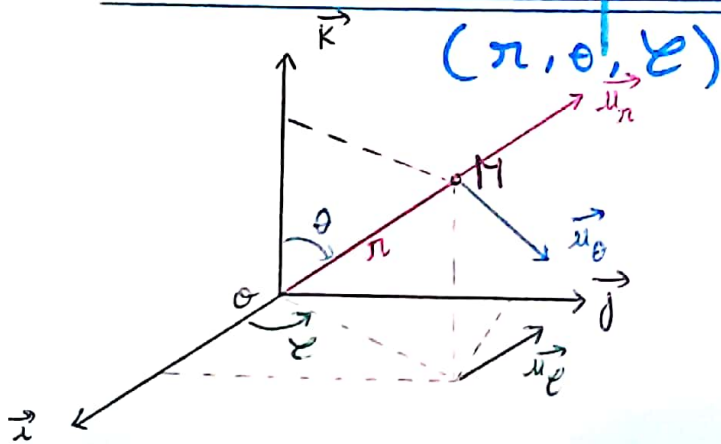
- Problème surfacique :

$$dS = r dr d\theta \quad (\text{cylindre / cône creux})$$

- Problème linéique :

$$d\ell = dz = r d\theta \quad (\text{cercle})$$

~ Coordonnées sphériques



$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

- Problème volumique :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{sphère pleine})$$

- Problème surfacique :

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{sphère creuse})$$

$\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$

- Surface linéique :

$$d\ell = r d\varphi$$

~ À Retenir ~ (Chap 1)

1. * Centre d'inertie *

- Système matériel discret :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{OG}_i m_i$$

$$\text{avec } m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n X_i m_i \\ Y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n Y_i m_i \\ Z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n Z_i m_i \end{cases}$$

c'est un solide (S) de masse m décomposable en n solides élémentaires (S_i) de masses respectives m_i.

- Système matériel continu : Détermination par intégration du centre d'inertie

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_S \vec{OM} dm$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_G = \frac{1}{m} \int_S x dm \\ Y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm \\ Z_G = \frac{1}{m} \int_S z dm \end{cases}$$

2. * Symétrie matérielle *

- Un système possède une symétrie matérielle par rapport à un point, à une droite ou à un plan, s'il vérifie 2 conditions:
 - * le système possède une symétrie géométrique.
 - * le système possède une symétrie de répartition de masse.
- le centre d'inertie appartient à l'élément de symétrie.

3 * Théorèmes de Guldin *

- 1^{er} Théorème : Centre d'inertie d'une courbe plane

* Une courbe plane, de longueur L contenue dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ tournant autour de l'axe $(O, \vec{x})$ et ne le traversant pas, engendre une surface S .
L'ordonnée de son centre de masse G est :

$$y_G = \frac{S}{2\pi L}$$

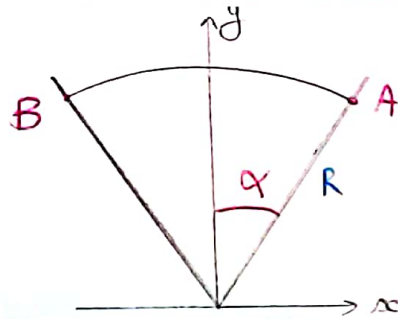
- 2^{ème} Théorème : Centre d'inertie d'une surface plane

* Une surface plane, d'aire S contenue dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ tournant autour de l'axe $(O, \vec{x})$ et ne le traversant pas, engendre un volume V .
L'ordonnée de son centre de masse G est :

$$y_G = \frac{V}{2\pi S}$$

Centres d'inertie de qques solides

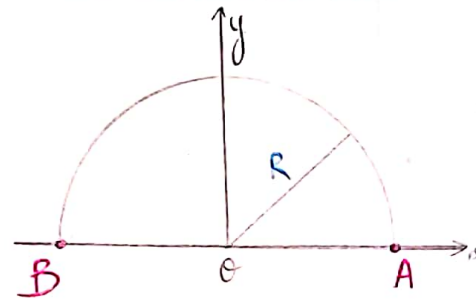
Arc de cercle



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

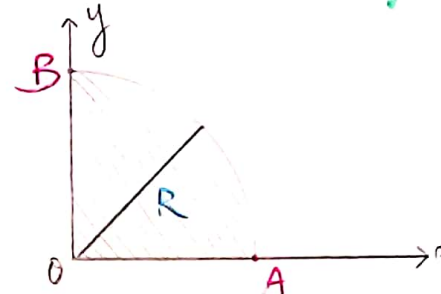
Demi cercle



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{2}{\pi} R$$

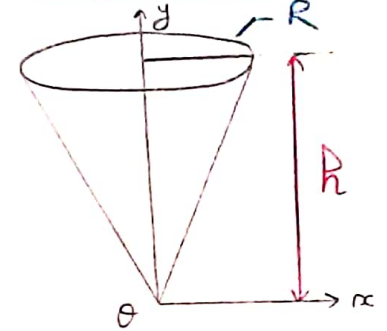
Quart de disque



$$X_G = Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R$$

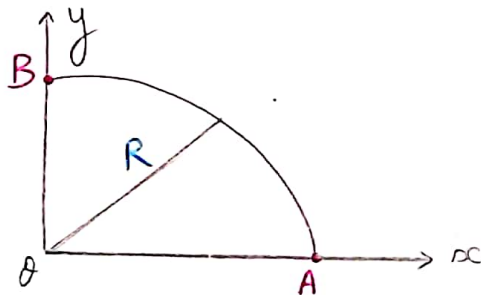
Cône creux



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{2h}{3}$$

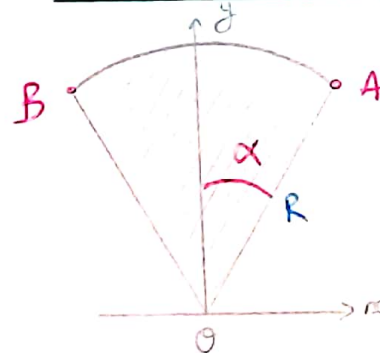
Quart de cercle



$$X_G = Y_G = \frac{2}{\pi} R$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R$$

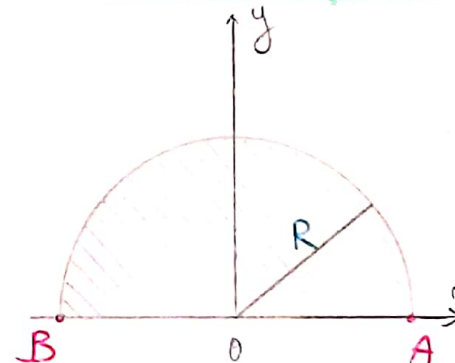
Secteur circulaire



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} R$$

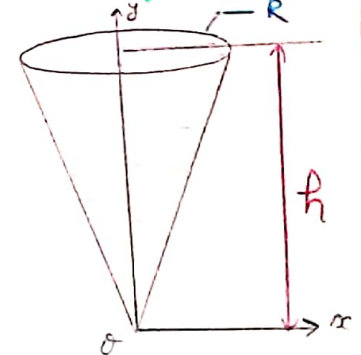
Demi disque



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

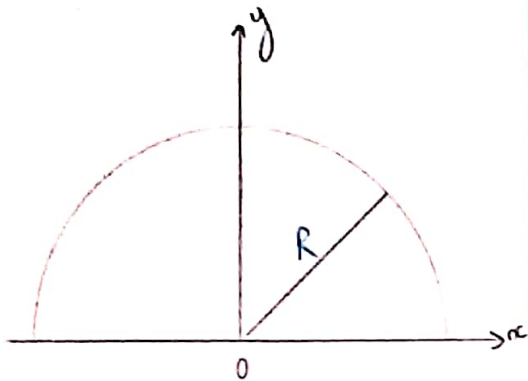
Cône plein



$$X_G = 0$$

$$Y_G = \frac{3h}{4}$$

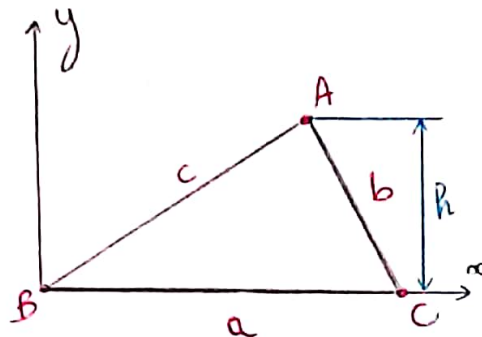
Demi sphère creuse



$$X_G = 0$$

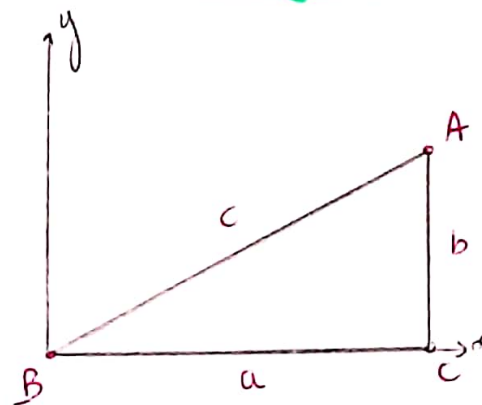
$$Y_G = \frac{R}{2}$$

Périmètre d'un triangle



$$Y_G = \frac{h}{2} \left(\frac{b+c}{a+b+c} \right)$$

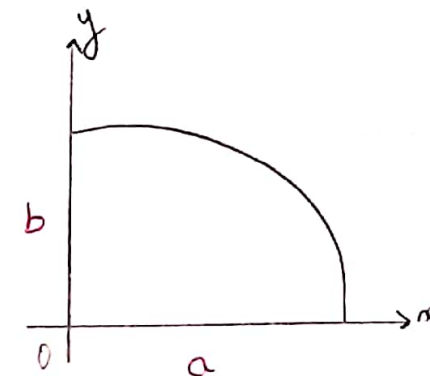
Périmètre d'un triangle rectangle



$$X_G = \frac{a}{2} \left(\frac{a+2b+c}{a+b+c} \right)$$

$$Y_G = \frac{b}{2} \left(\frac{b+c}{a+b+c} \right)$$

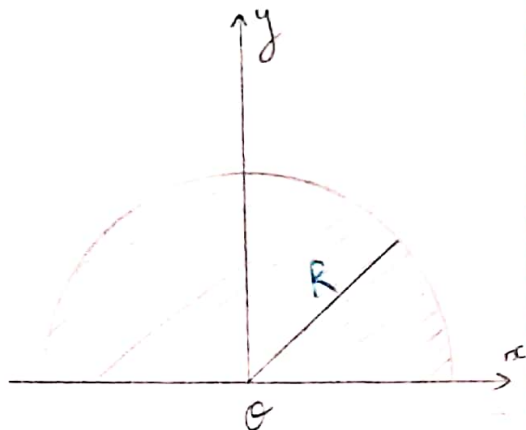
Quart d'ellipse



$$X_G = \frac{2}{\pi} a$$

$$Y_G = \frac{2}{\pi} b$$

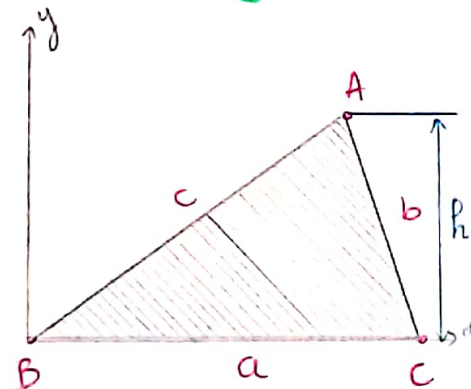
Demi sphère pleine



$$X_G = 0$$

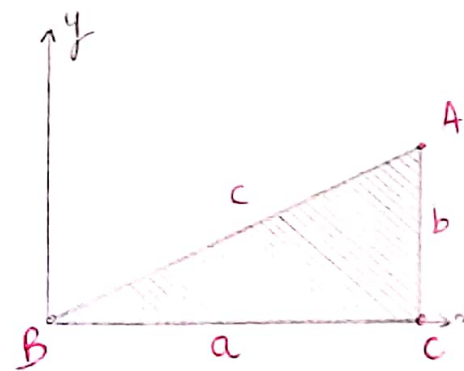
$$Y_G = \frac{3}{8} R$$

Triangle



$$Y_G = \frac{h}{3}$$

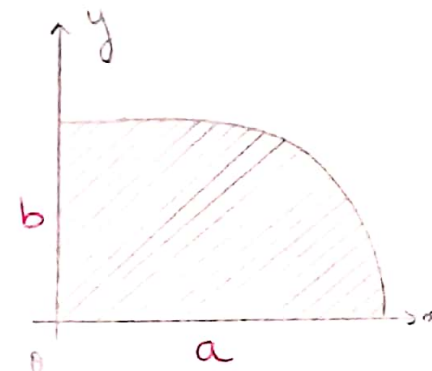
Triangle rectangle



$$X_G = \frac{2}{3} a$$

$$Y_G = \frac{1}{3} b$$

Quart de disque elliptique



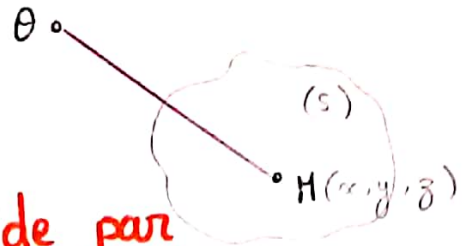
$$X_G = \frac{4a}{3\pi}$$

$$Y_G = \frac{4b}{3\pi}$$

~ Moments d'inertie ~

* Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point O :

$$I_O(s) = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$



* Moment d'inertie d'un solide par rapport aux axes d'un repère : (droite)

- Par rapport l'axe $(O, \vec{x})$: $I_{Ox}(s) = \int_S (y^2 + z^2) dm = A$
- Par rapport l'axe $(O, \vec{y})$: $I_{Oy}(s) = \int_S (x^2 + z^2) dm = B$
- Par rapport l'axe $(O, \vec{z})$: $I_{Oz}(s) = \int_S (x^2 + y^2) dm = C$

* Moment d'inertie par rapport à un plan :

- Par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$: $I_{Oxy} = \int_S z^2 dm = A'$
- Par rapport au plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$: $I_{Oyz}(s) = \int_S x^2 dm = B'$
- Par rapport au plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$: $I_{Oxz}(s) = \int_S y^2 dm = C'$

Relations

- $I_O = \frac{1}{2}(A+B+C) = A' + B' + C'$
- $A = A' + C'$
- $B = A' + B'$
- $C = B' + C'$

Le moment d'inertie est une quantité positive

~ Produits d'inertie ~

* Produit d'inertie par rapport aux axes $(O, \vec{y})$ et $(O, \vec{z})$:

$$I_{yz}(S) = \int_S yz \, dm = D$$

* Produit d'inertie par rapport aux axes $(O, \vec{z})$ et $(O, \vec{x})$:

$$I_{zx}(S) = \int_S xz \, dm = E$$

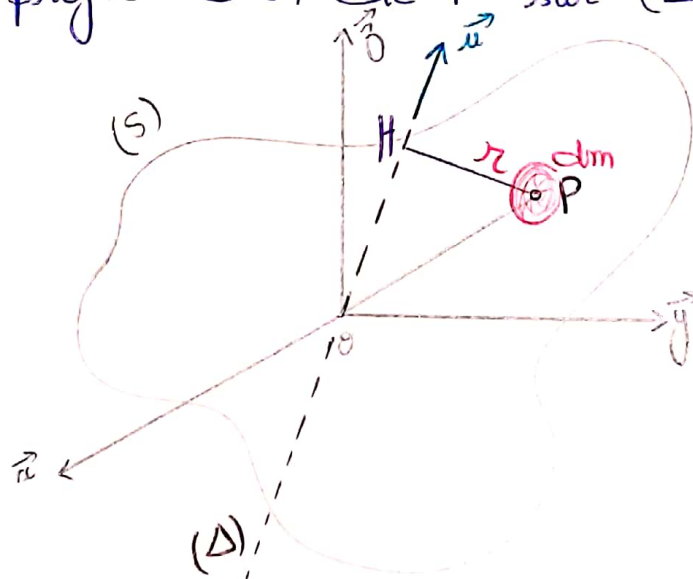
* Produit d'inertie par rapport aux axes $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$:

$$I_{xy}(S) = \int_S xy \, dm = F$$

Les produits d'inertie caractérisent l'absence des symétries matérielles dans un solide.

~ Moment d'inertie par % à un axe passant par le point O ~

- $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé direct.
- $\Delta(O, \vec{u})$ un axe passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$
- S un solide de masse m et de centre de masse G.
- P un point quelconque de (S): $\vec{OP} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z}$
- H la projection de P sur (Δ) .



$$\begin{aligned}
 \rightarrow I(S/\Delta) &= \int_{P \in (S)} r^2 dm = \int_{P \in (S)} \|\vec{PH}\|^2 dm \\
 &= \int_{P \in (S)} [\|\vec{u}\| \|\vec{OP}\| \sin(\vec{u}, \vec{OP})]^2 dm \\
 &= \int_{P \in (S)} \|\vec{u} \wedge \vec{OP}\|^2 dm
 \end{aligned}$$

$$\text{on } (\vec{u} \wedge \vec{OP})^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}^2$$

$$= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

$$\Rightarrow \text{donc } I(S/\Delta) = \alpha^2 \int (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int (z^2 + x^2) dm + \gamma^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ - \left[2\beta\gamma \int yz dm + 2\alpha\gamma \int xz dm + 2\alpha\beta \int xy dm \right]$$

$$\rightarrow \underline{I_{\Delta}(S) = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F}$$

Forme Quadratique

Produit Vectoriel

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}$$

~ Opérateur d'inertie ~

- L'opérateur d'inertie du solide (S) au point O est l'application linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{J}_O(S, \vec{u})$ tq :

$$\forall \vec{u} : \quad \vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{P \in (S)} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) dm$$

- Cet opérateur peut être représenté par une matrice.

$$\bullet \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{et} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{OP} \wedge \vec{u} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \cdot u_z - z \cdot u_y \\ x \cdot u_z - z \cdot u_x \\ x \cdot u_y - y \cdot u_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= [A] \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

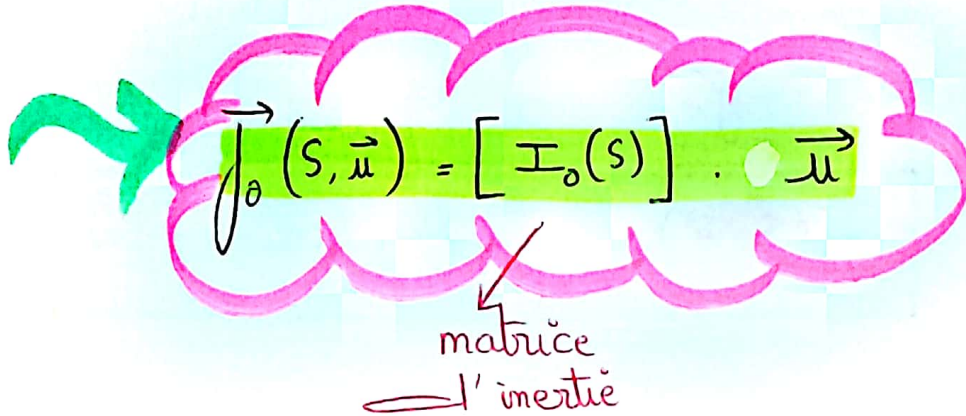
L'opérateur d'inertie est appelé aussi tenseur d'inertie.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) &= -[A]^T \cdot \vec{u} \\ &= -[A] \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (y^2 + z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2 + z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2 + y^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Donc

$$[A]^2 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} = [I_o(s)]$$


$$\vec{J}_0(S, \vec{u}) = [I_o(s)] \cdot \vec{u}$$

matrice
d'inertie

La matrice
d'inertie
est
symétrique.

~ Base principale d'inertie ~

- la matrice d'inertie $[I_0(S)]$ est symétrique
donc il existe une base $B_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
dans laquelle la matrice est diagonale

$$\rightarrow [I_0(S)]_{B_1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

A_1, B_1, C_1 : moments principaux d'inertie

* Influence des symétries matérielles :

- Le solide (S) possède un axe de symétrie matérielle :

* $(O, \vec{x})$ un axe de symétrie de révolution $\rightarrow y$ est remplaçable par z

$$\text{d'où } C = \int (x^2 + y^2) dm = \int (x^2 + z^2) dm = B$$

$$\Rightarrow B = C \text{ et } D = E = F = 0$$

* $(O, \vec{y})$ un axe de symétrie de révolution

$$\Rightarrow A = C \text{ et } D = E = F = 0$$

* $(O, \vec{z})$ un axe de symétrie de révolution

$$\Rightarrow A = B \text{ et } D = E = F = 0$$

S'ils existent au moins 2 axes de symétrie de révolution (≥ 2) alors $A = B = C$

• Le solide (S) possède un plan de symétrie :

(y remplaçable par x)

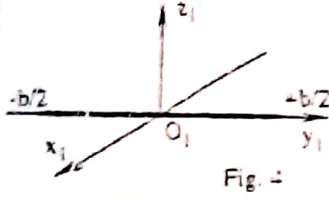
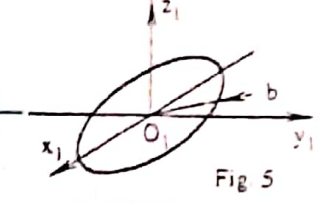
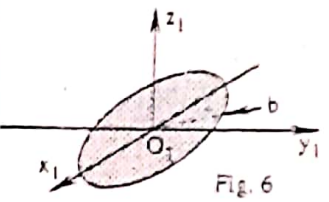
* $(O, \vec{x}, \vec{y})$ plan de symétrie $\rightarrow D = E = 0$

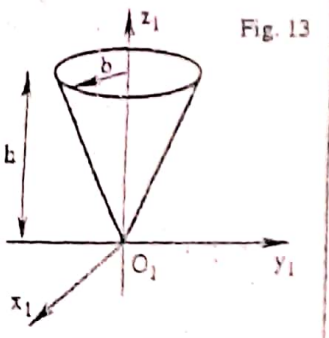
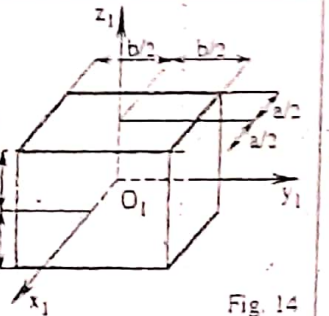
* $(O, \vec{x}, \vec{z})$ plan de symétrie $\rightarrow D = F = 0$

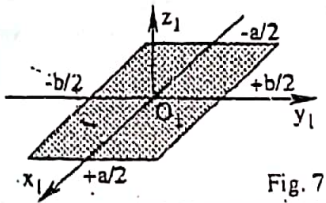
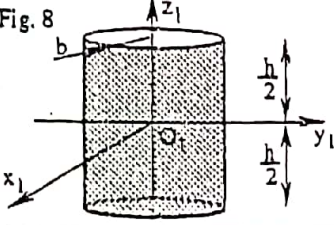
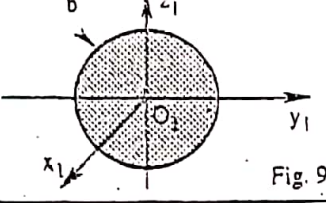
* $(O, \vec{y}, \vec{z})$ plan de symétrie $\rightarrow E = F = 0$

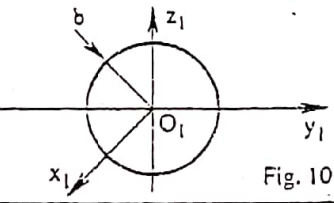
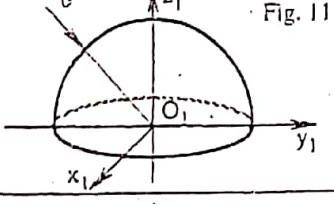
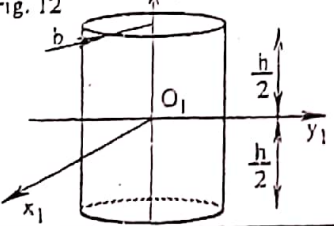
S'ils existent
au moins 2
plans de
symétrie alors
 $D = E = F = 0$

Matrices d'inertie des solides usuels

Solide	Représentation	Matrice d'inertie en O_1	Centre de masse G	Repère principal central d'inertie
Tige rectiligne	 Fig. 4	$\frac{Mb^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Tout repère d'origine O_1 et d'axe $O_1 y_1$
Cercle	 Fig. 5	$\frac{Mb^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Tout repère d'origine O_1 et d'axe $O_1 z_1$
Disque	 Fig. 6	$\frac{Mb^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Tout repère d'origine O_1 et d'axe $O_1 z_1$

Solide	Représentation	Matrice d'inertie en O_1	Centre de masse G	Repère principal central d'inertie
Cône	 Fig. 13	$\frac{3M}{5} \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{4} + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix}$	$\overline{O_1 G} = \frac{3h}{4} \vec{z}_1$	Tout repère d'origine G et d'axe $Gz_1 \equiv O_1 z_1$
Parallélépipède rectangle	 Fig. 14	$\frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Repère $(O_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

Solide	Représentation	Matrice d'inertie en O_1	Centre de masse G	Repère principal central d'inertie
Plaque rectangulaire	 Fig. 7	$\frac{M}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Repère $(O_1; \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$
Surface cylindrique	 Fig. 8	$M \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Repère d'origine O_1 et d'axe $O_1 z_1$
Surface sphérique	 Fig. 9	$\frac{2Mb^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Tout repère d'origine O_1

Solide	Représentation	Matrice d'inertie en O_1	Centre de masse G	Repère principal central d'inertie
Boule	 Fig. 10	$\frac{2Mb^2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Tout repère d'origine O_1
Demi-boule	 Fig. 11	$\frac{2Mb^2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\overline{O_1 G} = \frac{3}{8} b \vec{e}_z$	Tout repère d'origine G et d'axe $Gz_1 \equiv O_1 z_1$
Cylindre	 Fig. 12	$M \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{2} \end{pmatrix}$	$G \equiv O_1$	Repère d'origine O_1 et d'axe $O_1 z_1$

~ Cinématique ~

- Calcul de vitesse et d'accélération -

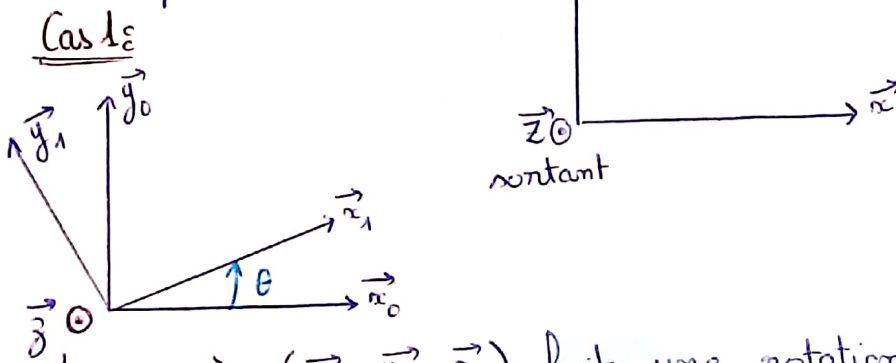
Déf : la cinématique du solide est l'étude des mouvements des corps solides indépendamment des causes de ces mouvements. Cette étude se fait par le calcul de la vitesse et de l'accélération.

* Vitesse angulaire : $\vec{\Omega}(S/R)$: vitesse angulaire d'un solide (S) par rapport à un repère R.

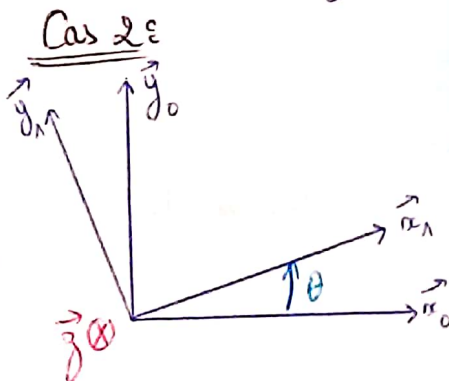
$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{d\theta}{dt} \text{ rad.s}^{-1}$$

• Calcul de vitesse angulaire :

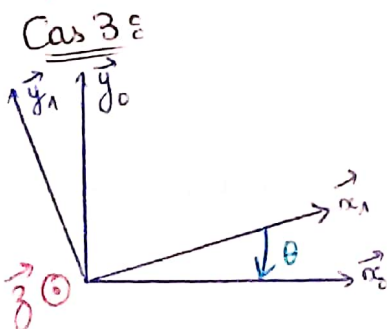
Repère direct



Le repère $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ fait une rotation autour du repère $R(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans le sens direct. $\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta} \vec{z}_0$ et il est sortant



$\vec{z}_0$ est rentrant donc c'est un repère indirect $\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = -\dot{\theta} \vec{z}_0$ et θ tourne dans le sens direct

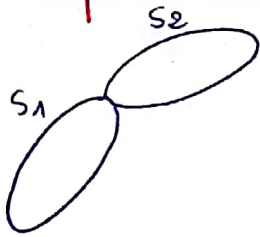


θ tourne dans le sens inverse et $\vec{z}_0$ est sortant $\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = -\dot{\theta} \vec{z}_0$

Cas 4 :

θ tourne dans le sens inverse et $\vec{z}_0$ rentrant $\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \dot{\theta} \vec{z}_0$

* Composition de vitesse angulaire :



Soit un solide (S_1) lié à un solide (S_2) par rapport au repère R

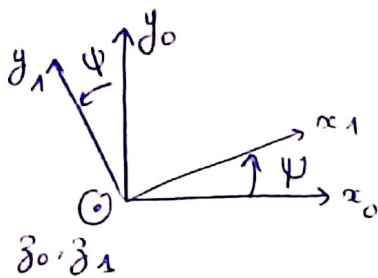
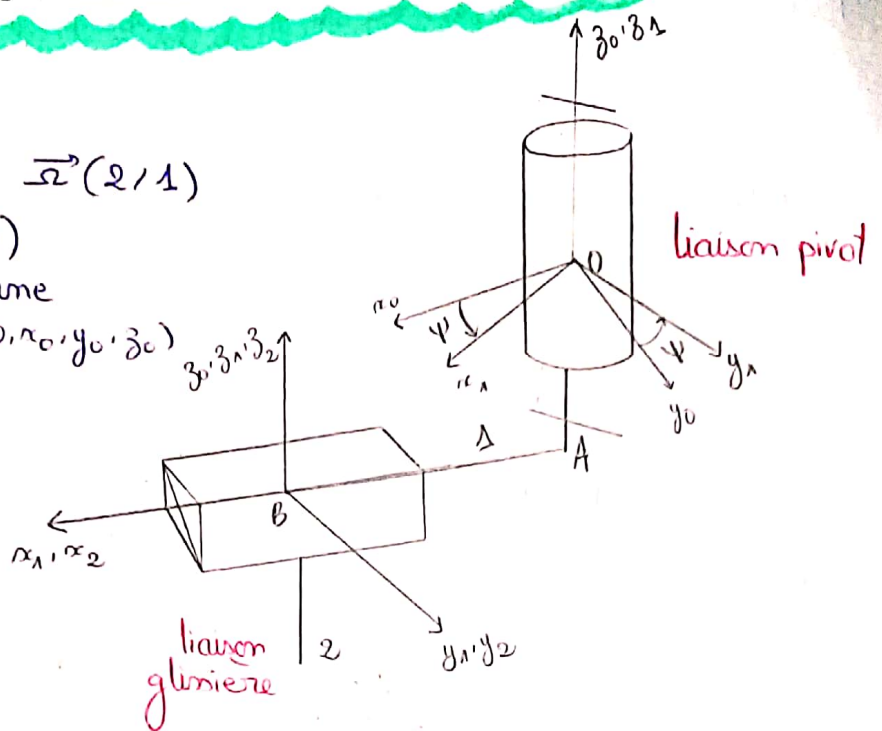
$$\vec{\Omega}(S_2/R) = \vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/R)$$

Application :

Calculer $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/1)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$

⇒ La tige (1) tourne autour du repère $(0, x_0, y_0, z_0)$ d'un angle ψ .

- Le solide (2) fait une translation par rapport à (1)

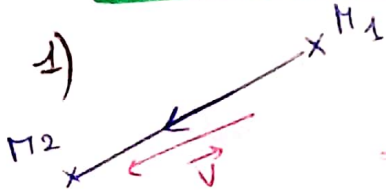


$$\Rightarrow \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_1$$

• $\vec{\Omega}(2/1) = \vec{0}$ (Liaison glissière entre (1, 2) ⇒ Pas de rotation) ⚠

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\psi} \vec{z}_0$$

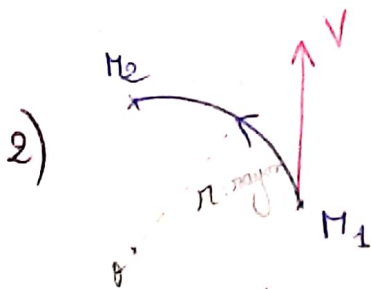
* Vitesse : $V(S/R)$



Soit le solide qui passe de M_1 vers M_2 avec une vitesse v

⇒ Cette vitesse est rectiligne (qui suit une ligne)

$$V = \frac{d}{dt} = \frac{M_1 M_2}{t}$$



Cette vitesse est tangente à la trajectoire

le solide passe de M_1 vers M_2 avec un mouvement circulaire

⇒ Cette vitesse est curviligne (qui suit un cercle)

$$V = \omega \cdot r$$

vitesse angulaire

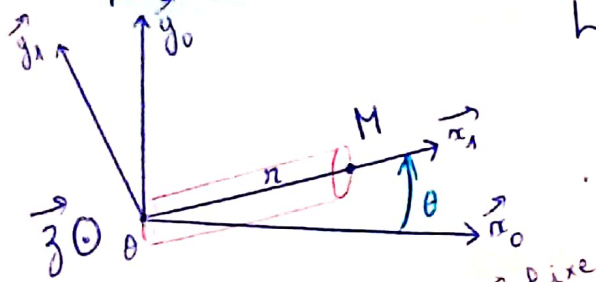
calcul de la vitesse $\vec{v}(S/R)$

Méthode 1 : Par dérivation

$$\vec{V}_M(S/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} / R$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$

Exemple :



La tige est en rotation par rapport au repère $R(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ suivant l'axe $(\theta, \vec{z})$

$$\vec{V}_M(S/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} / R$$

$$= \frac{d n \vec{x}_1}{dt} / R \quad \text{de la forme } (fg)' = f'g + g'f$$

$$= \frac{dn}{dt} \vec{x}_1 + n \frac{d\vec{x}_1}{dt} / R$$

car $n = \text{cte}$

$$\text{on } \frac{d\vec{x}_1}{dt} / R = \frac{d\vec{x}_1}{dt} / R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{x}_1$$

$$= \dot{\theta} \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta} \vec{y}_1 \quad \text{donc } \vec{V}_M(S/R) = n \dot{\theta} \vec{y}_1$$

Méthode 2 : Par cinématique de solide

$$\vec{V}_M(S/R) = \vec{V}_O(S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM}$$

avec $\theta \in S \triangle$

On utilise cette méthode lorsqu'on a déjà $\vec{V}_O(S/R)$ calculée

Exemple :

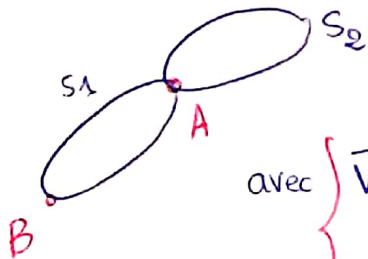
le même

$$\vec{V}_M(S/R) = \vec{V}_O(S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM}$$

$$\text{on } \vec{V}_O(S/R) = 0 \quad \text{car } O \text{ centre de rotation} \quad \triangle$$

$$\text{donc } \vec{V}_M(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{OM} = \dot{\theta} \vec{z} \wedge n \vec{x}_1 = n \dot{\theta} \vec{y}_1$$

Méthode 3 : Par décomposition



$$\vec{V}_M(S_2/R) = \vec{V}_M(S_2/S_1) + \vec{V}_M(S_1/R)$$

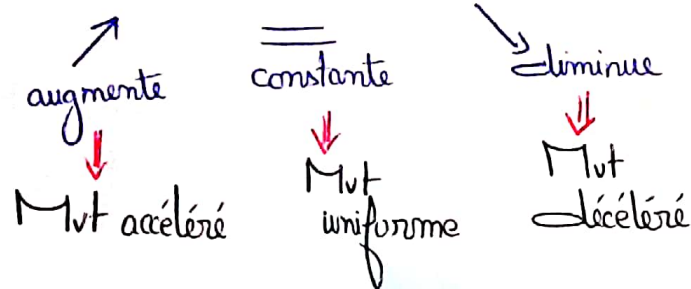
$$\text{avec } \vec{V}_M(S_2/S_1) = \vec{V}_A(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \vec{AM}$$

$$\vec{V}_M(S_1/R) = \underset{\substack{\in S_2 \\ \in S_1}}{\vec{V}_B(S_1/R)} + \vec{\Omega}(S_1/R) \wedge \vec{BM}$$

on utilise la $\triangle$ cinématique de solide non par la dérivation

* Accélération : $\vec{\gamma}(S/R)$

Evolution de la vitesse



$$\gamma = \frac{dv}{dt} \quad m.s^{-1}$$

$m.s^{-2}$

• Si le mvt est uniforme $\Rightarrow \gamma = 0$

• Calcul de l'accélération :

Méthode 1 : Dérivation directe

$$\vec{\gamma}_H(S/R) = \frac{d\vec{V}_H(S/R)}{dt} = \frac{d^2 \vec{OH}}{dt^2}$$

Exemple :

le même

on a :

$$\vec{V}_H(S/R) = \pi \dot{\theta} \vec{y}_1 \Rightarrow \vec{\gamma}_H(S/R) = \frac{d\vec{V}_H(S/R)}{dt} / R = \frac{d \pi \dot{\theta} \vec{y}_1}{dt} / R$$

$$\text{on } \frac{d\vec{y}_1}{dt} / R = \frac{d\vec{y}_1}{dt} / R_1 + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{y}_1 = \pi \ddot{\theta} \vec{y}_1 + \pi \dot{\theta} \frac{d\vec{y}_1}{dt} / R$$

$$= \ddot{\theta} \vec{y}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\ddot{\theta} \vec{x}_1$$

donc $\vec{\gamma}_H(S/R) = \pi \ddot{\theta} \vec{y}_1 - \pi \dot{\theta}^2 \vec{x}_1$

Méthode 2 : Cinématique de solide

$$\vec{\gamma}_H(S/R) = \vec{\gamma}_O(S/R) + \vec{\omega}(S/R) \wedge (\vec{\omega}(S/R) \wedge \vec{OH}) + \frac{d\vec{\omega}(S/R)}{dt} \wedge \vec{OH}$$

Δ Il faut que $O \in S$

Exemple :

le même

on a : $\vec{\gamma}_O(S/R) = \vec{0}$ car la vitesse au point O est nulle

$$\vec{\omega}(S/R) = \dot{\theta} \vec{z}$$

$$\vec{OH} = \pi \vec{x}_1$$

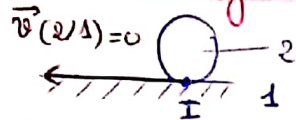
$$\Rightarrow \vec{\gamma}_H(S/R) = \dot{\theta} \vec{z} \wedge (\dot{\theta} \vec{z} \wedge \pi \vec{x}_1) + \frac{d\dot{\theta} \vec{z}}{dt} \wedge \pi \vec{x}_1$$

$$= \dot{\theta} \vec{z} \wedge (\pi \dot{\theta} \vec{y}_1) + \ddot{\theta} \vec{z} \wedge \pi \vec{x}_1$$

$$= -\pi \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 + \pi \ddot{\theta} \vec{y}_1$$

Vitesse de glissement :

- Roulement sans glissement : $v_I(2/1) = \text{vitesse de glissement} = 0$



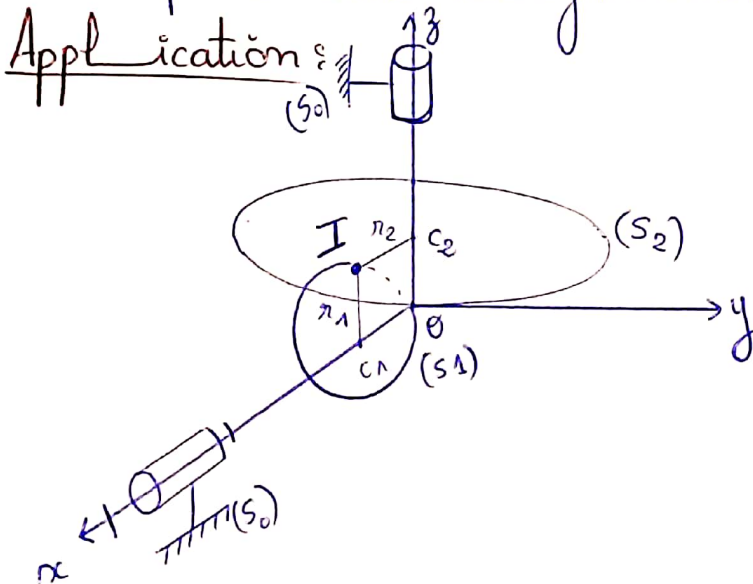
le solide (2) يدور
solide (1) ويدور معه

- Méthode de calcul :

$$\vec{V}_I(2/0) = \vec{V}_I(2/1) + \vec{V}_I(1/0)$$

à partir de cette relation on peut calculer $\vec{V}_I(2/1)$

- la condition du roulement sans glissement permet de trouver une relation entre les paramètres du système (Loi d'entrée sortie).



On pose

$$\vec{\Omega}(S1/R) = \dot{\alpha}_1 \vec{x}$$

$$\vec{\Omega}(S2/R) = \dot{\alpha}_2 \vec{z}$$

la roue (S1) tourne autour de x
et fait tourner (S2) autour de z

- 1) Calculer la vitesse de glissement entre (S2) et (S1) au point I.
Hypothèse : roulement sans glissement

- 2) Déterminer la relation entre la vitesse $\dot{\alpha}_1$ et $\dot{\alpha}_2$

$$\Rightarrow 1) \vec{V}_I(S2/S1) = \vec{V}_I(S2/R) - \vec{V}_I(S1/R)$$

$$\text{on } \vec{V}_I(S2/R) = \underbrace{\vec{V}_{C_2}(S2/R)}_0 + \vec{\Omega}(S2/R) \wedge \overrightarrow{C_2 I} = \dot{\alpha}_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{x} = r_2 \dot{\alpha}_2 \vec{y}$$

car C_2 centre de rotation

$$\vec{V}_I(S1/R) = \underbrace{\vec{V}_{C_1}(S1/R)}_0 + \vec{\Omega}(S1/R) \wedge \overrightarrow{C_1 I} = \dot{\alpha}_1 \vec{x} \wedge r_1 \vec{z} = -r_1 \dot{\alpha}_1 \vec{y}$$

$$\Rightarrow \text{donc } \vec{v}_I(S_2/S_1) = (\pi_2 \dot{\alpha}_2 + \pi_1 \dot{\alpha}_1) \vec{y}$$

2) Roulement sans glissement:

$$\vec{v}_I(S_2/S_1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \pi_2 \dot{\alpha}_2 + \pi_1 \dot{\alpha}_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{\alpha}_2}{\dot{\alpha}_1} = -\frac{\pi_1}{\pi_2}} \text{ Loi d'entrée sortie}$$

Cinétique

* Torseur cinématique : $\{v(S/R)\}$

$$\{v(S/R)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}(S/R) \text{ --- Résultante} \\ \vec{V}_O(S/R) \text{ --- vitesse angulaire} \end{array} \right\} \text{ : Torseur cinématique au point } O$$

$$\{v(S/R)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}(S/R) \text{ est la même pour tout point} \\ \vec{V}_A(S/R) = \vec{V}_O(S/R) + \vec{\omega}(S/R) \wedge \vec{OA} \end{array} \right\} \text{ : Torseur cinématique au point } A$$

Formule de cinématique du solide

* Torseur cinétique : $\{C_{S/R}\}$

- Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel R. Résultante

$$\{C_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm \\ \vec{G}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A \quad (1)$$

avec $\vec{V}_{P/R}$: vitesse du point P du système matériel E dans son mvt par rapport à R. moment

$\vec{P}_{E/R}$: Résultante cinétique de l'ensemble matériel E dans son mvt par rapport à R.

$\vec{G}_{A,E/R}$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mvt par rapport à R.

- on a : $\vec{P}_{E/R} = \int \vec{V}_{P/R} \cdot dm = m_E \cdot \vec{V}_G(E/R)$; G : centre d'inertie

$$\Rightarrow \{C(S/R)\}_O = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_G(S/R) \\ \vec{G}_O(S/R) \end{array} \right\}_O$$

on va considérer ce torseur cinétique dans les calculs.

• Méthode de calcul de $\vec{G}_O(S/R)$:

3)

Méthode 1 : Par définition

(on l'utilise pour les relations simples)

$$\vec{G}_O(S/R) = \int \vec{OP} \wedge \vec{V}_P(S/R) dm$$

) on ne l'utilise pas beaucoup.

Méthode 2 : Calcul directe

4

$$\vec{G}_O(S/R) = [I(S)]_O \cdot \vec{\Omega}(S/R) + m \vec{V}_O(S/R) \wedge \vec{GO}_{OG}$$

matrice d'inertie

centre d'inertie

Méthode 3 : Transfert

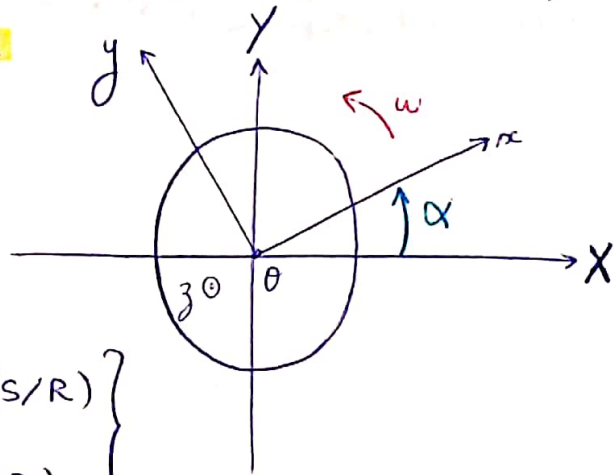
5

$$\vec{G}_O(S/R) = \vec{G}_A(S/R) + m \cdot \vec{V}_G(S/R) \wedge \vec{AO} \quad \left. \begin{array}{l} \text{du point A} \\ \text{au point O} \end{array} \right\}$$

Δ Il faut que AES

• Application :

Calculer le tenseur cinétique du disque en rotation au point O.



$$\Rightarrow \left\{ \Psi(S/R) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_G(S/R) \\ \vec{G}_O(S/R) \end{array} \right\}_O$$

• $G \equiv O \Rightarrow \vec{V}_G(S/R) = \vec{V}_O(S/R) = \vec{0}$ car O : centre de

$$\vec{G}_O(S/R) = \underbrace{[I(S)]_O}_{\text{on le connaît}} \cdot \underbrace{\vec{\Omega}(S/R)}_{= \dot{\alpha} \vec{z}} + m \underbrace{\vec{V}_O(S/R)}_{\vec{0}} \wedge \vec{OG} \quad \text{rotation}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mR^2}{2} \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{2} \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\text{Donc } \left\{ \Psi(S/R) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{mR^2}{2} \dot{\alpha} \vec{z} \end{array} \right\}_O$$

Torseur dynamique $\{ \mathcal{D}(S/R) \}$

- le torseur dynamique est le torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E dans son mvt par rapport à R (on peut dire que c'est la dérivée du torseur cinétique).

$$\{ \mathcal{D}_{E/R} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\ \vec{\delta}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

Moment dynamique avec :

$\vec{\Gamma}_{P/R}$: accélération du point de l'ensemble matériel E dans son mvt par rapport à R.

- on a : $\vec{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm = m \vec{\Gamma}_G(E/R)$; G : centre d'inertie

$$\Rightarrow \{ \mathcal{D}(S/R) \}_O = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_G(S/R) \\ \vec{\delta}_O(S/R) \end{array} \right\}_O$$

on considère ce torseur dans les calculs.

* Méthode de calcul de $\vec{\delta}_O(S/R)$:

Méthode 1 : Calcul direct

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \frac{d \vec{G}_O(S/R)}{dt} / R + m \vec{V}_O(S/R) \wedge \vec{V}_G(S/R)$$

Méthode 2 : Transfert

du point A au point O : $\vec{\delta}_O(S/R) = \vec{\delta}_A(S/R) + m \vec{\Gamma}_G(S/R) \wedge \vec{AO}$

Δ Il faut que $A \in S$

Application : la même

$$\{ \mathcal{D}(S/R) \}_O = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{\Gamma}_G(S/R) \\ \vec{\delta}_O(S/R) \end{array} \right\}_O$$

on a $O \equiv G \Rightarrow \vec{\Gamma}_G(S/R) = \vec{\Gamma}_O(S/R)$

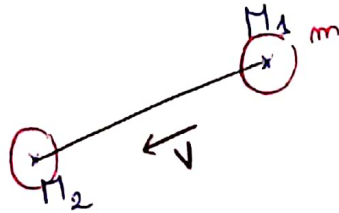
on $\vec{\Gamma}_O(S/R) = \vec{0}$ car O : centre de rotation

$$\vec{\delta}_O(S/R) = \frac{d \vec{G}_O(S/R)}{dt} / R \quad (\text{le reste} = 0) = \frac{d \left(\frac{m R^2}{2} \ddot{\theta} \vec{z} \right)}{dt} / R = \frac{m R^2}{2} \ddot{\theta} \vec{z}$$

Donc $\{ \mathcal{D}(S/R) \}_O = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{m R^2}{2} \ddot{\theta} \vec{z} \end{array} \right\}_O$

* Énergie cinétique :

- L'énergie cinétique est l'énergie liée au mouvement d'un corps. En fait, elle est égale au travail nécessaire pour faire passer le corps du repos à son mvmt de translation ou de rotation.



$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ (Joule)}$$

• Pour un solide en rotation :



$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ (Joule)}$$

Moment d'inertie

* Calcul de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{V}(S/R) \right\}_O \times \left\{ \mathcal{L}(S/R) \right\}_O$$

Torseur cinématique Torseur cinétique

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}_O(S/R) \end{array} \right\}_O \times \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_G(S/R) \\ \vec{G}_O(S/R) \end{array} \right\}_O$$

$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{\vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{G}_O(S/R)}_{\text{Terme de rotation}} + \underbrace{m \vec{V}_O(S/R) \cdot \vec{V}_G(S/R)}_{\text{Terme de mvmt linéaire}} \right)$$

⚠ ⚠ Il faut que $\left\{ \mathcal{V}(S/R) \right\}$ et $\left\{ \mathcal{L}(S/R) \right\}$ soient dans le même point et le même repère.

⚠ L'énergie cinétique en tout point d'un solide (s) est la même donc on choisit le point le plus simple (exp: centre de rotation du solide).

Application : Calculer l'énergie cinétique du disque
 $\Rightarrow$ on a : $\left\{ \varphi(S/R) \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \frac{mR^2 \dot{\alpha}}{2} \vec{\delta} \end{matrix} \right\}_O$ en notation (Même application).
 et $\left\{ v(S/R) \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}_O(S/R) \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{\delta} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$

Donc :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \left\{ v(S/R) \right\}_O \times \left\{ \varphi(S/R) \right\}_O \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{\delta} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O \times \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \frac{mR^2 \dot{\alpha}}{2} \vec{\delta} \end{matrix} \right\}_O \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2 \dot{\alpha}^2}{2} + 0 \right) = \frac{mR^2 \dot{\alpha}^2}{4} \end{aligned}$$

* Puissance dynamique :

- la puissance représente la vitesse à laquelle un travail est fourni. C'est la quantité d'énergie par unité de temps fournie par un système à un autre. C'est donc une grandeur scalaire.

- la puissance correspond donc à un débit d'énergie : si 2 systèmes de puissances différentes fournissent le même travail (la même énergie), le plus puissant des 2 est celui qui est le plus rapide.

* Méthodes de calcul de la puissance P :

Méthode 1 : $P = \frac{dE_c}{dt}$
 $W = J \cdot s^{-1}$

Méthode 2 :

⚠ Il faut que $\left\{ v(S/R) \right\}$ et $\left\{ D(S/R) \right\}$ soient dans le même point et dans le même repère.

$$\begin{aligned} P &= \left\{ v(S/R) \right\}_O \times \left\{ D(S/R) \right\}_O \\ &\quad \text{Torseur cinématique} \quad \text{Torseur dynamique} \\ &= \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}_O(S/R) \end{matrix} \right\}_O \times \left\{ \begin{matrix} m \vec{\Gamma}_G(S/R) \\ \vec{\delta}_O(S/R) \end{matrix} \right\}_O \\ &= \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\delta}_O(S/R) + m \vec{V}_O(S/R) \cdot \vec{\Gamma}_G(S/R) \end{aligned}$$

~ Principe Fondamental de la dynamique (PFD)

* Torseur statique :

Torseur cinématique $\overleftrightarrow{V}(S/R)$

- C'est le torseur d'absence de mouvement (d'encastrement / de fixation).

$$\{\tau_{S_i \rightarrow S}\}_O = \left\{ \overbrace{\vec{R}}^{\text{Fixe \& le point}} / \overbrace{\vec{M}_O}^{\text{dépend du point}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_O & L_O \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{array} \right\}_O$$



Résultante / Force

Moment en O

(Déplacement linéaire)

Résultante / Force $\neq$ Vitesse

Vitesse angulaire $\neq$ Moment (rotation linéaire)

Torseur cinématique : $\{\overleftrightarrow{V}(S/R)\}_O = \left\{ \overbrace{\vec{\Omega}(S/R)}^{\text{dépend du point}} \middle| \overbrace{\vec{V}_O(S/R)}^{\text{Fixe \& le point}} \right\}_O$

Torseur statique : $\{\tau_{S_i \rightarrow S}\}_O = \left\{ \vec{R} \middle| \vec{M}_O \right\}$

Exemples :

• Liaison pivot : $\{\overleftrightarrow{V}(2/1)\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha_O & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$
 (Rotation autour d'un seul axe)
 $\Rightarrow \{\tau_{2 \rightarrow 1}\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} X_O & 0 \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{array} \right\}_O$

• Liaison pivot-glissant : $\{\overleftrightarrow{V}(2/1)\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha_O & U_O \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$
 (1 translation + 1 rotation)
 $\Rightarrow \{\tau_{2 \rightarrow 1}\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{array} \right\}_O$

• Liaison glissière : $\{\overleftrightarrow{V}(2/1)\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & U_O \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$
 (Translation suivant un seul axe)
 $\Rightarrow \{\tau_{2 \rightarrow 1}\}_O = \left\{ \begin{array}{c|c} X_O & 0 \\ Y_O & M_O \\ Z_O & N_O \end{array} \right\}_O$

* Torseur cinématique :

$$\left\{ v_{(S/R)} \right\}_O = \left\{ \vec{\omega}_{(S/R)} \mid \vec{v}_O(S/R) \right\}_O$$

Vitesse en O (Translation)

(Rotation) Vitesse angulaire

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} \alpha_O & U_O \\ \hline \beta_O & V_O \\ \gamma_O & W_O \end{array} \right\}_O$$

* Théorème de PFD :

Déf : Dans un référentiel galiléen, le torseur des actions mécaniques appliquées à un solide est égale au torseur dynamique de ce solide dans son mvmt par rapport à R_0 .

$$\sum \left\{ \tau_{s_i \rightarrow s} \right\}_O = \left\{ D(S/R) \right\}_O$$

Torseur des actions mécaniques sur S en O

Torseur dynamique de S par rapport à R en O.

$$\Rightarrow \sum \left\{ \vec{R}_{s_i \rightarrow s} \mid \vec{M}_{O(s_i \rightarrow s)} \right\}_O = \left\{ m \vec{\Gamma}_G(S/R) \mid \vec{\delta}_O(S/R) \right\}_O$$

Théorème de la résultante dynamique :

$$\sum \vec{R}_{s_i \rightarrow s} = m \vec{\Gamma}_G(S/R)$$

Théorème de moment dynamique :

$$\sum \vec{M}_{O(s_i \rightarrow s)} = \vec{\delta}_O(S/R)$$

⚠ Tous les torseurs doivent être dans la même base (référentiel) et le même point.

* Démarche de résolution des problèmes :

- 1) Calculer le torseur cinétique de S par rapport à R et en déduire le torseur dynamique (au point O).
- 2) Déterminer les torseurs des actions mécaniques appliquées sur S (statique) chacun dans son point d'application.

- 3) Transférer tous les torseurs des actions en un seul point (point O).

reste la même

$$\{ \tau_{S_i \rightarrow S} \}_A = \{ \vec{R} \mid \vec{M}_A \}_A \Rightarrow \{ \tau_{S_i \rightarrow S} \}_O = \{ \vec{R} \mid \vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AO} \}_O$$

- 4) Transférer tous les torseurs en un seul repère (par projection)
- 5) Écrire le théorème de résultante dynamique et le théorème de moment dynamique.
- 6) Déterminer les actions mécaniques inconnues à partir des 6 équations trouvées.
- 7) Déterminer l'équation de mvt du système.

~ Energétique ~

* Puissance des actions mécaniques :

$$\text{en Nm/s} \quad P = \overset{\text{en N}}{\vec{F}} \cdot \overset{\text{en m/s}}{\vec{V}} = \text{CW} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Puissance} \\ \text{mécanique} \\ \text{des moteurs} \end{array} \right)$$

$\swarrow$ Force $\swarrow$ Vitesse $\swarrow$ couple (Nm) $\swarrow$ rd/s

$$\Rightarrow P_{S_i \rightarrow S} = \underbrace{\left\{ \vec{\tau}_{S_i \rightarrow S} \right\}_O}_{\text{Torseur statique}} \times \underbrace{\left\{ \vec{v}(S/R) \right\}_O}_{\text{Torseur cinématique}}$$

$$= \left\{ \vec{R} \mid \vec{M}_O \right\}_O \times \left\{ \vec{\Omega}(S/R) \mid \vec{V}_O(S/R) \right\}_O$$

Donc

$$P_{S_i \rightarrow S} = \vec{R} \cdot \vec{V}_O(S/R) + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

* Théorème de l'énergie cinétique :

Def : la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques agissant sur S est égale à la variation de l'énergie cinétique entre 2 instants $t =$ c'est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

$$P(S/R) = \frac{dE_c}{dt}$$

$$P(S/R) = \sum (P_{S_i \rightarrow S})$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } P(S/R) &= \sum (\vec{R} \cdot \vec{V}_O(S/R) + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega}(S/R)) = \sum P_{S_i \rightarrow S} \\ &= \text{Torseur statique} \times \text{Torseur cinématique} \end{aligned}$$

- Énergie cinétique E_c :

4)

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \vec{v}(S/R) \right\}_O}_{\text{Torseur cinématique}} \otimes \underbrace{\left\{ \vec{\varphi}(S/R) \right\}_O}_{\text{Torseur cinétique}}$$

5

$$= \frac{1}{2} \left\{ \vec{\Omega}(S/R) \mid \vec{V}_O(S/R) \right\}_O \otimes \left\{ m \vec{V}_G(S/R) \mid \vec{G}_G(S/R) \right\}_O$$

$$E_c = \frac{1}{2} \left(\vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{G}_O(S/R) + m \vec{V}_O(S/R) \cdot \vec{V}_G(S/R) \right)$$



Les torseurs doivent être dans la même base (repère) et même point.

* Démarche de résolution des problèmes :

- 1) Calculer le torseur cinématique et le torseur cinétique au point O.
- 2) Calculer l'énergie cinétique E_c .
- 3) Déterminer les torseurs des actions mécaniques appliquées sur S chacun dans son point d'application.
- 4) Calculer la puissance des actions mécaniques chacun dans son point d'application.
- 5) Écrire le théorème de l'énergie cinétique :

$$P_{(S/R)} = \sum P_{S_i \rightarrow S} = \frac{dE_c}{dt}$$
- 6) Dédire l'éq de movt.

~ Graphe des liaisons ~

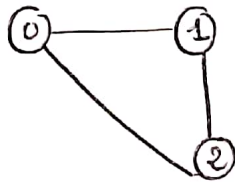
• Le graphe de liaisons d'un mécanisme est une représentation plane qui sert à décrire les liaisons entre les pièces d'un mécanisme.

→ Les solides sont schématisés par des cercles.

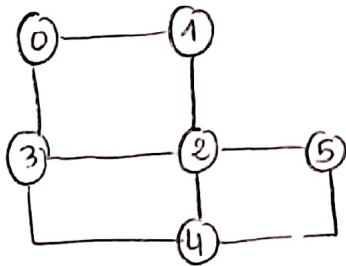
→ Les liaisons par des arcs de courbe joignant les cercles.

* Chaîne fermée de solides :

• Une chaîne fermée de solides, ou une boucle, est une chaîne ouverte dont les 2 solides extrêmes sont reliés par une liaison.



⇒ Généralement, le graphe des liaisons d'un mécanisme est constitué d'une ou plusieurs chaînes fermées de solides.



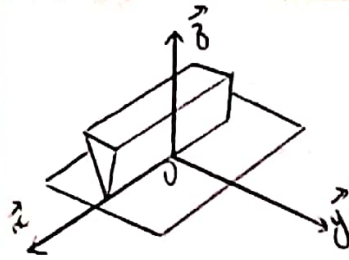
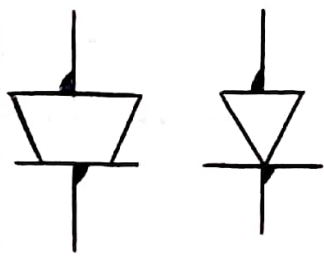
Liaisons normalisées

* Degré de liberté d'une liaison :

- Le degré de liberté m d'un solide (S_2) par rapport à un autre solide (S_1) est le nombre de mouvements de rotations et de translations suivant $(0, \vec{x})$, $(0, \vec{y})$ et $(0, \vec{z})$ que la liaison autorise.

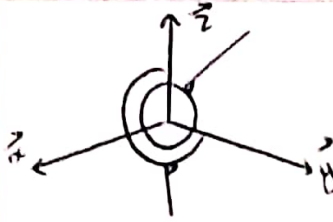
Liaisons	Dans le plan	Schématisation	Espace	Torseur cinématique
Liaison encastrement (Aucun mvmt entre les 2 solides est possible) $m = 0$				$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\theta} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Liaison glissière (1 mvmt de translation) $m = 1T$				$\begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\theta} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Liaison pivot (Mvt de rotation) $m = 1R$				$\begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\theta} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Liaison pivot glissant (1 Rotation + 1 Translation) $m = 2$				$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\theta} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
Liaison hélicoïdale (Rotation combinée avec la translation) $m = 1$				$\begin{Bmatrix} \alpha & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\theta} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec $ u = \text{pas} \cdot \alpha $ d'hélice

Liaison
rectiligne
(2 Rotations
+
2 Translations)
 $m = 4$



$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \end{Bmatrix}_0$$

Liaison
rotative
(3 Rotations)
 $m = 3$



$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \end{Bmatrix}_0$$